

โลกแห่งสมการ The world of EQUATION

รวบรวมจาก

หนังสือ Understanding 2nd Edition

ชุมนุมคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา (พ.ศ.2518)

นำเสนอโดย....คุณ เล็ก (สวิตซ์เกียร์ @ กฟผ.)

รวบรวมโดย MathB@T @Vcharckarn.com

EQUATION

Definition สมการหมายถึงการเท่ากันของ 2 นิพจน์ ใช้เครื่องหมาย = กันระหว่าง 2 นิพจน์ การเท่ากันมี 2 อย่าง

1. Identity (เอกลักษณ์) เช่น $x + 3 + x + 4 = 2x + 7$ เพราะไม่ว่า x จะมีค่าเท่าไร เมื่อหาค่าเป็นตัวเลขมาแทน x แล้ว นิพจน์ทั้ง 2 ย่อมมีค่าเท่ากันเสมอทุกกรณี

2. Equation of Condition เช่น $4x + 2 = 14$, x จะมีค่าเฉพาะค่าเดียวคือ 3 เท่านั้น เป็นการเท่ากันโดยมีเงื่อนไข

ตัวประกอบแห่งสมการ

1. Unknown Quantity (ตัวไม่ทราบค่า)
2. Solving the Equation (ถอดสมการหรือแก้สมการ)
3. The Root or Solution of the Equation (รากของสมการ)

N.B. ในการแก้สมการต้องอาศัยความจริงที่ว่า สิ่งที่เท่ากันเมื่อเอาอะไรมาเพิ่มเข้า ลบออก คูณ หรือหารด้วยตัวที่เท่ากัน ผลลัพธ์ที่ได้ย่อมเท่ากัน

- กำลังสาม**
1. ใช้แยก factor
 2. ใช้ทฤษฎีเศษเหลือ
 3. สมมุติเทอมเหมือน
 4. ใช้วิธี Synthetic Division

เมื่อดำเนินการตามวิธีใดวิธีหนึ่งแล้ว ก็หาตัวประกอบต่อไปได้โดยวิธีเดิม หรือวิธีจับวงเล็บแล้วคูณตัวประกอบ โดยให้ผลลัพธ์เท่าเดิม

- กำลังมากกว่าสาม**
1. ดำเนินการแบบเดียวกับสมการกำลัง 3
 2. เพื่อจัดความยุ่งยากอาจสมมุติค่าแทนในสมการได้ เพื่อให้ตัวเลขน้อยลง

หลักในการแก้สมการหาคำตอบไม่ทราบค่า 1 ตัว

- กำลังหนึ่ง**
1. ให้ย้ายตัวไม่ทราบค่าอยู่ข้างเดียวกัน
 2. ถ้าเป็นเศษส่วนให้เอา ค.ร.น. คูณตลอดให้ส่วนหมดไป แล้วย้ายข้าง

- กำลังสอง**
1. แยกตัวประกอบ
 2. ทำเป็นกำลัง 2 สมบูรณ์
 3. เมื่อ $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

เมื่อ $ax^{2m} + bx^m + c = 0$

$$x = \left[\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right]^{\frac{1}{m}}$$

4. โดยสมมติเทอมเหมือน

- กำลังสาม**
1. ใช้แยก factor
 2. ใช้ทฤษฎีเศษเหลือ
 3. สมมติเทอมเหมือน
 4. ใช้วิธี Synthetic Division

เมื่อกำหนดตามวิธีใดวิธีหนึ่งแล้ว ก็หาตัวประกอบต่อไปได้โดยวิธีเดิม หรือวิธีจับวงเล็บแล้วคูณตัวประกอบ โดยให้ผลลัพธ์เท่าเดิม

- กำลังมากกว่าสาม**
1. ทำเนิการแบบเดียวกับสมการกำลัง 3
 2. เพื่อจัดความยุ่งยากอาจสมมุติค่าแทนในสมการได้ เพื่อให้ง่ายลง

1. โดยการแยก factor

Ex. จงหาค่า x

1. $9x^2 + 4 = 12x$

2. $6x^3 - 5x^2 + x = 0$

Solve 1.

$9x^2 - 12x + 4 = 0$

$(3x - 2)(3x - 2) = 0$

$x = \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ Ans

Solve 2.

$6x^3 - 5x^2 + x = 0$

$x(6x^2 - 5x + 1) = 0$

$x(3x - 1)(2x - 1) = 0$

$x = 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ Ans

2. โดยใช้กฎกำลังสองสมบูรณ์

1. ถ้าเป็นเศษส่วน ต้องทำให้ส่วนหมดไป โดยเอา ก.ร.น. คูณตลอด
2. ย้ายเทอมที่มี x^2 และ x ไปทางซ้ายให้เทอมอิสระอยู่ทางขวามือ
3. ทำสัมประสิทธิ์ของ x^2 ให้หมดไปโดยเอาสัมประสิทธิ์ของ x^2 หารตลอด
4. เอา 2 หาร ส.ป.ส. ของ x ได้ผลลัพธ์เท่าใด แล้วยกกำลัง 2 นำไปบวกเข้าทั้งทางซ้ายและทางขวาเพื่อให้ค่าเท่าเทียม
5. ทำจำนวนทางซ้ายให้เป็นรูปผลบวกหรือผลต่าง
6. ถอดรากที่ 2 ทั้งทางซ้ายและขวา ค่าทางขวามือมีเครื่องหมาย $\pm$ นำหน้าแล้วหาค่า x

Ex. จงหาค่า x จาก $(3x - 8)(x + 5) = (5x - 2)(x - 2)$

Solve $(3x - 8)(x + 5) = (5x - 2)(x - 2)$

$$3x^2 + 7x - 40 = 5x^2 - 12x + 4$$

$$3x^2 + 7x - 40 = 5x^2 - 12x + 4$$

$$2x^2 - 19x = -44$$

2 พจน์ตลอด $x^2 - \frac{19}{2}x = -22$

$\left(\frac{19}{4}\right)^2$ บวกเข้าทั้ง 2 ข้าง, $x^2 - \frac{19}{2}x + \left(\frac{19}{4}\right)^2 = -22 + \left(\frac{19}{4}\right)^2$

$$\left(x - \frac{19}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

ถอดรากที่ 2 $x - \frac{19}{4} = \pm \frac{3}{4}$

$$x = \frac{11}{2}, 4 \quad \text{Ans}$$

Ex. $4x^2 + 5x = 6$

Solve $x^2 + \frac{5}{4}x = \frac{3}{2}$

$$x^2 + \frac{5}{4}x + \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{3}{2} + \left(\frac{5}{8}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{5}{8}\right)^2 = \frac{121}{64}$$

$$x + \frac{5}{8} = \pm \frac{11}{8}$$

$$x = \frac{3}{4}, -2 \quad \text{Ans}$$

3. โดยการใช้สูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ex. $\frac{2}{5x+2} - \frac{6x^2}{25x^2+15x+2} = 0$

Solve $\frac{2(5x+1) - 6x^2}{25x^2+15x+2} = 0$

$$-6x^2 + 10x + 2 = 0$$

$$3x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6} \quad \text{Ans}$$

4. สมมติเทอมเหมือน

Ex. $x^2 + \frac{4}{x^2} = 15 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} \right) - 17 \frac{1}{2}$

Solve ให้ $\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = y$

$$\therefore \frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2} = y^2 - 1$$

$$\frac{1}{4} \left(x^2 + \frac{4}{x^2} \right) = y^2 - 1$$

แทนค่า $4(y^2 - 1) = 15y - \frac{35}{2}$

$$8y^2 - 30y + 27 = 0$$

$$(4y - 9)(2y - 3) = 0$$

$$y = \frac{9}{4}, \frac{3}{2} \quad \text{Ans}$$

เมื่อ $y = \frac{9}{4}, \frac{x}{2} + \frac{1}{x} = \frac{9}{4}$		เมื่อ $y = \frac{3}{2}, \frac{x}{2} + \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$
$x = \frac{1}{2}, 4 \quad \text{Ans}$		$x = 2, 1 \quad \text{Ans}$

Ex.
$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 2} = \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 3x - 2}$$

Solve
$$1 + \frac{1}{x^2 - 4x + 2} = 1 + \frac{1}{x^2 + 3x - 2}$$

$$x^2 + 3x - 2 = x^2 - 4x + 2$$

$$7x = 4$$

$$x = \frac{4}{7}$$

Ans

Ex.
$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}$$

Solve
$$\frac{2x+5}{x^2+5x+4} = \frac{2x+5}{x^2+5x+6}$$

$$(2x+5)(x^2+5x+6) = (2x+5)(x^2+5x+4)$$

$$(2x+5)(x^2+5x+6) - (2x+5)(x^2+5x+4) = 0$$

$$(2x+5)(x^2+5x+6-x^2-5x-4) = 0$$

$$2(2x+5) = 0$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

Ex.
$$\frac{(x+a)(x+b)}{x+a+b} = \frac{(x+c)(x+d)}{x+c+d}$$

Solve
$$\frac{x^2 + (a+b)x + ab}{x+a+b} = \frac{x^2 + (c+d)x + cd}{x+c+d}$$

$$x + \frac{ab}{x+a+b} = x + \frac{cd}{x+c+d}$$

$$abx + abc + abd = cdx + acd + bcd$$

$$x = \frac{cd(a+b) - ab(c+d)}{ab - cd} \quad \text{Ans}$$

Ex.
$$\frac{x+bc}{b-c} + \frac{x+ca}{a-c} + \frac{x-ab}{a+b} = a+b-c$$

Solve
$$\left(\frac{x+bc}{b-c} - a\right) + \left(\frac{x+ca}{a-c} - b\right) + \left(\frac{x-ab}{a+b} + c\right) = 0$$

$$\frac{x-(ab-bc-ca)}{b-c} + \frac{x-(ab-bc-ca)}{a-c} + \frac{x-(ab-bc-ca)}{a+b} = 0$$

$$\left\{ x - (ab - bc - ca) \right\} \left\{ \frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-c} + \frac{1}{a+b} \right\} = 0$$

$$x = ab - bc - ca \quad \text{Ans}$$

Ex.
$$x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$$

Solve 1.
$$(x^4 - 1) - 2x(x^2 - 1) = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$(x - 1)(x - 1)(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x = -1, 1, 1, 1 \quad \text{Ans}$$

Solve 2.
$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$$

$$f(1) = 1 - 2 + 2 - 1 = 0$$

$(x - 1)$ เป็น factor พหุคูณของสมการ $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

$$x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = (x - 1)(x^3 - x^2 - x + 1)$$

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$f(1) = 0$$

$(x - 1)$ เป็น factor พหุคูณของสมการ $x^3 - x^2 - x + 1$

$$x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = (x - 1)(x - 1)(x^2 - 1)$$

$$= (x - 1)(x - 1)(x - 1)(x + 1)$$

$$\therefore x = 1, 1, 1, -1 \quad \text{Ans}$$

Solve 3. Synthetic Division หรือการหารสังเคราะห์ มีหลักคือ

1. ให้นำ ส.ป.ส. ของตัวไม่ทราบค่าจัดกำลังเรียงจากมากไปน้อย หรือน้อยไปมาก เครื่องหมายคงเดิม

2. โดยการคิดในใจ สมการจะเป็น 0 เมื่อ x มีค่าเท่าใด ให้นำค่า นั้นมาใส่ในตารางพร้อมเครื่องหมาย

3. ถึงตัวแรกของ ส.ป.ส. ลงมาในบรรทัดที่ 3 คูณด้วยเลขในตารางนั้น ใส่ ลงบรรทัดสองแล้วบวกกัน ได้ผลลัพธ์เท่าไร คูณด้วยเลขในตารางนั้น

N.B. ตัวสุดท้ายของผลลัพธ์ต้อง $= 0$ จึงแสดงว่าเลขนั้นเป็นตัวประกอบของ function นี

$$\begin{array}{r} 1 - 2 + 0 + 2 - 1 \quad | \quad 1 \\ \underline{1 - 1 - 1 + 1} \\ 1 - 1 - 1 + 1 + 0 \end{array}$$

เพราะฉะนั้นได้ $(x - 1)(x^3 - x^2 - x + 1)$

โดยการดำเนินวิธีเดียวกับข้างต้นจะได้ว่า $x - 1$ เป็น factor ของสมการนี้

$$\begin{array}{r} 1 - 1 - 1 + 1 \quad | \quad 1 \\ \underline{+ 1 + 0 - 1} \\ 1 + 0 - 1 + 0 \end{array}$$

เพราะฉะนั้นได้ $(x - 1)(x - 1)(x^2 - 1)$ หรือ $(x - 1)^3(x + 1)$

$$x = 1, 1, 1, -1$$

Ans

Ex. $(x+1)^4 + (x+5)^4 = 82$

Solve ให้ $a = \frac{(x+1) + (x+5)}{2} = x+3$

$$(a-2)^4 + (a+2)^4 = 82$$

$$a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a + 16 + a^4 + 8a^3 + 24a^2 + 32a + 16 = 82$$

$$a^4 + 24a^2 - 25 = 0$$

$$a = 1, -1, \pm 5\sqrt{-1}$$

$$\therefore x = -2, -4, -3 \pm 5\sqrt{-1} \text{ Ans}$$

N.B. เราให้ $a = x+3$ เพราะเมื่อแทนลงในสมการ เทอมส่วนใหญ่จะหักกันหมดไป

Ex. $x^4 - 5x^3 - 13x^2 + 53x + 60 = 0$

Suggest 1. แยกเทอมอิสระ $60 = 1 \times 3 \times 4 \times 5$

2. ให้ x แปรตามตัวประกอบของ 60 เป็นบวกหรือลบ ทำให้ฟังก์ชันเป็น 0

3. จะได้ factor ของฟังก์ชันแล้วหาค่า

Solve ให้ $f(x) = x^4 - 5x^3 - 13x^2 + 53x + 60$

$$f(-1) = 1 + 5 - 13 - 53 + 60 = 0$$

$(x+1)$ เป็น factor หนึ่งของ $f(x)$

$$f(4) = 256 - 320 - 208 + 212 + 60 = 0$$

$(x-4)$ เป็น factor หนึ่งของ $f(x)$

$$x^4 - 5x^3 - 13x^2 + 53x + 60 = (x+1)(x-4)(x^2 - 2x - 15)$$

$$= (x+1)(x-4)(x+3)(x-5)$$

$$\therefore x = -1, 4, -3, 5 \text{ Ans}$$

Ex. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1 = 0$

- Suggest**
1. เลือกคู่ factor คู่กันเพื่อให้ ส.ป.ส. ของ x^2 และ x เท่ากัน โดยสังเกตเทอมสุดท้ายนำมาบวกกันพร้อมเครื่องหมาย
 2. สมมติค่าแทนตัวไม่ทราบค่าจากข้อ ก. ที่สัมพันธ์กัน
 3. กลับมาทำค่าตัวที่โจทย์กำหนดอีก

Solve $\{(x + 1)(x + 4)\} \{(x + 2)(x + 3)\} + 1 = 0$

$$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1 = 0$$

ให้ $x^2 + 5x = m$

$$(m + 4)(m + 6) + 1 = 0$$

$$m^2 + 10m + 25 = 0$$

$$m = -5, -5$$

$$\therefore x^2 + 5x = -5$$

$$x^2 + 5x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{Ans}$$

สมการส่วนกลับ สมการประเภทนี้มีข้อสังเกตคือ

1. ส.ป.ส. ตัวต้นและตัวท้ายเหมือนกัน
2. ส.ป.ส. ตัวรองต้นและรองสลับท้ายเหมือนกัน
3. ตัวไม่ทราบค่ากำลังสูงสุดเป็นกำลังสี่

วิธีแก้

1. ทำให้อยู่ในรูปกำลังสองโดยเอาพจน์กลางคือ x^2 ทหารตลอด
2. จับคู่ที่มีกำลังเหมือนกัน
3. สมมติค่าแทนในข้อ 2
4. แทนค่าตัวสมมติเมื่อทราบค่าแล้วแก้สมการ

Ex. $6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0$

Solve x^2 ทหารตลอด $6x^2 - 25x + 12 + \frac{25}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$

$$6 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 25 \left(x - \frac{1}{x} \right) + 12 = 0$$

ให้ $y = x - \frac{1}{x}, y^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$$

แทนค่า $6(y^2 + 2) - 25y + 12 = 0$

$$6y^2 - 25y + 24 = 0$$

$$y = \frac{8}{3}, \frac{3}{2}$$

เมื่อ $y = \frac{8}{3}, x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3}$

$$x = -\frac{1}{3}, 3 \text{ Ans}$$

เมื่อ $y = \frac{3}{2}, x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$

$$x = -\frac{1}{2}, 2 \text{ Ans}$$

Ex. $6x^5 + 41x^4 + 97x^3 + 97x^2 + 41x + 6 = 0$

Suggest

1. สมการกำลังสูงเป็นกำลังต่ำ ต้องทำให้กำลังสูงสุดเป็นสี่ เพราะรากตัวหนึ่งไม่มี

2. ใช้ทฤษฎีเศษเหลือหาคำแรก

3. ใช้หลักเกณฑ์การหารส่วนกลับหาค่า x

ให้ $f(x) = 6x^5 + 41x^4 + 97x^3 + 97x^2 + 41x + 6$

$$f(-1) = 0$$

$(x + 1)$ เป็น factor ของ $f(x)$

$$(x + 1)(6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6) = 0$$

$$6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6 = 0$$

แล้วดำเนินการแก้สมการตามกฎการแก้สมการส่วนกลับ

$$x = -\frac{1}{3}, -3, -\frac{1}{2}, -2, -1$$

Ans

Ex. $4x^6 - 24x^5 + 57x^4 - 73x^3 + 57x^2 - 24x + 4 = 0$

Suggest 1. เอา x^3 ทหารกลอด

2. จัดเทอมเหมือน

3. ใช้ทฤษฎีเศษเหลือ

Solve $4x^6 - 24x^5 + 57x^4 - 73x^3 + 57x^2 - 24x + 4 = 0$

x^3 ทหารกลอด $4x^3 - 24x^2 + 57x - 73 + \frac{57}{x} - \frac{24}{x^2} + \frac{4}{x^3} = 0$

$$4 \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) - 24 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 57 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 73 = 0$$

$$y = x + \frac{1}{x}$$

$$y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$y^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$$

$$y^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

$$y^3 - 3y = x^3 + \frac{1}{x^3}$$

แทนค่า $4(y^3 - 3y) - 24(y^2 - 2) + 57y - 73 = 0$

$$4y^3 - 24y^2 + 45y - 25 = 0$$

ใช้ทฤษฎีเศษเหลือได้ $y - 1$ เป็น factor พหุคูณของ $f(y)$

$$y = 1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \quad \text{Ans}$$

การแก้สมการแบบพิเศษ

Ex. $(p-x)^3 + (q-x)^3 - (p+q-2x)^3 = 0$

Suggest 1. สมมุติค่าแต่ละเทอมเป็นสมการใหม่
 2. ถ้า $a + b + c = 0$ จะได้ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Solve $(p-x)^3 + (q-x)^3 - (p+q-2x)^3 = 0$

ให้ $(p-x) = A, q-x = B, p+q-2x = C$

$A + B + (-C) = p-x + q-x - p-q+2x = 0$

$\therefore A^3 + B^3 + (-C)^3 = 3AB(-C)$

$A^3 + B^3 - C^3 = -3ABC$

$A^3 + B^3 - C^3 = (p-x)^3 + (q-x)^3 - (p+q-2x)^3 = 0$

$-3ABC = -3(p-x)(q-x)(p+q-2x) = 0$

$x = p, q, \frac{p+q}{2}$ Ans

Ex. $\left(\frac{2x+p+r}{2x+q+r}\right)^2 = \frac{x+p}{x+q}$

Solve $\left(1 + \frac{p-q}{2x+q+r}\right)^2 = 1 + \frac{p-q}{x+q}$

$\frac{2(p-q)}{2x+q+r} + \frac{(p-q)^2}{(2x+q+r)^2} = \frac{p-q}{x+q}$

$p-q$ พหารตลอด $\frac{p-q}{(2x+q+r)^2} = \frac{1}{x+q} - \frac{2}{2x+q+r}$

$= \frac{r-q}{(x+q)(2x+q+r)}$

$(2x+q+r)(p-q)(x+q) = (r-q)(2x+q+r)^2$

$(2x+q+r) \left\{ (p-q)(x+q) - (r-q)(2x+q+r) \right\} = 0$

$\therefore x = -\frac{q+r}{2}, \frac{r^2-pq}{p+q+2r}$ Ans

$$\text{Ex.} \quad \frac{ax+b}{cx+b} + \frac{bx+a}{cx+a} = \frac{(a+b)(x+2)}{cx+a+b}$$

$$\text{Solve} \quad \frac{ax+b}{cx+b} + \frac{bx+a}{cx+a} = \frac{(ax+b) + (bx+a) + (a+b)}{cx+a+b}$$

$$\therefore (ax+b) \left\{ \frac{1}{cx+b} - \frac{1}{cx+a+b} \right\} + (bx+a) \left\{ \frac{1}{cx+a} - \frac{1}{cx+a+b} \right\} = \frac{a+b}{cx+a+b}$$

$$\frac{a(ax+b)}{(cx+b)(cx+a+b)} + \frac{b(bx+a)}{(cx+a)(cx+a+b)} = \frac{a+b}{cx+a+b}$$

$$cx+a+b \text{ คูณตลอดได้ } \frac{a(ax+b)}{cx+b} - a + \frac{b(bx+a)}{cx+a} - b = 0$$

$$\frac{ax(a-c)}{cx+b} + \frac{bx(b-c)}{cx+a} = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ หรือ } (a^2 - ac)(cx+a) + (b^2 - bc)(cx+b) = 0$$

$$x(a^2c - ac^2 + b^2c - bc^2) = -a^3 + a^2c - b^3 + b^2c$$

$$x \left\{ ac(a-c) + bc(b-c) \right\} = a^2(c-a) + b^2(c-b)$$

$$\therefore x = 0, \quad \frac{a^2(c-a) + b^2(c-b)}{ac(a-c) + bc(b-c)} \quad \text{Ans}$$

$$\text{Ex.} \quad \frac{ax+b}{cx+b} + \frac{bx+a}{cx+a} = \frac{(a+b)(x+2)}{cx+a+b}$$

$$\text{Solve} \quad \frac{ax+b}{cx+b} + \frac{bx+a}{cx+a} = \frac{(ax+b) + (bx+a) + (a+b)}{cx+a+b}$$

$$\therefore (ax+b) \left\{ \frac{1}{cx+b} - \frac{1}{cx+a+b} \right\} + (bx+a) \left\{ \frac{1}{cx+a} - \frac{1}{cx+a+b} \right\} = \frac{a+b}{cx+a+b}$$

$$\frac{a(ax+b)}{(cx+b)(cx+a+b)} + \frac{b(bx+a)}{(cx+a)(cx+a+b)} = \frac{a+b}{cx+a+b}$$

$$cx+a+b \text{ คูณตลอดได้ } \frac{a(ax+b)}{cx+b} - a + \frac{b(bx+a)}{cx+a} - b = 0$$

$$\frac{ax(a-c)}{cx+b} + \frac{bx(b-c)}{cx+a} = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ หรือ } (a^2 - ac)(cx+a) + (b^2 - bc)(cx+b) = 0$$

$$x(a^2c - ac^2 + b^2c - bc^2) = -a^3 + a^2c - b^3 + b^2c$$

$$x \left\{ ac(a-c) + bc(b-c) \right\} = a^2(c-a) + b^2(c-b)$$

$$\therefore x = 0, \quad \frac{a^2(c-a) + b^2(c-b)}{ac(a-c) + bc(b-c)} \quad \text{Ans}$$

สมการกำลังสาม

ถ้า $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ และ $b^2 = 3ac$ จะได้ $x = \frac{-b + \sqrt[3]{b^3 - 27a^2d}}{3a}$
--

เนื่องจาก

$$b^2 = 3ac$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{b}{a} \right)^2 = \frac{c}{a}$$

$$\text{และ } ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x^3 + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} = 0$$

$$\text{แทนค่า } \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \left(\frac{b}{a} \right)^2, x^3 + \frac{bx^2}{a} + \frac{1}{3} \left(\frac{b}{a} \right)^2 x + \frac{d}{a} = 0$$

$$x^3 + \frac{bx^2}{a} + \frac{1}{3} \left(\frac{b}{a} \right)^2 x = -\frac{d}{a}$$

$$x^3 + \frac{bx^2}{a} + \frac{1}{3} \left(\frac{b}{a} \right)^2 x + \left(\frac{b}{3a} \right)^3 = -\frac{d}{a} + \left(\frac{b}{3a} \right)^3$$

$$\left(x + \frac{b}{3a} \right)^3 = \frac{b^3 - 27a^2d}{27a^3}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt[3]{b^3 - 27a^2d}}{3a}$$

สมการตัวกลับ

$$\text{ถ้า } ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

จะได้

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 8a^2}}{2a}$$

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

พิสูจน์

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

$$a \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + c = 0$$

$$\text{ให้ } y = x + \frac{1}{x}$$

$$\therefore y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

$$ay^2 + by + (c - 2a) = 0$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - 2a)}}{2a}$$

$$\text{แล้ว } y = x + \frac{1}{x}$$

$$x^2 - yx + 1 = 0$$

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

Ex.
$$\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = \frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b}$$

Solve
$$\frac{x-a}{b} - \frac{b}{x-a} = - \left(\frac{x-b}{a} - \frac{a}{x-b} \right)$$

$$\frac{(x-a-b)(x-a+b)}{b(x-a)} = - \frac{(x-a-b)(x+a-b)}{a(x-b)}$$

ได้ $x = a+b$ หรือ

$$a(x-a+b)(x-b) = -b(x+a-b)(x-a)$$

$$\therefore (a+b)x^2 - (a^2 + b^2)x = 0$$

$$\therefore x = 0, \frac{a^2 + b^2}{a+b}$$

$$\therefore x = a+b, 0, \frac{a^2 + b^2}{a+b}$$

สมการกำลังสอง

$$\boxed{\begin{aligned} ax^{2m} + bx^m + c &= 0 \\ x &= \left[\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right]^{\frac{1}{m}} \end{aligned}}$$

Prove $ax^{2m} + bx^m + c = 0$

$$x^{2m} + \frac{b}{a}x^m + \left(\frac{c}{a}\right) = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x^m + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x^m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \left[\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right]^{\frac{1}{m}}$$

m คือ จำนวนเต็มบวกหรือลบ เศษส่วนบวกหรือลบก็ได้

Problem

1. $x^6 + 2x^3 - 48 = 0$
2. $\frac{x^2}{(x-3)(x+1)} = \frac{3}{x-3} - \frac{3}{(x-3)(x+1)}$
3. $\frac{(x-3)^2}{(x-2)^2} - \frac{4(x-1)}{x-2} = \frac{-8}{x-2} + 5$
4. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} = 0$
5. $(x-4)^4 - 11(x-4)^2 + 18 = 0$
6. $(x^3 + 8) + (2x^2 + x - 6) = 0$
7. $27x^6 + 26x^3 - 1 = 0$
8. $(3x-1) : (2x+3) = (3x-4) : (2x+2)$
9. $2x^2 + (a+2b)x + ab = 0$
10. $x^2 - 2 = 2ix$
11. $a+x = \frac{1}{a} + \frac{1}{x}$
12. $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$
13. $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$
14. $a^2x^2 - b^2x^2 - 4abx = a^2 - b^2$
15. $a^2x^2 - x^2 - 2ax^2 + a^2 = 0$
16. $x^2 + ax + bx = (a+b)^2$
17. $\left(\frac{2x-3}{1+x}\right) - 6\left(\frac{1+x}{2x-3}\right) = 5$
18. $\sqrt{\frac{a+x}{b+x}} - \sqrt{\frac{b+x}{a+x}} = \frac{3}{2}$
19. $\frac{x^2-3x}{x^2-1} + 2 + \frac{1}{x-1} = 0$
20. $(x-1)^3 + (2x+3)^2 + (x+1)^2 - (x-3)^2 - 4x^2 - 21x = 0$

21. $mnx^2 + mqx - pnx - pq = 0$
22. $(w + z)x^2 - (3w + z)x + 2(w - z) = 0$
23. $(m - n)x^2 - 2mnx = m^3 + m^2n - 4mn^2 - 4n^3$
24. $(h^2 + 3h + 2)x^2 + h^2 = (2h^2 + 3h)x$
25. $(3x^2 - 7x)^2 + 6(3x^2 - 7x) = -8$
26. $2\left(\frac{x^2}{4} + \frac{9}{x^2}\right) + 5\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x}\right) = 4$
27. $x^2 + \frac{a}{x} = b^2 + \frac{a}{b}$
28. $x^3 - x^2(5 + a) + x(6 + 5a) - 6a = 0$
29. $(x - p - q)(x - q - r)(x - r - p) - pqr = 0$
30. $(x + b + c)(x + c + a)(x + a + b) + abc = 0$
31. $\frac{3}{x^2 + 6x + 1} - \frac{4}{x^2 + 6x + 8} = \frac{5}{x^2 + 6x + 2}$
32. $\frac{a + x}{b + x} - \frac{b + x}{a + x} = \frac{3}{2}$
33. $5x + \sqrt{5x - \frac{5}{x}} = \frac{5}{x}$
34. $3\left\{(x + 7)^{\frac{1}{2}} + (x + 7)^{-\frac{1}{2}}\right\} = 10$
35. $30x^4 - 341x^3 + 1022x^2 - 341x + 30 = 0$
36. $(x + 1)^5 + (x + 3)^5 = 0$
37. $(x + 2)^5 + (x + 4)^6 = 2$
38. $\frac{(m + n)x - (a - b)}{(m - n)x - (a + b)} = \frac{(m + n)x + a + c}{(m - n)x + a - c}$
39. $(a + b)(ax + b)(a - bx) = (a^2x - b^2)(a + bx)$
40. $\frac{(x - a)(x - b)}{x - a - b} = \frac{(x - c)(x - d)}{x - c - d}$
41. $\frac{a}{x - b} + \frac{b}{x - a} = \frac{2p}{x - p}, (2p = a + b)$
42. $\frac{1}{x + a} + \frac{1}{x + b} - \frac{1}{x + a + b} + \frac{1}{x + 2b} = 0$
43. $\frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 3x + 4} = \frac{x^3 - 3x^2 - 2x + 5}{x^3 + 3x^2 + 2x + 5}$

- $$44. \quad \frac{x+a}{x+b} = \frac{2x-a+b}{2x+a-b}$$
- $$45. \quad (x+3a)(x-5a)(x^2-16a^2) = 180a^4$$
- $$46. \quad \frac{x^2+ax+a^2}{x+a} + \frac{x^2+bx+b^2}{x+b} = a+b$$
- $$47. \quad (6-x)^3 + (4-x)^3 = (10-2x)^3$$
- $$48. \quad b^2x^2(x-b) - a^2x^2(x-a) = a^2b^2(a-b)$$
- $$49. \quad (x-a)(x-b)(x-c) = (b+c)(c+a)(a+b)$$
- $$50. \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x}, a+b \neq 0$$
- $$51. \quad \frac{bc(ax-1)}{a(b+c)} + \frac{ca(bx-1)}{b(c+a)} + \frac{ab(cx-1)}{c(a+b)} = 3$$
- $$52. \quad \frac{x^3+a^3}{x+a} + \frac{x^3+b^3}{x+b} = 2(x^2-ab)$$
- $$53. \quad \frac{x-b}{(x-b)^2} + \frac{x-a}{(x-a)^2} = \frac{a}{(x-a)^2} + \frac{b}{(x-b)^2}$$
- $$54. \quad \frac{x+a-1}{x} + \frac{1}{a} = \frac{x}{x+a-1} + a$$
- $$55. \quad (x+a)^2 + (a-b)^2 = 2bx + 2a^2$$
- $$56. \quad \frac{ax+b}{b-x} + \frac{bx+a}{a-x} = \frac{(a+b)(x+2)}{a+b-x}$$
- $$57. \quad a^3(b-c)(x-b)(x-c) + b^3(c-a)(x-c)(x-a) + c^3(a-b)(x-a)(x-b) = 0$$
- $$58. \quad (12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 5$$
- $$59. \quad \frac{1(x+1)(x-3)}{5(x+2)(x-4)} + \frac{1(x+3)(x-5)}{9(x+4)(x-6)} + \frac{2(x+5)(x-7)}{13(x+6)(x-8)} = \frac{92}{585}$$
- $$60. \quad x^3 + 3ax^2 + 3(a^2-bc)x + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$
- $$61. \quad 1+x^4 = 7(1+x)^4$$
- $$62. \quad \left\{ (x^2+x+1)^3 - (x^2+1)^3 - x^3 \right\} \left\{ x^2-x+1)^3 - (x^2+1)^3 + x^3 \right\} \\ = 3 \left\{ (x^4+x^2+1)^3 - (x^4+1)^3 - x^6 \right\}$$
- $$63. \quad \frac{p-a}{x-a} = 1 + \frac{x-p}{p(x-b)}$$

สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า 2 ตัว (กำลังสูงเป็น 2)

สมการประเภทนี้มีมากมายแบบด้วยกัน และสามารถใช้การแก้หาคำที่ต้องการได้หลายวิธี ก่อนอื่นจะได้กล่าวถึงวิธีตามที่เรามีในแบบเรียนของเราโดยแบ่งวิธีแก้ได้เป็น 2 วิธี ดังนี้คือ

1. โดยการแทนค่า

Ex. จงแก้สมการ

$$x + y = 1 \quad (1)$$

$$3x^2 - xy + y^2 = 37 \quad (2)$$

Solve จาก (1) $y = 1 - x$ แทนใน (2)

$$3x^2 - x(1 - x) + (1 - x)^2 = 37$$

$$3x^2 - x + x^2 + 1 - 2x + x^2 = 37$$

$$5x^2 - 3x - 36 = 0$$

$$(5x + 12)(x - 3) = 0$$

$$x = -\frac{12}{5}, 3$$

$$y = 1 + \frac{12}{5}, 1 - 3$$

$$= \frac{17}{5}, -2$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -2\frac{2}{5}, 3 \\ y = 3\frac{2}{5}, -2 \end{array} \right\}$$

Ans

2. โดยการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

Ex. จงแก้สมการ

$$x^2 + y^2 = 89 \quad (1)$$

$$xy = 40 \quad (2)$$

Solve $(2) \times 2 \quad 2xy = 80 \quad (3)$

$$(1) + (3) \quad x^2 + 2xy + y^2 = 169$$

$$x + y = \pm 13 \quad (4)$$

$$(1) - (3) \quad x^2 - 2xy + y^2 = 9$$

$$x - y = \pm 3 \quad (5)$$

$$\frac{(4) + (5)}{2};$$

$$\frac{(4) - (5)}{2};$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \pm 8, \pm 5 \\ y &= \pm 5, \pm 8 \end{aligned} \right\}$$

Ans

3. โดยการแยกแฟกเตอร์ แล้วหารกันก่อน ถ้าสองสมการมีแฟกเตอร์ร่วม

Ex. จงแก้สมการ

$$x^2 - 2xy = 27 \quad (1)$$

$$xy - 2y^2 = 9 \quad (2)$$

Solve จาก (1) จะได้ $x(x - 2y) = 27 \quad (3)$

จาก (2) จะได้ $y(x - 2y) = 9 \quad (4)$

$$(3) \div (4) \quad \frac{x}{y} = 3$$

$$x = 3y \quad \text{แทนใน (2)}$$

$$3y^2 - 2y^2 = 9$$

$$y^2 = 9$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} y &= \pm 3 \\ x &= \pm 9 \end{aligned} \right\}$$

Ans

4. โดยสมการหนึ่งแยกแฟกเตอร์หาค่าได้เลย แต่ติดกับสมการหนึ่งไม่ได้
ใช้แทนค่า

Ex. จงแก้สมการ

$$x^2 - xy + y^2 = 28 \quad (1)$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \quad (2)$$

Solve จาก (2) ได้ $(x + 2y)(x + y) = 0$

$$x = -2y, -y \text{ แทนใน (1)}$$

$$\text{ถ้า } x = -2y; 4y^2 + 2y^2 + y^2 = 28$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

$$x = \mp 4$$

$$\text{ถ้า } x = -y; y^2 + y^2 + y^2 = 28$$

$$3y^2 = 28$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \pm \frac{\sqrt{84}}{3}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{84}}{3}$$

$$x = \pm 4, \pm \frac{2\sqrt{21}}{3} \left\{ \right.$$

$$y = \mp 2, \mp \frac{2\sqrt{21}}{3} \left. \right\}$$

Ans

5. โดยใช้นิพจน์ XY

Ex. จงแก้สมการ

$$\frac{x}{y} + \frac{3y}{x} = \frac{7}{2} \quad (1)$$

$$(x + y)(x + 3y) = 15 \quad (2)$$

Solve จาก (1) ได้ $x^2 + 3y^2 = \frac{7}{2}xy$

จาก (2) ได้ $x^2 + 3y^2 + 4xy = 15$

จะได้ $\frac{7}{2}xy + 4xy = 15$

$$xy = 2 \quad (3)$$

และ $x^2 + 3y^2 = 7 \quad (4)$

จาก (3) ได้ $x = \frac{2}{y}$ แทนใน (4)

$$\frac{4}{y^2} + 3y^2 = 7$$

$$3y^4 - 7y^2 + 4 = 0$$

$$(3y^2 - 4)(y^2 - 1) = 0$$

$$y^2 = \frac{4}{3}, 1$$

$$y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}, \pm 1$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{3}, \pm 2$$

Ans

Ex. จงแก้สมการ

$$9x^2 + y^2 + 128 = 21(3x + y) \quad (1)$$

$$xy = 4 \quad (2)$$

Solve จาก (2) ได้

$$6xy - 24 = 0 \quad (3)$$

$$(3) + (1) \quad 9x^2 + 6xy + y^2 + 104 = 21(3x + y)$$

$$(3x + y)^2 - 21(3x + y) + 104 = 0$$

$$\left\{ (3x + y) - 13 \right\} \left\{ (3x + y) - 8 \right\} = 0$$

จาก (2)

$$y = \frac{4}{x}$$

$$\text{ถ้า } 3x + y = 13 ; 3x + \frac{4}{x} = 13$$

$$x = \frac{1}{3}, 4$$

$$\therefore y = 12, 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2, 4$$

$$\therefore y = 12, 6, 2, 1$$

$$\text{ถ้า } 3x + y = 8 ; 3x + \frac{4}{x} = 8$$

$$x = \frac{2}{3}, 2$$

$$y = 6, 2$$

Ans

๘. โดยการสมมติหาค่าเหมือน

Ex. จงแก้สมการ

$$\frac{x-2y}{2x-y} + \frac{2x-y}{x-2y} = \frac{26}{5} \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = 90 \quad (2)$$

Solve ให้ $\frac{x-2y}{2x-y} = m$

$$\therefore \frac{2x-y}{x-2y} = \frac{1}{m}$$

จาก (1) $m + \frac{1}{m} = \frac{26}{5}$

$$m = \frac{1}{5}, 5$$

ถ้า $m = \frac{1}{5}$,

$$\frac{x-2y}{2x-y} = \frac{1}{5}$$

$$5x - 10y = 2x - y$$

$$x = 3y \quad \text{แทนใน (2)}$$

$$9y^2 + y^2 = 90$$

$$y = \pm 3$$

$$\therefore x = \pm 9$$

ถ้า $m = 5$;

$$\frac{x-2y}{2x-y} = 5$$

$$x - 2y = 10x - 5y$$

$$y = 3x \quad \text{แทนใน (2)}$$

$$x^2 + 9x^2 = 90$$

$$x = \pm 3$$

$$\therefore y = \pm 9$$

$$\therefore x = \pm 9, \pm 3 \}$$

$$\therefore y = \pm 3, \pm 9 \}$$

Ans

7. โดยการหารกันและคูณไขว้

Ex. จงแก้สมการ

$$7y^2 + 15xy = -68 \quad (1)$$

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = 17 \quad (2)$$

Solve (1) $\div$ (2) $\frac{7y^2 + 15xy}{x^2 + 2xy + 2y^2} = -4$

$$7y^2 + 15xy = -4x^2 - 8xy - 8y^2$$

$$15y^2 + 23xy + 4x^2 = 0$$

$$(5y + x)(3y + 4x) = 0$$

$$y = -\frac{x}{5}, -\frac{4x}{3}$$

ถ้า $y = -\frac{4x}{3}$, $\frac{112x^2}{9} - 20x^2 = -68$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

ถ้า $y = -\frac{x}{5}$, $\frac{7x^2}{25} - 3x^2 = -68$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

$$\therefore y = \mp 1$$

$$\therefore x = \pm 5, \pm 3 \left\{ \right.$$

$$\therefore y = \mp 1, \mp 4 \left. \right\}$$

Ans

สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า 2 ตัว (กำลังสูงกว่า 2)

การแก้สมการแบบนี้อาศัยที่จะทำให้กำลังเป็นแค่ 2 แล้วใช้วิธีทั้ง 7 วิธี ที่กล่าวแล้ว แก้สมการหาค่าที่ถูกต้อง วิธีที่ใช้มีดังนี้

1. ด้านสมการกำลัง 3 กับตัวประกอบ อาศัยสูตร

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ex. จงแก้สมการ

$$x^3 + y^3 = 189 \quad (1)$$

$$x + y = 9 \quad (2)$$

Solve (1) $\div$ (2) $x^2 - xy + y^2 = 21 \quad (3)$

(2)² $x^2 + 2xy + y^2 = 81 \quad (4)$

(4) - (3) $3xy = 60$

$$xy = 20$$

$$x = \frac{20}{y} \quad \text{แทนใน (2)}$$

$$\frac{20}{y} + y = 9$$

$$\therefore y = 5, 4$$

$$\therefore x = 4, 5$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 5, 4 \\ y = 4, 5 \end{array} \right\}$$

Ans

2. การดำเนินการกำลังสามกับการคูณ $XY \pm XY$ อาศยสูตร

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ex. จงแก้สมการ $x^3 + y^3 = 91$ (1)

$$xy(x + y) = 84 \quad (2)$$

Solve (2) $\times 3$ $3xy^2 + 3x^2y = 252$ (3)

$$(1) + (3) \quad x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + y^3 = 343$$

$$(x + y)^3 = 7^3$$

$$x + y = 7 \quad (4)$$

$$(2) \div (4) \quad xy = 12$$

$$x = \frac{12}{y}$$

$$\frac{12}{y} + y = 7$$

$$y = 3, 4$$

$$\therefore x = 4, 3$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3, 4 \\ y = 4, 3 \end{array} \right\}$$

Ans

3. ถ้าให้สมการกำลัง 4 กับตัวประกอบ

Ex. จงแก้สมการ

$$x^2 - xy + y^2 = 13 \quad (1)$$

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 273 \quad (2)$$

Solve จาก (2) $(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2 = 273$

$$(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = 273$$

$$(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = 273 \quad (3)$$

$$(3) \div (1) \quad x^2 + xy + y^2 = 21 \quad (4)$$

$$\frac{(1) + (4)}{2} \quad x^2 + y^2 = 17 \quad (5)$$

$$(4) - (1) \quad 2xy = 8 \quad (6)$$

$$(5) + (6) \quad x^2 + 2xy + y^2 = 25$$

$$x + y = \pm 5 \quad (7)$$

$$(5) - (6) \quad x^2 - 2xy + y^2 = 9$$

$$x - y = \pm 3 \quad (8)$$

$$\frac{(7) + (8)}{2} \quad x = \pm 4, \pm 1$$

$$\therefore y = \pm 1, \pm 4$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} x = \pm 4, \pm 1 \\ y = \pm 1, \pm 4 \end{array} \right\} \quad \text{Ans}$$

4. โดยสมมติพจน์ที่เหมือน

Ex. จงแก้สมการ

$$(x^2 + y^2)(x + y) = 15 \quad (1)$$

$$x + x^2 + y + y^2 = 8 \quad (2)$$

Solve ให้ $x^2 + y^2 = m$

$$x + y = n$$

$$\text{จาก (1) ได้ } mn = 15 \quad (3)$$

$$m + n = 8 \quad (4)$$

จาก (3) และ (4) แก้สมการ
โดยการแทนค่าได้

$$n = 3, 5$$

และ

$$m = 5, 3$$

ถ้า $m = 5, n = 3$;

$$x^2 + y^2 = 5 \quad (5)$$

$$x + y = 3 \quad (6)$$

จาก (6)

$$x = 3 - y \text{ แทนใน (5);}$$

$$(3 - y)^2 + y^2 = 5$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$(y - 2)(y - 1) = 0$$

$$y = 2, 1$$

$$x = 1, 2$$

ถ้า $m = 3, n = 5$;

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 3 \\ x + y = 5 \end{array} \right\} \text{Impossible}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1, 2 \\ y = 2, 1 \end{array} \right\}$$

Ans

สมการ Symmetric (Symmetric Pairs of Equations)

สมการ 2 สมการที่มี x, y เป็นตัวแปรจะเป็น Symmetric ถ้ามันไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ x เข้าไปแทน y และ y เข้าไปแทน x คือเป็นเป็นตัวอย่างสมการที่เป็น Symmetric

$$\text{a) } \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 3x + 3y = 0 \\ x^2y^2 + xy + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 = 2x + 3y \\ y^2 = 2y + 3x \end{cases}$$

สมการ Symmetric มีอยู่ด้วยกัน 2 แบบ

1. เหมือนกับ (a) สมการพวกนี้แต่ละสมการจะไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ x เข้าไปแทน y และ y เข้าไปแทน x
2. เหมือนกับ (b) สมการ 2 สมการจะเปลี่ยนที่กัน เมื่อ x เข้าไปแทน y และ y เข้าไปแทน x .

สมการ Symmetric แบบที่ 1

ตัวอย่างที่ง่ายที่สุดของแบบนี้คือ $x + y = a, xy = b$ สมการชนิดนี้อาจแก้ได้ด้วยวิธีดังนี้

$$\text{Ex.} \quad \begin{array}{rcl} x + y & = & 5 \quad (1) \end{array}$$

$$xy = 6 \quad (2)$$

$$\text{Solve} \quad (1)^2 \quad x^2 + 2xy + y^2 = 25 \quad (3)$$

$$(2) \times 4 \quad 4xy = 24 \quad (4)$$

$$(3) - (4) \quad x^2 - 2xy + y^2 = 1 \quad (5)$$

$$\text{จาก (5) ได้} \quad x - y = 1 \quad (6)$$

$$\text{หรือ} \quad x - y = -1 \quad (7)$$

จาก (1), (6) ได้ $x = 3, y = 2$; และจาก (1), (7) ได้ $x = 2, y = 3$

$$\begin{cases} x = 3, 2 \\ y = 2, 3 \end{cases}$$

Ans

สมการ Symmetric แบบที่ 1 ที่ยากขึ้นไปกว่านั้น เราอาจจะเปลี่ยนรูปให้เป็น $x + y$ และ xy แล้วค่อยแก้สมการ หรืออาจจะสมมติ $x = u + v, y = u - v$ แล้วหาค่า u และ v

Ex. $2x^2 + 5xy + 2y^2 + x + y + 1 = 0$ (1)

$x^2 + 4xy + y^2 + 12x + 12y + 10 = 0$ (2)

Solve แทน $x^2 + y^2$ ด้วย $(x + y)^2 - 2xy$

จาก (1) $2(x + y)^2 + xy + (x + y) + 1 = 0$ (3)

จาก (2) $(x + y)^2 + 2xy + 12(x + y) + 10 = 0$ (4)

$\left\{ (3) \times 2 \right\} - (4) \quad 3(x + y)^2 - 10(x + y) - 8 = 0$ (5)

จาก (5) จะได้ $x + y = 4$ (6)

หรือ $x + y = -\frac{2}{3}$ (7)

เอา $x + y$ ใน (6) ไปแทนใน (3) ได้ $xy = -37$ (8)

เอา $x + y$ ใน (7) แทนใน (3) ได้ $xy = -\frac{11}{9}$ (9)

จาก (6), (8) และ (7), (9) เราหาได้ว่า

$x, y = 2 \pm \sqrt{41}, 2 \mp \sqrt{41}; \frac{-1 \pm 2\sqrt{3}}{3}, \frac{-1 \mp 2\sqrt{3}}{3}$

Ex. $x^4 + y^4 = 97$ (1)

$x + y = 5$ (2)

Solve ใน (1) และ (2) แทน x ด้วย $u + v, y$ ด้วย $u - v$

จะได้ $(u + v)^4 + (u - v)^4 = 97$ (3)

$2u = 5$ (4)

จาก (3), (4) ถ้าจัด u ได้ $16v^4 + 600v^2 - 151 = 0$ (5)

จาก (5) ได้ $v = \pm \frac{1}{2} \text{ or } \pm \frac{i\sqrt{151}}{2}$ (6)

จาก (4), (6) เราหาได้

$$\left. \begin{aligned} x &= 2, 3, \frac{5 \pm i\sqrt{151}}{2} \\ y &= 3, 2, \frac{5 \mp i\sqrt{151}}{2} \end{aligned} \right\} \text{Ans}$$

N.B. วิธีข้างบนนี้อาจจะใช้กับสมการ Symmetric ที่มี x และ $-y$ เป็นตัวแปร หรือ function ใดๆ ของ x และ y เช่น

$x^4 + y^4 = a, x - y = b$ อาจเขียนได้

$x^4 + (-y)^4 = a; x + (-y) = b$

สมการ Symmetric แบบที่ 2

Ex. $x^3 = 7x + 3y$ (1)

$y^3 = 7y + 3x$ (2)

Solve (1) + (2) $x^3 + y^3 = 10(x + y)$ (3)

(1) - (2) $x^3 - y^3 = 4(x - y)$ (4)

จาก (3) แปลงเป็น 2 สมการได้

$x + y = 0$ (5)

$x^2 - xy + y^2 = 10$ (6)

จาก (4) แปลงเป็น 2 สมการได้

$x - y = 0$ (7)

$x^2 + xy + y^2 = 4$ (8)

จาก (5), (7); (5), (8); (6), (7); (6), (8); เราได้ $x, y = 0, 0; 2, -2;$

$-2, 2; \pm \sqrt{10} \pm \sqrt{10}; \frac{(1 \pm \sqrt{13})}{2}, \frac{(1 \mp \sqrt{13})}{2}$
 $\frac{(-1 \pm \sqrt{13})}{2}, \frac{(-1 \mp \sqrt{13})}{2}$ Ans

Problem.

64. $x^4 + y^4 = 82,$ 68. $x^4 + y^4 - (x^2 + y^2) = 72,$

$x - y = 2.$ $x^2 + x^2 y^2 + y^2 = 19,$

65. $x^5 + y^5 = 32,$ 69. $x^2 y + x y^2 = 30,$

$x + y = 2.$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{10}$

66. $x + y = \frac{1}{2},$ 70. $x^2 + 3xy + y^2 + 2x + 2y = 8,$

56. $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 113 = 0.$ $2x^2 + 2y^2 + 3x + 3y = 14$

67. $xy + x + y + 19 = 0,$ 71. $x^3 = 5y$

$x^2 y + x y^2 + 20 = 0.$ $y^3 = 5x$

สมการตัวไม่ทราบค่า 2 ตัว ซึ่งอาจแก้ได้ด้วยการแยกแฟกเตอร์, การบวก หรือ การลบ

1. เมื่อสมการหนึ่งแยกตัวประกอบได้

ก. เมื่อสมการหนึ่งอยู่ใน form.

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$$

ข. เมื่อสมการหนึ่งลดรูปได้เป็น

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{เมื่อ } x \text{ แทน function ของ } x, y)$$

Ex. $x^2 + y^2 + x - 11y - 2 = 0$ (1)

$$x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$$
 (2)

Solve (2) แยกตัวประกอบได้ $(x - 2y)(x - 3y) = 0$

$$x = 2y$$
 (3)

$$x = 3y$$
 (4)

จาก (1), (3) และ (1), (4) เราได้

$$\left. \begin{aligned} x &= 4, -\frac{2}{5}, 3, -\frac{3}{5} \\ y &= 2, -\frac{1}{5}, 1, -\frac{1}{5} \end{aligned} \right\}$$

Ans

Ex. $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 3x + 3y - 2 = 0$ (1)

$$3x^2 - 32y^2 + 5 = 0$$
 (2)

Solve จาก (1) $2(x + y)^2 + 3(x + y) - 2 = 0$

ได้ $x + y = \frac{1}{2}$ (3)

หรือ $x + y = -2$ (4)

จาก (2), (3) และ (2), (4) ได้

$$\left. \begin{aligned} x &= 1, \frac{3}{29}, -3, -\frac{41}{29} \\ y &= -\frac{1}{2}, \frac{23}{58}, 1, -\frac{17}{29} \end{aligned} \right\}$$

Ans

2. เมื่อต้องบวก หรือลบสมการทั้ง 2 ก่อนจึงจะแยกตัวประกอบได้

วิธีนี้ใช้ได้เสมอเมื่อสมการทั้ง 2 อยู่ใน form $ax^2 + bxy + cy^2 = d$.

Ex. $6x^2 - xy - 2y^2 = 56$ (1)

$5x^2 - xy - y^2 = 49$ (2)

Solve รวม (1) กับ (2) เข้าด้วยกันเพื่อขจัดเทอมที่เป็นค่าคงที่

(1) $\times 7$, $42x^2 - 7xy - 14y^2 = 392$ (3)

(2) $\times 8$, $40x^2 - 8xy - 8y^2 = 392$ (4)

(3) $-$ (4) $2x^2 + xy - 6y^2 = 0$ (5)

จาก (5) $(2x - 3y)(x + 2y) = 0$

$\therefore x = \frac{3y}{2}$ (6)

$\therefore x = -2y$ (7)

จาก (2), (6) ได้

$x = \pm \frac{21}{\sqrt{35}}$

$y = \pm \frac{14}{\sqrt{35}}$

จาก (2), (7) ได้

$x = \mp \frac{2\sqrt{21}}{3}$

$y = \pm \frac{\sqrt{21}}{3}$

$$\left. \begin{aligned} x &= \pm \frac{21}{\sqrt{35}}, y = \pm \frac{14}{\sqrt{35}} \\ x &= \mp \frac{2\sqrt{21}}{3}; y = \pm \frac{\sqrt{21}}{3} \end{aligned} \right\}$$

Ans

Ex. $2x^2 + 4xy - 2x - y + 2 = 0$ (1)

$3x^2 + 6xy - x + 3y = 0$ (2)

Solve $[(2) \times 2] - [(1) \times 3] \quad 4x + 9y - 6 = 0$ (3)

จาก (2) และ (3)

$$\left. \begin{aligned} x &= -3, -2 \\ y &= 2, \frac{14}{9} \end{aligned} \right\}$$

Ans

Ex. $x^2 - 3xy + 2y^2 + 4x + 3y - 1 = 0$ (1)

$2x^2 - 6xy + y^2 + 8x + 2y - 3 = 0$ (2)

Solve $[(1) \times 2] - (2) \quad 3y^2 + 4y + 1 = 0$ (3)

หาค่า y จาก (3) แล้วนำ y ไปแทนใน (1) จะได้

$$x = \frac{1}{3}, -\frac{16}{3}, \frac{-7 \pm \sqrt{57}}{2}$$

$$y = -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -1$$

Ans

Ex. $x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x = 0$ (1)

$xy + y^2 + 3y + 1 = 0$ (2)

Solve $[(2) \times 2] + (1) \quad (x + 2y)^2 + 3(x + 2y) + 2 = 0$ (3)

จาก (3) $x + 2y = -1$ (4)

หรือ $x + 2y = -2$ (5)

จาก (2), (4) และ (2), (5) ได้

$$x = -3 \pm \sqrt{2}, -3 \pm \sqrt{5},$$

$$y = 1 \mp \sqrt{2}, \frac{(1 \mp \sqrt{5})}{2}$$

Ans

3. เมื่อต้องการจัด X หรือ Y ก่อนจึงจะแยกตัวประกอบได้

$$\text{Ex. } 10x^2 + 5y^2 - 27x - 4y + 5 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 - 3x - y = 0 \quad (2)$$

$$\text{Solve (1) - [(2) \times 5] } 5x^2 - 12x + y + 5 = 0$$

$$y = -5x^2 + 12x - 5 \quad (3)$$

$$\text{แทนค่า (3) ใน (2) } 5x^4 - 24x^3 + 40x^2 - 27x + 6 = 0 \quad (4)$$

$$\text{จาก (4) } (x-1)(x-2)(5x^2 - 9x + 3) = 0 \quad (5)$$

$$\text{จาก (5) } x = 1, 2, \frac{(9 \pm \sqrt{21})}{10} \quad (6)$$

$$\text{แทนค่า (6) ใน (3) } y = 2, -1, \frac{(7 \pm 3\sqrt{21})}{10} \quad \text{Ans}$$

Problem

จงแก้สมการต่อไปนี้

$$72. x^2 + y^2 - 3x + 2y - 39 = 0$$

$$3x^2 - 17xy + 10y^2 = 0$$

$$73. y^2 - x^2 - 5 = 0$$

$$4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y = 3$$

$$74. x^2 + 5xy - 2x + 3y + 1 = 0$$

$$3x^2 + 15xy - 7x + 8y + 4 = 0$$

$$75. x^2 - 15xy - 3y^2 + 2x + 9y = 98$$

$$5xy + y^2 - 3y = -21$$

$$76. 2x^2 + 3xy - 4y^2 = 25$$

$$15x^2 + 24xy - 31y^2 = 200$$

$$77. x(x + 3y) = 18$$

$$x^2 - 5y^2 = 4$$

$$78. x^2 - 3xy + 3y^2 = x^2y^2$$

$$7x^2 - 10xy + 4y^2 = 12x^2y^2$$

$$79. x^2 + xy + y^2 = 38$$

$$x^2 - xy + y^2 = 14$$

$$80. x^2 - xy + y^2 = 21(x - y)$$

$$xy = 20$$

$$81. x^2 + y - 8 = 0$$

$$y^2 + 15x - 46 = 0$$

สมการควมไม่ทราบค่า 2 ตัวที่น่าสนใจพร้อมวิธีแก้

$$\text{Ex.} \quad \frac{x}{y+a} + \frac{y}{x+a} = 1 \quad (1)$$

$$\quad \quad \quad x + y = 2a \quad (2)$$

$$\text{Solve} \quad \text{ให้} \quad x - y = 2m$$

$$\therefore \quad x = a + m$$

$$y = a - m$$

$$\text{แทนใน (1)} \quad \frac{a+m}{2a-m} + \frac{a-m}{2a+m} = 1$$

$$2a^2 + m^2 + 3ma + 2a^2 + m^2 - 3ma = 4a^2 - m^2$$

$$m = 0$$

$$\therefore x = y = a \quad \text{Ans}$$

$$\text{Ex.} \quad \frac{x-a}{c-a} + \frac{y-b}{c-b} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{x+a}{c} + \frac{y-a}{a-b} = \frac{a}{c} \quad (2)$$

$$\text{Solve จาก (1); } x(c-b) - a(c-b) + y(c-a) - b(c-a) = (c-a)(c-b)$$

$$x(c-b) + y(c-a) - ac + ab - bc + ab = c^2 - ac - bc + ab$$

$$x(c-b) + y(c-a) = c^2 - ab \quad (3)$$

$$\text{จาก (2); } x(a-b) + a(a-b) + c(y-a) = a(a-b)$$

$$x(a-b) + cy - ac = 0$$

$$x(a-b) + cy = ac \quad (4)$$

$$(3) \times c; \quad xc(c-b) + cy(c-a) = c(c^2 - ab)$$

$$xc^2 - bcx + c^2y - acy = c^3 - abc \quad (5)$$

$$(4) \times (c-a); \quad x(a-b)(c-a) + cy(c-a) = ac(c-a)$$

$$x(ac - bc - a^2 + ab) + c^2y - acy = ac^2 - a^2c$$

$$axc - bcx - a^2x + abx + c^2y - acy = ac^2 - a^2c \quad (6)$$

$$(5) - (6); \quad xc^2 - acx + a^2x - abx = c^3 - ac^2 + a^2c - abc$$

$$x(c^2 - ac + a^2 - ab) = c(c^2 - ac + a^2 - ab)$$

แทนค่า x ใน (4)

$$\begin{cases} x = c \\ y = b \end{cases} \quad \text{Ans}$$

$$\text{Ex.} \quad x^4 + y^4 = 97 \quad (1)$$

$$x + y = 5 \quad (2)$$

$$\text{Solve 1} \quad \text{จาก (2)} \quad (x+y)^4 = 625$$

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = 625 \quad (3)$$

$$(3)-(1) \quad 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 = 528$$

$$2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 = 264$$

$$xy(2x^2 + 3xy + 2y^2) = 264$$

$$xy \left\{ 2(x+y)^2 - xy \right\} = 264 \quad (4)$$

$$\text{จาก (2)} \quad x + y = 5 \text{ แทนค่าใน (4)}$$

$$xy \left\{ 2(25) - xy \right\} = 264$$

$$50xy - x^2y^2 = 264$$

$$x^2y^2 - 50xy + 264 = 0$$

$$(xy-44)(xy-6) = 0$$

$$xy = 44 \quad (5)$$

$$xy = 6 \quad (6)$$

$$\text{จาก (3) และ (5)}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{5 \pm \sqrt{-151}}{2} \\ y &= \frac{5 \mp \sqrt{-151}}{2} \end{aligned} \right\} \text{Ans}$$

$$\text{จาก (3) และ (6)}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 3, 2 \\ y &= 2, 3 \end{aligned} \right\} \text{Ans}$$

$$\text{Ex.} \quad x^4 + y^4 = 97 \quad (1)$$

$$x + y = 5 \quad (2)$$

$$\text{Solve 2 ให้} \quad x - y = z \quad (7)$$

$$\text{จาก (2)} \quad x + y = 5 \quad (8)$$

$$(7) + (8) \quad 2x = 5 + z$$

$$x = \frac{5 + z}{2}$$

$$(7) - (8) \quad 2y = 5 - z$$

$$y = \frac{5 - z}{2}$$

แทนค่า x, y ใน (3)

$$\left(\frac{5+z}{2}\right)^4 + \left(\frac{5-z}{2}\right)^4 = 97$$

$$(5+z)^4 + (5-z)^4 = 97 \times 2^4$$

$$5^4 + 4 \cdot 5^3 z + 6 \cdot 5^2 z^2 + 4 \cdot 5 z^3 + z^4 + 5^4 - 4 \cdot 5^3 z + 6 \cdot 5^2 z^2 - 4 \cdot 5 z^3 + z^4 = 97 \times 2^4$$

$$2(5^4 + 6 \cdot 5^2 z^2 + z^4) = 97 \cdot 2^4$$

$$5^4 + 6 \cdot 5^2 z^2 + z^4 = 97 \cdot 8$$

$$625 + 150z^2 + z^4 = 776$$

$$z^4 + 150z^2 - 151 = 0$$

$$(z^2 - 1)(z^2 + 151) = 0$$

$$z^2 = 1, -151$$

$$z = \pm 1, \pm \sqrt{-151}$$

$$\therefore x = \frac{5 \pm 1}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{-151}}{2}$$

$$\therefore y = \frac{5 \mp 1}{2}, \frac{5 \mp \sqrt{-151}}{2}$$

$$x = 3, 2, \frac{5 \pm \sqrt{-151}}{2}$$

$$y = 2, 3, \frac{5 \mp \sqrt{-151}}{2}$$

Ans

$$\text{Ex.} \quad \frac{x+y}{2x-y} + \frac{x+2y}{x-y} = 8\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$2x^2 + 3y^2 = 270 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Solve จาก (1)} \quad & \frac{(x+y)(x-y) + (x+2y)(2x-y)}{(2x-y)(x-y)} = \frac{33}{4} \\ & 4(x^2 - y^2 + 2x^2 + 3xy - 2y^2) = 33(2x^2 - 3xy + y^2) \\ & 4x^2 - 4y^2 + 8x^2 + 12xy - 8y^2 = 66x^2 - 99xy + 33y^2 \\ & 54x^2 - 111xy + 45y^2 = 0 \\ & 18x^2 - 37xy + 15y^2 = 0 \\ & (2x-3y)(9x-5y) = 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{3y}{2} \quad (3)$$

$$x = \frac{5y}{9} \quad (4)$$

$$\text{จาก (2) และ (3)} \quad \left. \begin{aligned} \therefore y &= \pm 6 \\ \therefore x &= \pm 9 \end{aligned} \right\} \text{Ans}$$

$$\begin{aligned} \text{จาก (2) และ (4)} \quad & y = \frac{\pm 27\sqrt{30}}{\sqrt{293}} \\ & x = \frac{\pm 15\sqrt{30}}{\sqrt{293}} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} y &= \frac{\pm 27\sqrt{30}}{\sqrt{293}} \\ x &= \frac{\pm 15\sqrt{30}}{\sqrt{293}} \end{aligned}} \right\} \text{Ans}$$

Ex. $\frac{x}{y} + \frac{3y}{x} = \frac{7}{2}$ (1)

$$(x+y)(x+3y) = 15 \quad (2)$$

Solve จาก (1) $\times xy$; $x^2 + 3y^2 = \frac{7xy}{2}$ (3)

จาก (2) $x^2 + 4xy + 3y^2 = 15$ (4)

แทนค่า $x^2 + 3y^2$ ใน (4) จาก (3)

$$\frac{7xy}{2} + 4xy = 15$$

$$15xy = 30$$

$$x = \frac{2}{y}$$

แทนใน (1) $\frac{2}{y^2} + \frac{3y^2}{2} = \frac{7}{2}$

$$3y^4 - 7y^2 + 4 = 0$$

$$(3y^2 - 4)(y^2 - 1) = 0$$

$$y^2 = \frac{4}{3}, 1$$

$$y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \pm 1$$

$$x = \pm \sqrt{3}, \pm 2$$

$$y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \pm 1$$

Ans

Problem

จงแก้สมการ

82. $x^2 + y^2 = 61$ $y + \frac{1}{x} = 4$
 $x^3 - y^3 = 91$

83. $3x^2 + xy - y^2 + x - 2y - 2 = 0$ 85. $x^2 + 2xy + 10y^2 = 145$

$y^2 + 2xy - 3x^2 = 0$ $xy + y^2 = 24$

84. $x + \frac{1}{y} = 1$ 86. $\frac{bx+cy}{a} = \frac{cx+ay}{b} = \frac{ax+by}{c}$

$$\text{Ex.} \quad \frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1} = 1 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = 2 \quad (2)$$

$$\text{Solve จาก (1)} \quad x^2(y+1) + y^2(x+1) = (x+1)(y+1)$$

$$x^2y + x^2 + xy^2 + y^2 = xy + x + y + 1 \quad (3)$$

$$\text{แทนค่า (2) ใน (3)} \quad x^2y + xy^2 + 2 = xy + x + y + 1$$

$$x^2y + xy^2 - xy - x - y + 1 = 0$$

$$xy(x+y-1) - (x+y-1) = 0$$

$$(x+y-1)(xy-1) = 0$$

$$\therefore x = 1 - y \quad (4)$$

$$x = \frac{1}{y} \quad (5)$$

$$\text{จาก (2) และ (4)} \quad \left. \begin{aligned} x &= \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \\ y &= \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \text{Ans}$$

$$\text{จาก (2) และ (5)} \quad \left. \begin{aligned} x &= \pm 1 \\ y &= \pm 1 \end{aligned} \right\} \text{Ans}$$

$$\text{Ex.} \quad (x-2)(y+1) = 4 \quad (1)$$

$$\text{และ} \quad (x+3)(y-2) = 6 \quad (2)$$

Solve ให้ $x-2 = a$, $y+1 = b$

$$\text{จาก (1)} \quad ab = 4$$

$$a = \frac{4}{b}$$

$$x+3 = (x-2) + 5 = a+5$$

$$y-2 = (y+1) - 3 = b-3$$

$$(a+5)(b-3) = 6 \quad (3)$$

$$\text{แทนค่า } a = \frac{4}{b} \text{ ใน (3)}$$

$$\left(\frac{4}{b} + 5\right)(b-3) = 6$$

$$5b - \frac{12}{b} - 17 = 0$$

$$5b^2 - 17b - 12 = 0$$

$$(5b+3)(b-4) = 0$$

$$b = -\frac{3}{5}, 4$$

$$a = -\frac{20}{3}, 1$$

$$x-2 = -\frac{20}{3}, 1$$

$$x = -\frac{14}{3}, 3 \quad \text{Ans}$$

$$y+1 = -\frac{3}{5}, 4$$

$$y = -\frac{8}{5}, 3 \quad \text{Ans}$$

$$\text{Ex.} \quad (a+b)x + ay = b^2 \quad (1)$$

$$ax - by = -a^2 \quad (2)$$

$$\text{Solve} \quad \text{จาก (1)} \times b, \quad b(a+b)x + aby = b^3 \quad (3)$$

$$\text{จาก (2)} \times a, \quad a^2x - aby = -a^3 \quad (4)$$

$$(3) + (4) \quad b(a+b)x + a^2x = b^3 - a^3$$

$$x \{ ab + b^2 + a^2 \} = b^3 - a^3$$

$$x \{ a^2 + ab + b^2 \} = (b-a)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= b-a \\ \therefore y &= a \end{aligned} \quad \text{Ans}$$

$$\text{Ex.} \quad 4x^3 + 3x^2y + y^3 = 8 \quad (1)$$

$$2x^3 - 2x^2y + xy^2 = 1 \quad (2)$$

$$\text{Solve} \quad \text{ให้ } y = mx$$

$$\text{จาก (1)} \quad 4x^3 + 3mx^3 + m^3x^3 = 8 \quad (3)$$

$$\text{จาก (2)} \quad 2x^3 - 2mx^3 + m^2x^3 = 1 \quad (4)$$

$$(3) \div (4) \quad 4 + 3m + m^3 = 8 \quad (2-2m+m^2)$$

$$m^3 - 8m^2 + 19m - 12 = 0$$

$$\text{ให้ } m = 1, 3, 4$$

$$\therefore y = x, 3x, 4x$$

$$\begin{aligned} \text{แทนใน (1) ให้} \quad x &= 1, \frac{1}{\sqrt[3]{5}}, \frac{1}{\sqrt[3]{10}} \\ \therefore y &= 1, \frac{3}{\sqrt[3]{5}}, \frac{4}{\sqrt[3]{10}} \end{aligned} \quad \text{Ans}$$

Ex. $31x^2y^2 - 7y^4 - 112xy + 64 = 0$ (1)

$$x^2 - 7xy + 4y^2 + 8 = 0 \quad (2)$$

Solve จาก (2) $x^2 - 7xy + 4y^2 = -8$ (3)

แทน (3) ใน (1); $31x^2y^2 - 7y^4 + 14xy(x^2 - 7xy + 4y^2) + (x^2 - 7xy + 4y^2)^2 = 0$

$$31x^2y^2 - 7y^4 + (x^2 - 7xy + 4y^2)(14xy + x^2 - 7xy + 4y^2) = 0$$

$$31x^2y^2 - 7y^4 + (x^2 + 4y^2)^2 - (7xy)^2 = 0$$

จะได้ $x^4 - 10x^2y^2 + 9y^4 = 0$

ได้ $x = \pm y, \pm 3y$

แทนใน (2) จะได้ $\left. \begin{array}{l} x = \pm 2, y = \pm 2 \\ x = \pm \sqrt{-\frac{2}{3}}, y = \mp \sqrt{-\frac{2}{3}} \\ x = \pm 3, y = \pm 1 \\ x = \pm 3\sqrt{-\frac{4}{17}}, y = \mp \sqrt{-\frac{4}{17}} \end{array} \right\}$

Ans

Ex.

$$x^2 + y^2 + 5xy + 5 = 0 \quad (1)$$

$$2xy + x + y + 4 = 0 \quad (2)$$

Solve ให้ $x + y = u$ และ $xy = v$

จาก (1) $u^2 + 3v + 5 = 0$ (3)

จาก (2) $u + 2v + 4 = 0$ (4)

$$(3) \times 2 - (4) \times 3 \quad 2u^2 - 3u - 2 = 0$$

$$u = 2, -\frac{1}{2}$$

$$\therefore v = -3, -\frac{7}{4}$$

เมื่อ $x + y = 2, xy = -3$ ได้ $\left. \begin{array}{l} x = -1, 3 \\ y = 3, -1 \end{array} \right\}$

เมื่อ $x + y = -\frac{1}{2}, xy = -\frac{7}{4}$ ได้ $\left. \begin{array}{l} x = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{4} \\ y = \frac{-1 \mp \sqrt{29}}{4} \end{array} \right\}$ **Ans**

Ex. $x^3 - y^3 = 7$ (1)

$$x^2 + y^2 = 5 \quad (2)$$

Solve จาก (1) $(x-y)(x^2+xy+y^2) = 7$ (3)

จาก (2) $(x-y)^2 + 2xy = 5$ (4)

ให้ $x-y = m, \quad xy = n$

แทนใน (3), (4) $m(5+n) = 7$ (5)

$$2n = 5 - m^2 \quad (6)$$

แทน (6) ใน (5) $m(10+5-m^2) = 14$

$$m^3 - 15m + 14 = 0$$

ให้ $m = 1 \frac{-1 \pm \sqrt{57}}{2}$

$$= 1, 3.3, -4.3 \text{ Approx.}$$

$$\therefore n = 2, -2.9, -6.7 \text{ Approx.}$$

$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ xy &= 2 \\ x &= 2, -1 \\ y &= 1, -2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x - y &= 3.3 \\ xy &= -2.9 \\ x &= \frac{3.3 \pm \sqrt{-0.7}}{2} \\ y &= \frac{-3.3 \pm \sqrt{-0.7}}{2} \end{aligned}$	$\begin{aligned} x - y &= -4.3 \\ xy &= -6.7 \\ x &= \frac{-4.3 \pm \sqrt{-8.3}}{2} \\ y &= \frac{4.3 \pm \sqrt{-8.3}}{2} \end{aligned}$
---	---	--

Ans

Ex.

$$bx^3 = 10a^2bx + 3a^3y \quad (1)$$

$$ay^3 = 10ab^2y + 3b^3x \quad (2)$$

Solve จาก (1) $\times b^2$ $b^3x^3 = 10a^2b^3x + 3a^3b^2y \quad (3)$

จาก (2) $\times a^2$ $a^3y^3 = 10a^3b^2y + 3a^2b^3x \quad (4)$

(3) $\div$ (4) $\frac{b^3x^3}{a^3y^3} = \frac{a^2b^2(10bx+3ay)}{a^2b^2(10ay+3bx)}$

$$\begin{aligned} &= \frac{10 \frac{bx}{ay} + 3}{10 + 3 \frac{bx}{ay}} \end{aligned}$$

ให้ $m = \frac{bx}{ay} \quad \therefore m^3 = \frac{10m + 3}{10 + 3m}$

$$3m^4 + 10m^3 - 10m - 3 = 0$$

ได้ $m = \pm 1, -\frac{1}{3}, -3$

ถ้า $m = 1 \quad \therefore ay = bx, y = \frac{bx}{a}$

แทนใน (2) $a \left(\frac{bx}{a}\right)^3 = 10ab^2 \frac{bx}{a} + 3b^3x \quad (5)$

(5) $\times a^2$; $b^3x^3 - 10a^2b^3x - 3a^2b^3x = 0$

$$\left. \begin{aligned} x &= 0, \pm a\sqrt{\frac{13}{3}} \\ y &= 0, \pm b\sqrt{\frac{13}{3}} \end{aligned} \right\} \text{Ans}$$

ถ้า $m = -1 \quad \therefore y = -\frac{bx}{a}$

แทนใน (2) $-\frac{b^3x^3}{a^2} = -10b^3x + 3b^3x = -7b^3x \quad (6)$

(6) $\times a^2$, $7a^2b^3x - b^3x^3 = 0$, ให้ $x = 0, \pm a\sqrt{\frac{7}{3}}$ } Ans
 $y = 0, \mp b\sqrt{\frac{7}{3}}$

ถ้า $m = -\frac{1}{3} \quad \therefore y = -\frac{3bx}{a}$

แทนใน (2) $-\frac{27b^3x^3}{a^2} = -30b^3x + 3b^3x = -27b^3x \quad (7)$

(7) $\times a^2$, $x(27a^2b^3 - 27b^3x^2) = 0$ ให้ $x = 0, \pm a$ } Ans
 $y = 0, \mp 3b$

ถ้า $m = -3 \quad \therefore y = -\frac{bx}{3a}$

แทนใน (2) $-b^3x^3 = -90a^2b^3x + 81a^2b^3x = -9a^2b^3x$

$\therefore x(b^3x^2 - 9a^2b^3) = 0$, ให้ $x = 0, \pm 3a$ } Ans
 $y = 0, \mp b$

Ex. $6x^4 + x^2y^2 + 16 = 2x(12x+y^3)$ (1)

$$x^2 + xy - y^2 = 4$$
 (2)

Solve จาก (1) ; $(6x^4 + x^2y^2 - 2xy^3) - (4 \times 6x^2) + (4)^2 = 0$ (3)

แทนค่า(2)ใน(3) ; $(6x^4 + x^2y^2 - 2xy^3) - 6x^2(x^2 + xy - y^2) + (x^2 + xy - y^2)^2 = 0$

$$6x^4 + x^2y^2 - 2xy^3 - 6x^4 - 6x^3y + 6x^2y^2 + x^4 + x^2y^2 + y^4 + 2x^3y - 2x^2y^2 - 2xy^3 = 0$$

$$x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 = 0$$

$$\therefore (x-y)^4 = 0$$

$$x = y$$

แทนค่า x ใน (2)

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

$$x = \pm 2$$

Ans

$$\text{Ex.} \quad \frac{x^3 + y^3}{(x+y)^2} + \frac{x^3 - y^3}{(x-y)^2} = \frac{43x}{8} \quad (1)$$

$$5x - 7y = 4 \quad (2)$$

$$\text{Solve จาก (1)} \quad \frac{x^2 - xy + y^2}{x+y} + \frac{x^2 + xy + y^2}{x-y} = \frac{43x}{8}$$

$$\frac{x^3 - x^2y + xy^2 - x^2y + xy^2 - y^3 + x^3 + x^2y + xy^2 + x^2y + xy^2 + y^3}{x^2 - y^2} = \frac{43x}{8}$$

$$\therefore \frac{2x^3 + 4xy^2}{x^2 - y^2} = \frac{43x}{8}$$

$$x \text{ หักตลอด} \quad \therefore \frac{2x^2 + 4y^2}{x^2 - y^2} = \frac{43}{8}$$

$$16x^2 + 32y^2 = 43x^2 - 43y^2$$

$$27x^2 = 75y^2$$

$$x = \pm \frac{5}{3}y$$

$$\text{เมื่อ } x = \frac{5}{3}y$$

$$\text{แทนใน (2)} \quad \frac{25}{3}y - 7y = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 3 \\ x = \pm 5 \end{array} \right\} \text{Ans}$$

$$\text{เมื่อ } x = -\frac{5}{3}y$$

$$\text{แทนใน (2)} \quad -\frac{25}{3}y - 7y = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{6}{23} \\ x = \mp \frac{10}{23} \end{array} \right\} \text{Ans}$$

$$x \text{ หาทิ้ง 2 ข้าง จะได้ } x = 0 \text{ แทนใน (2) } y = -\frac{4}{7} \quad \text{Ans}$$

$$\text{Ex.} \quad \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{9}{2} \quad (1)$$

$$\frac{3}{x+y} = 1 \quad (2)$$

$$\text{Solve} \quad \text{จาก (1)} \quad 2(x^3 + y^3) = 9xy \quad (3)$$

$$\text{จาก (2)} \quad x + y = 3 \quad (4)$$

$$(3) \div (4) \quad 2x^2 - 2xy + 2y^2 = 3xy$$

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$$

$$x = \frac{y}{2}, 2y$$

แทนค่า $x = \frac{y}{2}$ ใน (4) ; $\frac{y}{2} + y = 3$	$\left. \begin{array}{l} \text{แทนค่า } x = 2y \text{ ใน (4)} \\ 2y + y = 3 \\ y = 1 \\ x = 2 \end{array} \right\} \text{Ans}$
$y = 2$	
$x = 1$	

$$\text{Ex.} \quad x^2 - 3y^2 + x - 3y + 30 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + x + y = 18 \quad (2)$$

$$\text{Solve} \quad \text{จาก (1)} \quad x^2 - 3y^2 + x - 3y = -30 \quad (3)$$

$$(3) - (2) \quad -4y^2 - 4y = -48$$

$$y^2 + y - 12 = 0$$

แทนค่าใน (2)	$y = (-4), (3)$	$\left. \begin{array}{l} x = (-3, 2), (-3, 2) \end{array} \right\} \text{Ans}$
	$x = (-3, 2), (-3, 2)$	

Problem

โจทย์สมการไม่ทราบค่า 2 ตัว, จงแก้สมการ

87. $x^4 + y^4 = 337$ $x + y = 7$
88. $\frac{2x-y}{x+y} + \frac{2y-x}{x+4y} = 7$ $x^2 + y^2 = 29$
89. $x^2 + y^2 = 5$ $2(x^2 - y^2) = 3xy$
90. $3x^2 + xy = 2x + 6$ $y^2 + 3xy = 2y - 3$
91. $2x^2 + 3xy = 26$, $3y^2 + 2xy = 39$
92. $x^2 + xy + 2x + y = 11$, $y^2 + xy + 2y + x = 7$
93. $x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5 = 1$, $x - y = 1$
94. $(x-y)^2 = 3-2x-2y$, $y(x-y+1) = x(y-x+1)$
95. $(x^2-y^2)(x-y) = \frac{5}{6xy}$, $(x^4-y^4)(x^2-y^2) = \frac{325}{36x^2y^2}$
96. จงหารากของสมการที่เป็นจำนวนตรรกยะ
- 1) $(x+y)(x^3+y^3) = 19$, $x^2 + y^2 = 13$
- 2) $x - y = 2$, $(x^2+y^2)(x^3-y^3) = 260$
97. $6x^4 + x^2y^2 + 16 = 2x(12x+y^3)$; $x^2+xy-y^2 = 4$
98. $x + 6y + x/y = 16$, $3(x+y) + x/y = 23$
99. $xy+1/xy+x/y+y/x = 13$, $xy-1/xy-x/y+y/x = 12$
100. $(x+1)^2 + (x+1)(y+2) + (y+2)^2 = 133$
 $(x+1) + \sqrt{(x+1)(y+2) + (y+2)} = 19$
101. $xy + x + y = 11$, $x^2y + xy^2 = 30$
102. $x^4 - x^2y^2 - y^4 = 117$, $x^2 + \sqrt{3xy} + y^2 = 39$
103. $2x^2 + 3y^2 = 11$, $x^2 - xy + y^2 = 7$
104. $ax^2 + bxy + cy^2 = bx^2 + cxy + ay^2 = d$
105. $x^2 - y^2 = xy - ab$, $(x+y)(ax+by) = 2ab(a+b)$
106. $\frac{x^2+y^2}{xy} + x^2+y^2 = 13\frac{1}{3}$, $\frac{xy}{x^2+y^2} + xy = 3\frac{3}{10}$
107. $(x-y)^2 + 2ab = ax + by$, $xy + ab = ay + bx$
108. $xy + 6 = 2x - x^2$, $xy - 9 = 2y - y^2$
109. $x(3y-5) = 4$, $y(2x+7) = 27$

110. $\frac{x}{y^2 - 3} = \frac{y}{x^2 - 3} = \frac{-7}{x^3 + y^3}$
111. $x + y = 7 + \sqrt{xy}, \quad x^2 + y^2 = 133 - xy$
112. $x\sqrt{2} + y\sqrt{2} = \frac{97}{9}, \quad xy = 2^2\sqrt{2}$
113. $x^2 + 5y^2 = 21x; \quad 3x^2 + 2xy + y^2 = 11x$
114. $\frac{x^2}{a+x} + \frac{y^2}{a+y} = a; \quad x^2 + y^2 = 2a^2$
115. $x^2 + y^2 = 4(x+y) + 9; \quad x^2 - 5xy + y^2 = x + y$
116. $(x+y)^2 + x^2y^2 = 37; \quad x + y = xy + 5$
117. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{12} = \frac{7}{x+y+5}$
118. $y(y^2 - 3xy - x^2) + 24 = 0; \quad x(y^2 - 4xy + 2x^2) + 8 = 0$
119. $\frac{1}{a}(x-y) + \frac{1}{b}(x+y) = 1; \quad \frac{1}{a}(x+y) - \frac{1}{b}(x-y) = -1$
120. $(a-b)(x+y) + (a+b)(x-y) = 0; \quad ax + by - 2ab = 0$
121. $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 5; \quad \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{5}{6}$
122. $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$
 $x^2y + xy^2 - 2x^2 - 4xy - 2y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$
123. $y^2(4x^2 - 108) = x(x^3 - 9y^3); \quad 2x^2 + 9xy + y^2 = 108$
124. $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 9; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4}$
125. $a(b-y) + b(a-x) = (a-x)(b-y)$
 $a^2(b-y) + b^2(a-x) = c(a-x)(b-y)$
126. $ax + by - c = 0; \quad a(b-c)x + b(c-a)y + c(a-b) = 0$
127. $\frac{2x-b}{a} = \frac{3x-y}{a+2b} = \frac{a-2y}{b}$
128. $(x-c)^2 - y^2 = 3c^2; \quad xy - cy = 2c^2$
129. $ab(x^2 - y^2) = (b^2 - a^2)xy; \quad ax + by = 2ab$
130. $x^5 - y^5 = 992; \quad x - y = 2$

$$131. \quad \frac{x-a}{a^2} + \frac{y-b}{b^2} = \frac{1}{x-b} - \frac{1}{y-a} - \frac{1}{a-b} = 0$$

$$132. \quad 2a \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) + 4a^2 = 4x^2 + \frac{xy}{2a} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$133. \quad x(a+x) = y(b+y); \quad ax + by = (x+y)^2$$

$$134. \quad xy + ab = 2ax; \quad x^2y^2 + a^2b^2 = 2b^2y^2$$

$$135. \quad 3x^3 - 8xy^2 + y^3 + 21 = 0; \quad x^2(y-x) = 1$$

สมการให้ทราบค่า 3 ตัว

$$\text{Standard form} \quad a_1x + b_1y + c_1z = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

ลักษณะสมการและวิธีทำ

1. สมการรูปมาตรฐาน ที่มีค่า Constant อาจจะเป็น 0 หรือเลขใดๆ

วิธีทำ 1. โดยตัดตัว Unknown ออกเสีย 1 ตัว จนทำให้เป็นสมการ

2 ชั้น 2 สมการ

2. หาค่าตัว Unknown ได้จากสมการทั้ง 2 ชั้น

$$\text{Ex.} \quad 3x + y - z = 3 \quad (1)$$

$$2x - y + 3z = 20 \quad (2)$$

$$7x + y + z = 23 \quad (3)$$

$$\text{Solve} \quad (1) + (2) \quad 5x + 2z = 23 \quad (4)$$

$$(2) + (3) \quad 9x + 4z = 43 \quad (5)$$

$$(4) \times (2) \quad 10x + 4z = 46 \quad (6)$$

$$(6) - (5) \quad x = 3$$

$$\text{แทนค่า } x = 3 \text{ ใน (4)} \quad 2z = 8$$

$$z = 4$$

$$\text{แทนค่า } x = 3, z = 4 \text{ ใน (1)}$$

$$y = -2$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 8 \end{array} \right\}$$

Ans

2. สมการหมคว Unknown ลักนอช

วิธีทำ 1. จับคู่กันทั้ง 3 สมการ

2. ถอด root แล้วเอาไปหารแต่ละสมการได้ค่าที่ต้องการ

3. หรือ (จาก 2) ทำกำลังของผลลัพธ์เมื่อคูณกันแล้วนั้น ให้พอดีกับสมการเดิม แล้วใช้เป็นตัวตั้ง เอาสมการเดิมทั้ง 3 สมการมาหาร

Ex. $xy^2z^2 = 36$ (1)

$$x^2yz^2 = 144$$
 (2)

$$x^2y^2z = 48$$
 (3)

Solve (1) $\times$ (2) $\times$ (3) $x^5y^5z^5 = 36 \times 144 \times 48$

ถอดรากที่ 5 $xyz = 12$ (4)

(4)² $x^2y^2z^2 = 144$ (5)

(5) $\div$ (1) $x = 4$

(5) $\div$ (2) $y = 1$

(5) $\div$ (3) $z = 3$ } **Ans**

3. หั้ 3 สมการแยก factor ได้ แล้วห้ factor ร่วม

วิธีทำ 1. แยก factor แต่ละสมการ

2. จับบวก หรือ ลบกันทั้ง 3 สมการ ได้เป็นสมการใหม่

3. เอาสมการใหม่ไปหารสมการเดิมทั้ง 3 จะได้ค่าตัว Unknown

Ex. $x^2 + xy + xz = 18$ (1)

$$y^2 + xy + yz = 6$$
 (2)

$$z^2 + zx + yz = 12$$
 (3)

Solve จาก (1) $x(x+y+z) = 18$ (4)

จาก (2) $y(y+x+z) = 6$ (5)

จาก (3) $z(z+x+y) = 12$ (6)

(4) + (5) + (6) ; $(x+y+z)(x+y+z) = 36$

$$x + y + z = \pm 6$$
 (7)

(4) $\div$ (7) $x = \pm 3$

(5) $\div$ (7) $y = \pm 1$

(6) $\div$ (7) $z = \pm 2$ } **Ans**

4. มีสมการหนึ่งแยก factor ได้แล้วมีสมการอื่นเป็น factor ร่วม

วิธีทำ 1. แยก factor สมการที่แยกได้

2. จับหารกันเป็นคู่ ๆ จะเหลือสมการที่เป็นรูปมาตรฐานหรือง่ายๆ

Ex. $(x+y)^2 - z^2 = 65$ (1)

$$x^2 - (y+z)^2 = 13 \quad (2)$$

$$x + y - z = 5 \quad (3)$$

Solve จาก (1) ; $(x+y+z)(x+y-z) = 65$ (4)

„ (2) ; $(x-y-z)(x+y+z) = 13$ (5)

$$(4) \div (3) \quad x + y + z = 13 \quad (6)$$

$$(5) \div (6) \quad x - y - z = 1 \quad (7)$$

$$(6) + (7) \quad 2x = 14 ; x = 7$$

$$(3) - (7) \quad 2y = 4 ; y = 2$$

$$(6) - (3) \quad 2z = 8 ; z = 4$$

Ans

5. มีสมการที่เอาไปบวกหรือลบกันอีกสมการหนึ่งทำให้แยก factor ได้แล้ว
สมการที่เหลือเป็น factor รวม

Ex. $z + y - x = 11$ (1)

$$y^2 + x^2 - z^2 = -35$$
 (2)

$$xy = 10$$
 (3)

Solve (3) $\times$ 2 $2xy = 20$ (4)

$$(2) - (4) \quad y^2 - 2yx + x^2 - z^2 = -55$$

$$(y-x)^2 - z^2 = -55$$

$$(y-x+z)(y-x-z) = -55$$
 (5)

$$(5) \div (1) \quad y - x - z = -5$$
 (6)

$$(1) - (6) \quad 2z = 16$$

$$z = 8$$

$$(1) + (6) \quad 2(y-x) = 6$$

$$y - x = 3$$

$$\text{จาก (3), } x = \frac{10}{y}; \quad \therefore y - \frac{10}{y} = 3$$

$$y^2 - 3y - 10 = 0$$

$$(y-5)(y+2) = 0$$

$$y = 5, -2$$

$$x = 2, -5$$

$$z = 8, 8$$

Ans

๘. สมการหาค่าตัว Unknown ออกมา เมื่อใส่ตัวเลขแล้วมี factor ร่วมกับสมการอื่น

วิธีทำ 1. เอาสมการทั้ง 3 คูณกัน แล้วต่อคราก

2. เอาสมการที่ได้ใหม่หารด้วยสมการเดิมทั้ง 3 สมการ จะได้ค่าตัว Unknown ออกมา

Ex. $xy + x + y = 29$ (1)

$$yz + y + z = 23 \quad (2)$$

$$zx + z + x = 19 \quad (3)$$

Solve จาก (1) ; $x(y+1) + (y+1) = 30$

$$(y+1)(x+1) = 30 \quad (4)$$

จาก (2) ; $y(z+1) + (z+1) = 24$

$$(z+1)(y+1) = 24 \quad (5)$$

จาก (3) ; $z(x+1) + (x+1) = 20$

$$(x+1)(z+1) = 20 \quad (6)$$

$$(4) \times (5) \times (6) ; [(x+1)(y+1)(z+1)]^2 = 30 \times 24 \times 20$$

$$(x+1)(y+1)(z+1) = \pm 120 \quad (7)$$

$$(7) \div (4) \quad z + 1 = \pm 4$$

$$z = 3, -5$$

$$(7) \div (5) \quad x + 1 = \pm 5$$

$$x = 4, -6$$

$$(7) \div (6) \quad y + 1 = \pm 6$$

$$y = 5, -7$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} x = 4, y = 5, z = 3 \\ x = -6, y = -7, z = -5 \end{array} \right\} \text{Ans}$$

Rule of Cross Multiplication (กฎการคูณไขว้)

วิธีทำ

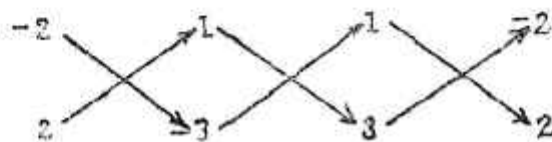
1. เลือกสมการคู่ใดคู่หนึ่งซึ่งอยู่ในรูปมาตรฐาน หาค่าส่วนของตัวไม่ทราบค่าโดยอาศัยกฎการคูณไขว้ (คูณเลขเป็นบวกคูณเป็นลบ)
2. สมมติให้หาค่าส่วนของตัวที่ แล้วหาค่าของตัวไม่ทราบค่าซึ่งอยู่ในเทอมของตัวที่
3. หาค่าตัวที่ไปแทนในสมการที่เหลืออยู่อีกสมการหนึ่ง
4. หาค่าตัวที่ เพื่อนำไปหาค่าตัวไม่ทราบค่าในตอนต่อไป

Ex. $x - 2y + z = 0$ (1)

$3x + 2y - 3z = 0$ (2)

$xyz = 192$ (3)

Solve จาก (1), (2) ตามกฎการคูณไขว้



$$\frac{x}{(-2)(-3) - (2)(1)} = \frac{y}{(1)(3) - (-3)(1)} = \frac{z}{(1)(2) - (3)(-2)}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{8}$$

ให้ $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k$

$$x = 2k \quad (4)$$

$$y = 3k \quad (5)$$

$$z = 4k \quad (6)$$

แทนค่า x, y, z ใน (3)

$$2 \times 3 \times 4k^3 = 192$$

$$k^3 = \frac{192}{24}$$

$$k = 2$$

แทนค่า k ใน (4), (5), (6)

$$\left. \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 6 \\ z = 8 \end{array} \right\} \text{Ans}$$

เมื่อสมการไม่อยู่ในรูปมาตรฐาน จัดให้อยู่ในรูปมาตรฐานใหม่

Ex. $3x + y - z = 3$ (1)

$$2x - y + 3z = 20 \quad (2)$$

$$7x + y + z = 23 \quad (3)$$

Solve จาก (1) และ (2) จัดให้อยู่ในรูปสมการมาตรฐาน

$$3(x-3) + (y+2) - (z-4) = 0 \quad (4)$$

$$2(x-3) - (y+2) + 3(z-4) = 0 \quad (5)$$

จาก (4) และ (5) ตามกฎการคูณไขว้

$$\frac{x-3}{3-1} = \frac{y+2}{-2-9} = \frac{z-4}{-3-2}$$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-11} = \frac{z-4}{-5} = k$$

$$x = 2k + 3 \quad (6)$$

$$y = -11k - 2 \quad (7)$$

$$z = -5k + 4 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } x, y, z \text{ ใน (3); } 7(2k+3) + (-11k-2) + (-5k+4) &= 23 \\ -2k + 23 &= 23 \\ k &= 0 \end{aligned}$$

แทนค่า k ใน (6), (7), (8)

$$\left. \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= -2 \\ z &= 4 \end{aligned} \right\} \text{Ans}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างสมการประสิทธิ์ของสมการ

Ex. $ax + cy + bz = 0$ (1)

$$cx + by + az = 0 \quad (2)$$

$$bx + ay + cz = 0 \quad (3)$$

อาศัยกฎการคูณไขว้จึงพิสูจน์ว่า $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Prove จาก (1), (2) ตามกฎการคูณไขว้

$$\frac{x}{ca - b^2} = \frac{y}{bc - a^2} = \frac{z}{ab - c^2}$$

$$\text{ให้ } \frac{x}{ca - b^2} = \frac{y}{bc - a^2} = \frac{z}{ab - c^2} = k$$

$$x = (ca - b^2) k$$

$$y = (bc - a^2) k$$

$$z = (ab - c^2) k$$

แทนค่า x, y, z ใน (3)

$$b(ca - b^2)k + a(bc - a^2)k + c(ab - c^2)k = 0$$

$$k[b(ca - b^2) + a(bc - a^2) + c(ab - c^2)] = 0$$

$$k(abc - b^3 + abc - a^3 + abc - c^3) = 0$$

$$k(-a^3 - b^3 - c^3 + 3abc) = 0$$

$$-a^3 - b^3 - c^3 + 3abc = 0$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

Q.E.D.

Ex. $a(y+z) = x$ (1)

$$b(z+x) = y \quad (2)$$

$$c(x+y) = z \quad (3)$$

จงแสดงว่า $bc + ca + ab + 2abc = 1$

Prove จาก (1) $-x + ay + az = 0$ (4)

จาก (2) $bx - y + bz = 0$ (5)

จาก (3) $cx + cy - z = 0$ (6)

จาก (4), (5) ตามกฎคูณไขว้

$$\frac{x}{ab+a} = \frac{y}{ab+b} = \frac{z}{1-ab}$$

ให้ $\frac{x}{ab+a} = \frac{y}{ab+b} = \frac{z}{1-ab} = k$

$$x = (ab+a)k$$

$$y = (ab+b)k$$

$$z = (1-ab)k$$

แทนค่า x, y, z ใน (6)

$$c(ab+a)k + c(ab+b)k - (1-ab)k = 0$$

$$k(abc+ca+abc+bc-1+ab) = 0$$

$$bc + ca + ab + 2abc = 1 \quad \text{Q.E.D.}$$

Ex. ถ้าสมการ $\left. \begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ n^2 + mn + k &= 0 \end{aligned} \right\}$ มีรากรวมกันรากหนึ่ง

จงพิสูจน์ว่า $(q-k)^2 = (m-p)(pk-mq)$

Prove ให้ T เป็นรากร่วมของสมการทั้งสอง

แทนค่า $T = X, T = N$ ในสมการ

$$T^2 + pT + q = 0 \quad (1)$$

$$T^2 + mT + k = 0 \quad (2)$$

จาก (1), (2) ตามกฎการคูณไขว้

$$\frac{T^2}{pk - mq} = \frac{T}{q - k} = \frac{1}{m - p}$$

$$\frac{T}{q - k} = \frac{T^2}{pk - mq} \quad (3)$$

$$\frac{T}{q - k} = \frac{1}{m - p} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (4) \times (3) \quad \frac{T^2}{(q-k)^2} &= \frac{T^2}{(m-p)(pk-mq)} \\ (q-k)^2 &= (m-p)(pk-mq) \end{aligned}$$

Q.E.D.

ตัวอย่างของการคูณไขว้

Ex. $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ (1)

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0 \quad (2)$$

Prove (1) $\div z$ $a_1 \left(\frac{x}{z} \right) + b_1 \left(\frac{y}{z} \right) + c_1 = 0$ (3)

$$(2) \div z \quad a_2 \left(\frac{x}{z} \right) + b_2 \left(\frac{y}{z} \right) + c_2 = 0 \quad (4)$$

$$(3) \times b_2 \quad a_1b_2 \left(\frac{x}{z} \right) + b_1b_2 \left(\frac{y}{z} \right) + b_2c_1 = 0 \quad (5)$$

$$(4) \times b_1 \quad a_2b_1 \left(\frac{x}{z} \right) + b_1b_2 \left(\frac{y}{z} \right) + b_1c_2 = 0 \quad (6)$$

$$(5) - (6) \quad (a_1b_2 - a_2b_1) \frac{x}{z} + b_2c_1 - b_1c_2 = 0$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1) \frac{x}{z} = b_1c_2 - b_2c_1$$

$$\frac{x}{z} = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{z}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (7)$$

$$(3) \times a_2 \quad a_1a_2 \left(\frac{x}{z} \right) + a_2b_1 \left(\frac{y}{z} \right) + c_1a_2 = 0 \quad (8)$$

$$(4) \times a_1 \quad a_1a_2 \left(\frac{x}{z} \right) + a_1b_2 \left(\frac{y}{z} \right) + c_2a_1 = 0 \quad (9)$$

$$(9) - (8) \quad (a_1b_2 - a_2b_1) \frac{y}{z} = c_1a_2 - c_2a_1$$

$$\frac{y}{z} = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (10)$$

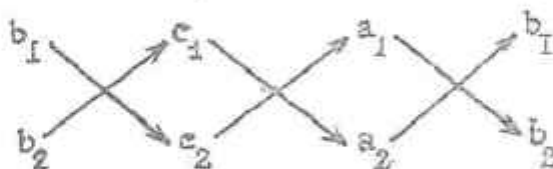
$$(7) = (10) \quad \frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{Q.E.D.}$$

หากผลข้างบนนี้เราอาจจะหาได้โดยไม่ต้องแก้สมการคือใช้กฎการคูณไขว้

$$\text{จากสมการ} \quad a_1x + b_1y + c_1z = 0$$

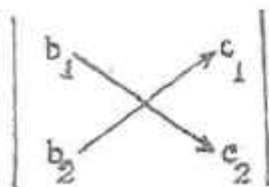
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

เขียน ส.ป.ส. ของ x, y, z ลงไป โดยเริ่มจาก ส.ป.ส. ของ y เรียงไป ส.ป.ส. ของ z , ส.ป.ส. ของ x และสิ้นสุดด้วย ส.ป.ส. ของ y



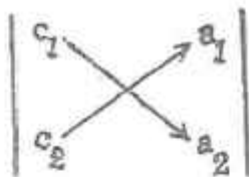
คูณตามลูกศรโดย คูณลงเป็นบวก คูณขึ้นเป็นลบ

ส่วนของ x คือ



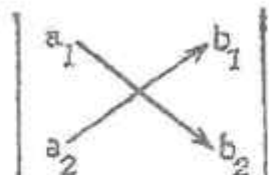
ซึ่งเท่ากับ $b_1c_2 - b_2c_1$

ส่วนของ y คือ



ซึ่งเท่ากับ $c_1a_2 - c_2a_1$

ส่วนของ z คือ



ซึ่งเท่ากับ $a_1b_2 - a_2b_1$

$$\text{จะได้} \quad \frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

ถ้าเป็นสมการทั่วไปไม่ทราบค่า 2 ตัว อาจใช้กฎการคูณไขว้ได้โดยแทน $z = 1$

$$\text{สมการที่จะเป็น} \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

เขียน ส.ป.ส. โดยเรียงจาก y , พจน์อิสระ, ส.ป.ส. ของ x แล้วสิ้นสุดด้วย ส.ป.ส. ของ y

$$\text{จะได้} \quad \frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

ลักษณะของสมการที่ใช้กฎการคูณไขว้ได้

1. มี 2 สมการที่มีกำลังเท่ากันและพจน์อิสระเป็นศูนย์
2. สมการที่ 3 พจน์อิสระต้องไม่เป็นศูนย์ (สมการ 3 Unknown)

Ex. $2x + y - 10z = 0$ (1)

$7x + 6y - 53z = 0$ (2)

$3x + 2y + 17z = 34$ (3)

Solve ใช้กฎของการคูณไขว้จากสมการ (1) และ (2)

$$\frac{x}{(1)(-53) - (8)(-10)} = \frac{y}{(-10)(7) - (-53)(2)} = \frac{z}{(2)(8) - (7)(1)}$$

$$\frac{x}{27} = \frac{y}{36} = \frac{z}{9}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = z$$

สมมติให้ $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = z = k$ (4)

$$\therefore x = 3k, \quad y = 4k, \quad z = k$$

แทนค่า x, y และ z ลงในสมการ (3)

$$3(3k) + 2(4k) + 17k = 34$$

$$34k = 34$$

$$k = 1$$

แทนค่า k ใน (4) $\therefore x = 3, \quad y = 4, \quad z = 1$ **Ans**

Ex. $x^3 + y^2 + z - 8 = 0$ (1)

$$2x^3 - 3y^2 - 2z = -16$$
 (2)

$$x^3 y^2 + z = 7$$
 (3)

Solve จาก (1), (2); $x^3 + y^2 + (z-8) = 0$ (4)

$$2x^3 - 3y^2 - 2(z-8) = 0$$
 (5)

จาก (4), (5) ตามกฎการคูณไขว้

$$\frac{x^3}{-2+3} = \frac{y^2}{2+2} = \frac{(z-8)}{-3-2}$$

$$x^3 = \frac{y^2}{4} = \frac{(z-8)}{-5} = k$$

$$x^3 = k, \quad y^2 = 4k, \quad (z-8) = -5k$$

แทนใน (3)

$$k(4k) + 8 - 5k = 7$$

$$4k^2 - 5k + 1 = 0$$

$$(4k-1)(k-1) = 0$$

$$k = \frac{1}{4}, 1$$

$$\therefore x^3 = \frac{1}{4}, 1; x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, 1$$

$$\therefore y^2 = 1, 4; y = \pm 1, \pm 2$$

$$\therefore z - 8 = -\frac{5}{4}, -5; z = 6\frac{3}{4}, 3$$

Ans

$$\text{Ex.} \quad x^2 + xy + y^2 = 39 \quad (1)$$

$$y^2 + yz + z^2 = 49 \quad (2)$$

$$z^2 + zx + x^2 = 19 \quad (3)$$

$$\text{Solve} \quad (2) - (3) \quad (y^2 - x^2) + z(y - x) = 30$$

$$(y - x)(x + y + z) = 30 \quad (4)$$

$$(2) - (1) \quad (z - x)(x + y + z) = 10 \quad (5)$$

$$(4) \div (5) \quad y - x = 3z - 3x$$

$$y = 3z - 2x$$

$$\text{แทนค่า } y \text{ ใน (1)} \quad x^2 - 3xz + 3z^2 = 13 \quad (6)$$

$$(3) \div (6) \quad \frac{z^2 + zx + x^2}{x^2 - 3xz + 3z^2} = \frac{19}{13}$$

$$13z^2 + 13zx + 13x^2 = 19x^2 - 57xz + 57z^2$$

$$6x^2 - 70xz + 44z^2 = 0$$

$$3x^2 - 35xz + 22z^2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{2z}{3}, 11z$$

$$\therefore y = \frac{5z}{3}, -19z$$

$$\text{แทนค่า } y \text{ ใน (2)} \quad \frac{49z^2}{9} = 49 \text{ และ } 343z^2 = 49$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore z &= \pm 3 \text{ และ } z = \pm \frac{1}{\sqrt{7}} \\ \therefore x &= \pm 2 \text{ และ } x = \pm \frac{11}{\sqrt{7}} \\ \therefore y &= \pm 5 \text{ และ } y = \pm \frac{19}{\sqrt{7}} \end{aligned} \right\}$$

Ans

Ex. จงหาค่า x, y, z จากสมการ

$$x^3 + y^3 + z^3 = 495 \quad (1)$$

$$x + y + z = 15 \quad (2)$$

$$xyz = 105 \quad (3)$$

Solve (3) $\times 3$ $3xyz = 315 \quad (4)$

$$(1) - (4) \quad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 180 \quad (5)$$

$$\therefore x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$\therefore (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = 180 \quad (6)$$

$$(6) \div (2) \quad x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 12 \quad (7)$$

$$(2)^2 \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 225 \quad (8)$$

$$(8) - (7) \quad 3xy + 3yz + 3zx = 213$$

$$xy + yz + zx = 71 \quad (9)$$

$$x + y + z = 15, xy + yz + zx = 71, xyz = 105$$

$$\therefore x, y, z, \text{ เป็นรากของสมการ } t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+zx)t - xyz = 0$$

$$\therefore t^3 - 15t^2 + 71t - 105 = 0$$

$$\text{โดยทฤษฎีเศษเหลือ} \quad \therefore (t-3)(t-5)(t-7) = 0$$

$$t = 3, 5, 7$$

$$\therefore x, y, z = 3, 5, 7 \text{ (สลับกัน) Ans}$$

N.B. จากสมการกำลังที่ 3 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$$\therefore x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

ถ้า α, β, γ เป็นรากของสมการ จะสามารถพิสูจน์โดยหลักการเทียบ ส.ป.ส. ได้

$$\text{ว่า } \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

ดังนั้น ถ้าเราทราบค่าของผลบวกของรากทั้ง 3, ผลบวกของผลคูณของรากแต่

ละคู่, และผลคูณรากทั้ง 3 เราก็จะได้สมการดังนี้

$$x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)x - \alpha\beta\gamma = 0$$

Ex. $\frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y-1} = x+y+z$

Solve $\therefore$ แยกเศษส่วน $= \frac{x+y+z}{2(x+y+z)} = \frac{1}{2}$ (จากกฎตัดส่วน)

$\therefore 2x = y+z+1$ (1)

$2y = z+x$ (2)

$2z = x+y-1$ (3)

$x+y+z = \frac{1}{2}$ (4)

จาก (1), (2), (3), (4) ได้ $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{6}, z = \frac{-1}{6}$ Ans

Ex. $x^2 - yz = a$ (1)

$y^2 - zx = b$ (2)

$z^2 - xy = c$ (3)

Solve (1) $\times z + (2) \times x + (3) \times y ; 0 = bx + cy + az$ (4)

(1) $\times y + (2) \times z + (3) \times x ; 0 = cx + ay + bz$ (5)

$\therefore \frac{x}{a^2 - bc} = \frac{y}{b^2 - ac} = \frac{z}{c^2 - ab}$ (จากกฎการคูณไขว้)

$\therefore$ ให้ $\frac{x}{a^2 - bc} = \frac{y}{b^2 - ac} = \frac{z}{c^2 - ab} = k$

แทนค่า x, y, z , ใน (1) หรือ (2)

$k^2 (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = 1$

$\therefore \frac{x}{a^2 - bc} = \frac{y}{b^2 - ac} = \frac{z}{c^2 - ab} = \pm \frac{1}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}}$

$x = \pm \frac{a^2 - bc}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}}$

$y = \pm \frac{b^2 - ac}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}}$

$z = \pm \frac{c^2 - ab}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}}$

Ans

Ex. (1) $x^2 + y^2 + z^2 = 84$, (2) $x + y + z = 14$, (3) $xy = z^2$

Solve จาก (1) และ (2) $(x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 112$

$$\therefore xy + yz + zx = 56 \quad (4)$$

แทน $xy = z^2$ ใน (4) ได้ $z(z+y+x) = 56 \quad (5)$

จาก (5) $\div$ (2) ได้ $z = 4$

จาก (2) และ (3) แทน z ลงไป $x + y = 10, xy = 16$

แก้สมการได้ $x = 2, 8$

$$y = 8, 2$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} x = 2, \quad y = 8, \quad z = 4 \\ x = 8, \quad y = 2, \quad z = 4 \end{array} \right\} \text{Ans}$$

Ex. $x(ax+by+cz) = k \quad (1)$

$$y(ax+by+cz) = l \quad (2)$$

$$z(ax+by+cz) = m \quad (3)$$

Solve (1) $\times a +$ (2) $\times b +$ (3) $\times c$; $(ax+by+cz)^2 = ak + lb + mc$

$$ax + by + cz = \pm \sqrt{ak+bl+cm}$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} x = \pm \frac{k}{\sqrt{ak+bl+cm}} \\ y = \pm \frac{l}{\sqrt{ak+bl+cm}} \\ z = \pm \frac{m}{\sqrt{ak+bl+cm}} \end{array} \right\} \text{Ans}$$

Ex.

$$\begin{aligned}x + y + z &= a \\x^2 + y^2 + z^2 &= b \\x^3 + y^3 + z^3 &= c\end{aligned}$$

Solve We have $xy + yz + zx = \frac{1}{2} \left\{ (x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \right\}$

$$= \frac{1}{2} (a^2 - b)$$

Also $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$$3xyz = c - a \left\{ b - \frac{1}{2} (a^2 - b) \right\}$$

$$xyz = \frac{1}{3} \left[c - a \left\{ b - \frac{1}{2} (a^2 - b) \right\} \right]$$

$\therefore$ x, y, z are the roots of the equation

$$t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+zx)t - xyz = 0$$

$$\therefore t^3 - at^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b)t - \frac{1}{3} \left[c - a \left\{ b - \frac{1}{2}(a^2 - b) \right\} \right] = 0$$

$$6t^3 - 6at^2 + 3(a^2 - b)t - (a^3 - 3ab + 2c) = 0$$

หาค่า t ต่อไปโดยใช้ทฤษฎีเศษเหลือ สมมติได้ $t = m, n, p$

$\therefore x, y, z$ มีค่า $= m, n, p$ (สลับกัน in any order) **Ans**

$$\text{Ex.} \quad \frac{xy}{x+y} = \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\frac{yz}{y+z} = \frac{24}{7} \quad (2)$$

$$\frac{zx}{z+x} = \frac{8}{5} \quad (3)$$

$$\text{Solve} \quad \text{จาก (1)} \quad \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\text{จาก (2)} \quad \frac{z+y}{yz} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{24} \quad (5)$$

$$\text{จาก (3)} \quad \frac{z+x}{xz} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{5}{8} \quad (6)$$

$$(6) - (5) \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \quad (7)$$

$$(7) + (4) \quad \frac{2}{x} = 1$$

$$x = 2$$

$$(4) - (7) \quad \frac{2}{y} = \frac{1}{3}$$

$$y = 6$$

$$\text{แทนค่า } y \text{ ใน (5) ได้} \quad z = 8$$

$$\therefore x = 2, \quad y = 6, \quad z = 8$$

Ans

Ex. $x^2 - (y-z)^2 = 15$ (1)

$$y^2 - (z-x)^2 = 5 \quad (2)$$

$$z^2 - (x-y)^2 = 3 \quad (3)$$

Solve 111 (1) $(x-y+z)(x+y-z) = 15$ (4)

111 (2) $(y-z+x)(y+z-x) = 5$ (5)

111 (3) $(z-x+y)(z+x-y) = 3$ (6)

$$(4) \times (5) \times (6) \quad (x+y-z)(y+z-x)(x+z-y) = \pm 15 \quad (7)$$

$$(7) \div (4) \quad y + z - x = \pm 1 \quad (8)$$

$$(7) \div (5) \quad x - y + z = \pm 3 \quad (9)$$

$$(7) \div (6) \quad x + y - z = \pm 5 \quad (10)$$

$$\frac{(9) + (10)}{2} \quad x = \pm 4$$

$$\frac{(8) + (10)}{2} \quad y = \pm 3$$

$$\frac{(8) + (9)}{2} \quad z = \pm 2$$

Ans

Ex. $x + y + z = 4$ (1)

$$2x + y = 3 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14 \quad (3)$$

Solve จาก (1) $x + (y-3) + (z-1) = 0$ (4)

จาก (2) $2x + (y-3) + 0(z-1) = 0$ (5)

ใช้กฎการคูณไขว้จะได้

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

ให้

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-1} = k$$

$$x = -k$$

$$y = 2k + 3$$

$$z = 1 - k$$

แทนค่า x, y, z ใน (3)

$$k^2 + 4k^2 + 12k + 9 + 1 - 2k + k^2 = 14$$

$$6k^2 + 10k + 10 = 14$$

$$3k^2 + 5k - 2 = 0$$

$$(3k-1)(k+2) = 0$$

$$k = \frac{1}{3}, -2$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 2, -\frac{1}{3} \\ y &= -1, \frac{11}{3} \\ z &= 3, \frac{2}{3} \end{aligned} \right\}$$

Ans

$$\begin{array}{rcl} \text{Ex.} & y^2 + z^2 - x & = 1 & (1) \\ & z^2 + x^2 - y & = 1 & (2) \\ & y^2 + x^2 - z & = 1 & (3) \end{array}$$

$$\text{Solve } (2)-(1) \quad x^2 - y^2 + x - y = 0$$

$$(x-y)(x+y+1) = 0$$

$$\text{ได้} \quad x = y$$

$$\text{และ} \quad x + y + 1 = 0$$

$$(3)-(1) \quad (x-z)(x+z+1) = 0$$

$$\text{ได้} \quad x = z$$

$$\text{และ} \quad x + z + 1 = 0$$

$$\therefore x = y = z$$

$$\text{แทนใน (1) ได้} \quad 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\text{ได้} \quad x = 1, -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x = y = z = 1, -\frac{1}{2}$$

$$\text{ถ้า } x = y \text{ และ } x + z + 1 = 0 \text{ ได้ } x = -(z+1)$$

$$\text{แทนใน (3) ได้} \quad 2x^2 + x = 0$$

$$x = 0, -\frac{1}{2}$$

$$\therefore y = 0, -\frac{1}{2}$$

$$z = -1, -\frac{1}{2}$$

$$\text{ถ้า } x = z \text{ และ } x + y + 1 = 0 \text{ ได้ } x = -(y+1)$$

$$\text{แทนใน (2) ได้} \quad 2x^2 + x = 0$$

$$x = 0, -\frac{1}{2}$$

$$y = -1, -\frac{1}{2}$$

$$z = 0, -\frac{1}{2}$$

$$\text{ถ้า } x + z + 1 = 0 \text{ และ } x + y + 1 = 0$$

$$\text{ลบกันได้} \quad y - z = 0$$

$$y = z$$

$$x = -(y+1)$$

$$\text{แทนใน (1) } \therefore 2y^2 + y = 0$$

$$y = 0, -\frac{1}{2}$$

$$x = -1, -\frac{1}{2}$$

$$z = 0, -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 1, -\frac{1}{2}, -1, 0, 0$$

$$\therefore y = 1, -\frac{1}{2}, 0, -1, 0$$

$$\therefore z = 1, -\frac{1}{2}, 0, 0, -1$$

Ans

$$\text{Ex.} \quad xz + y = 7z \quad (1)$$

$$yz + x = 8z \quad (2)$$

$$x + y + z = 12 \quad (3)$$

$$\text{Solve (1) + (2)} \quad z(x+y) + (x+y) = 15z$$

$$(x+y)(z+1) = 15z \quad (4)$$

$$\text{จาก (3)} \quad x + y = 12 - z \quad (5)$$

$$\text{แทน (5) ใน (4)} \quad 12 + 11z - z^2 = 15z$$

$$\text{ได้ } z = -6, 2$$

$$\text{แทนใน (5) แล้วหาค่า } x, y \text{ ได้ } \left. \begin{array}{l} x = \frac{60}{7}, 4 \\ y = \frac{63}{7}, 6 \end{array} \right\}$$

Ans

Ex. $x^2 - y^2 + z^2 = 6$ (1)

$2yz - zx + 2xy = 13$ (2)

$x - y + z = 2$ (3)

Solve จาก (2) $zx = 2y(x+z) - 13$ (4)

จาก (3) $x + z = 2 + y$ (5)

แทนใน (4) $zx = 2y^2 + 4y - 13$
 $2zx = 4y^2 + 8y - 26$ (6)

(1) + (6) $(x+z)^2 - y^2 = 4y^2 + 8y - 20$

แทน $(x+z)$ จาก (5); $(2+y)^2 - y^2 = 4y^2 + 8y - 20$

$4 + 4y + y^2 - y^2 = 4y^2 + 8y - 20$

$4y^2 + 4y - 24 = 0$

$y^2 + y - 6 = 0$

ได้ $y = 2, -3$ **Ans**

$y = -3$ แทนใน (1) $x^2 + z^2 = 15$

แทนใน (3) $x + z = -1$

หาค่า
$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2} \\ z &= \frac{-1 \mp \sqrt{29}}{2} \end{aligned} \right\} \text{Ans}$$

$y = 2$ ได้ $x^2 + z^2 = 10$

$x + z = 4$

หาค่า
$$\left. \begin{aligned} x &= 3, 1 \\ z &= 1, 3 \end{aligned} \right\} \text{Ans}$$

Ex. $\frac{y^2 + z^2}{a} = \frac{z^2 + x^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{c} = xyz$

Solve $\frac{y^2 + z^2}{a} = xyz \quad (1)$

$$\frac{z^2 + x^2}{b} = xyz \quad (2)$$

$$\frac{x^2 + y^2}{c} = xyz \quad (3)$$

จาก (1) $\frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} = a \quad (4)$

จาก (2) $\frac{z}{xy} + \frac{x}{yz} = b \quad (5)$

จาก (3) $\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} = c \quad (6)$

$$(4) + (5) + (6); \quad 2\left(\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy}\right) = a + b + c$$

$$\therefore \frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} = \frac{a + b + c}{2} \quad (7)$$

$$(7) - (4) \quad \frac{x}{yz} = \frac{b + c - a}{2} \quad (8)$$

$$(7) - (5) \quad \frac{y}{xz} = \frac{a + c - b}{2} \quad (9)$$

$$(7) - (6) \quad \frac{z}{xy} = \frac{a + b - c}{2} \quad (10)$$

$$(8) \times (9) \times (10) \quad \frac{xyz}{(xyz)^2} = \frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{8}$$

$$xyz = \frac{8}{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} \quad (11)$$

$$(8) \times (11) \quad x^2 = \frac{4}{(a+c-b)(a+b-c)}$$

$$(9) \times (11) \quad y^2 = \frac{4}{(b+c-a)(a+b-c)}$$

$$(10) \times (11) \quad z^2 = \frac{4}{(b+c-a)(a+c-b)}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \pm \frac{2}{\sqrt{(a+c-b)(a+b-c)}} \\ y &= \pm \frac{2}{\sqrt{(b+c-a)(a+b-c)}} \\ z &= \pm \frac{2}{\sqrt{(b+c-a)(a+c-b)}} \end{aligned} \right\} \text{Ans}$$

$$\begin{aligned}\text{Ex.} \quad x^2 + 3(2x+y+z) &= y^2 + 4(x+2y+z) \\ &= z^2 + 5(x+y+2z) = (x+y+z)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Solve ให้} \quad x + y + z &= t \\ \text{จากโจทย์ได้} \quad x^2 + 3x + 3t &= y^2 + 4y + 4t = z^2 + 5z + 5t = t^2 \\ \text{และได้} \quad x^2 + 3x + \frac{9}{4} &= t^2 - 3t + \frac{9}{4}\end{aligned}$$

$$\therefore (x + \frac{3}{2})^2 = (t - \frac{3}{2})^2$$

$$\therefore t - \frac{3}{2} = \pm (x + \frac{3}{2})$$

$$\text{ทำนองเดียวกันได้} \quad t - 2 = \pm (y + 2)$$

$$t - \frac{5}{2} = \pm (z + \frac{5}{2})$$

$$\text{จากนั้นได้} \quad y + z = 3 \quad (1) \quad \text{หรือ} \quad 2x + y + z = 0 \quad (2)$$

$$z + x = 4 \quad (3) \quad \text{หรือ} \quad x + 2y + z = 0 \quad (4)$$

$$x + y = 5 \quad (5) \quad \text{หรือ} \quad x + y + 2z = 0 \quad (6)$$

$$\text{จาก (1), (3), (5) ได้} \quad x = 3, \quad y = 2, \quad z = 1$$

$$\text{จาก (1), (3), (6) ถ้า (1) และ (3) เป็นจริง}$$

$$\text{จะได้ (1) + (3)} \quad x + y + 2z = 7$$

ซึ่งขัดกับ (6) จึงไม่มีค่า x, y และ z จากสมการชุดนี้

ทำนองเดียวกัน ชุด (2), (3), (5) และชุด (1), (4), (5)

$$\text{จาก (1), (4), (6) ได้} \quad x = -\frac{9}{2}, \quad y = \frac{3}{2}, \quad z = \frac{3}{2}$$

$$\text{จาก (2), (3), (6) ได้} \quad x = 2, \quad y = -6, \quad z = 2$$

$$\text{จาก (2), (4), (5) ได้} \quad x = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{5}{2}, \quad z = -\frac{15}{2}$$

$$\text{จาก (2), (4), (6) ได้} \quad x = y = z = 0$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{รากของสมการที่ใช้ได้คือ} \quad (0, 0, 0), \quad (-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}), \quad (2, -6, 2), \\ (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{15}{2}), \quad (3, 2, 1)\end{aligned}$$

Ans

Problem

136. $3x - 4y + 7z = 0$

$2x - y - 2z = 0$

$3x^3 - y^3 + z^3 = 18$

137. $7yz + 3zx = 4xy$

$21yz + 3zx = 8xy$

$x + 2y + 3z = 19$

138. $x^2 - yz = -5$

$y^2 - zx = 1$

$z^2 - xy = 7$

139. $8x + y + 8z - 4w = 30$

$2x + y - z - w = 9$

$x - 4y + z = 11$

$3x - 5z + 2w = 13$

140. $\frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{3} = \frac{x+y}{2}$

$x + y + z = 27$

141. $x - \frac{y}{5} = 6$

$y - \frac{z}{7} = 8$

$z - \frac{x}{2} = 10$

142. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 12$

$\frac{y}{2} + \frac{z}{3} - \frac{x}{6} = 8$

$\frac{z}{3} + \frac{x}{2} = 10$

143. $x + z - 1 = \frac{1}{2}(x + 4z - 8)$
 $= \frac{1}{3}(x + 9z - 27) = y$

144. $x + y - z = 2.3$

$y + z - x = 6.7$

$z + x - y = 8.5$

145. $xy + x + y = 29$

$yz + y + z = 23$

$zx + z + x = 19$

146. $4x^2 + 2xy + 6zx = 34$

$y^2 + 2xy + 3yz = 102$

$9z^2 + 6zx + 3yz = 153$

147. $x(y + z - x) = 39 - 2x^2$

$y(x - y + z) = 52 - 2y^2$

$z(x + y - z) = 78 - 2z^2$

148. $(x + y)(x + z) = 63$

$(y + z)(y + x) = 42$

$(z + x)(z + y) = 54$

149. $yz + zx = 16$
 $zx + xy = 25$
 $xy + yz = -39$
150. $x^3y = 2z$
 $y^3z = 9x$
 $xyz = 6$
151. $x^2 + xy + xz = 18$
 $y^2 + yx + yz = 6$
 $z^2 + xz + yz = 12$
152. $x^2 - yz = 64$
 $y^2 - zx = 88$
 $z^2 - xy = 4$
153. $(x+y)^2 - z^2 = 65$
 $x^2 - (y+z)^2 = 13$
 $x + y - z = 5$
154. $z + x - y = 4$
 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
 $xy = 12$
155. $xy = 10$
 $y^2 + x^2 - z^2 = -35$
 $z + y - x = 11$
156. $x^2 - yz = 1$
 $y^2 - zx = -5$
 $z^2 - xy = 7$
157. $xy + 2yz + 3zx = 0$
 $zx + 3xy = 2yz$
 $x^2y^2z^2 = 8$
158. $(x-1) - 2(y+2) + 3(z-3) = 0$
 $2(x-1) + 3(y+2) = 4z - 12$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 164$
159. If $x - 2y + z = 0$, $3x + 2y - 3z = 0$
 show that $x : y : z = 2 : 3 : 4$
160. $x^2 - 10 = yz$; $y^2 + 8 = xz$; $z^2 - 1 = xy$
166. $3xy + 2z = xz + 6y = 2yz + 3x = 0$
167. $x^2 + 2yz = y^2 + 2zx = z^2 + 2xy + 3 = 76$
168. $x + y + z = a + b + c$; $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$;
 $ax + by + cz = bc + ca + ab$
169. $2xyz + 3 = (2x-1)(3y+1)(4z-1) + 12$
 $= (2x+1)(3y-1)(4z+1) + 80 = 0$
170. จากสมการ จงหาค่า a
 ให้ $\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} = 3$ $\frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} = 5$
 $\left(\frac{x}{y} + \frac{z}{x}\right) \left(\frac{y}{z} + \frac{x}{y}\right) \left(\frac{z}{x} + \frac{y}{z}\right) = a$
171. เลขจำนวนหนึ่งประกอบด้วยเลข 3 ตัว รวมกันแล้ว = 14 ตัวกลางมีค่า = เลข 2 ตัวที่เหลือรวมกัน จำนวนนี้เมื่อเขียนตัวเลขกลับกันจากข้างหลังไปข้างหน้า จะมีค่ามากกว่าจำนวนเดิม 99 จงหาเลขจำนวนเกมนั้น

172. จำนวนหนึ่งมีเลข 3 ตัว เมื่อเลขจำนวนริมสลับที่กัน จำนวนที่ได้จะมากกว่า 2 เท่าของจำนวนเดิมอยู่ 66 เมื่อเลขตัวริมซ้ายสลับที่กับตัวกลาง จำนวนที่ได้จะน้อยกว่าจำนวนเดิม 180 และเมื่อริมขวาสลับกับตัวกลางจำนวนที่ได้จะมากกว่าจำนวนเดิม 63 จงหาเลขจำนวนนั้น

$$173. x^2 + y^2 + z^2 = yz + zx + xy = a^2, 3x - y + z = a\sqrt{3}$$

$$174. x+y+z+xyz = 0; xy+yz+zx = -1, (x^2+1)(y^2+1)(z^2+1) = 20$$

$$175. yz = 2(y+z-6), \quad zx = 2(z+x-4), \quad xy = 2(x+y-1)$$

$$176. yz = 4z - 3y, \quad zx = 2z + x, \quad 2xy = 2x + y$$

$$177. x^3 + y^3 + z^3 = a^3, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x + y + z = a$$

$$178. x^2 + y^2 + z^2 = 21a^2, \quad yz + zx - xy = 6a^2, \quad 3x + y - 2z = 3a$$

$$179. (x-1)(y+5) = 14, \quad (y+5)(z+8) = 63, \quad (z+8)(x-1) = 18$$

$$180. x + y + z = 1, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{x}{a-d} + \frac{y}{b-d} + \frac{z}{c-d} = 0$$

$$181. yz = y + z, \quad zx = z + x, \quad xy = x + y$$

$$182. x + 3y - 2z = 1, \quad x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 1, \quad 3xy = 4$$

$$183. x + y - 2z = 6, \quad x^2 + y^2 - z = 4; \quad xy + 3 = z^2$$

$$184. 2xy - 4x + y = 17, \quad 3yz + y - 6z = 52, \quad 6xz + 3z + 2x = 29$$

$$185. \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2ab} = \frac{2xy + z^2}{a^2 + b^2} = \frac{z^2 - x^2}{b^2 - 2ab} = \frac{x + y}{a + b}$$

$$186. x^3 + y^3 + z^3 = 160, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 38, \quad x + y + z = 10$$

$$187. x + y + z = 0; \quad ax + by + cz = 0$$

$$a^2x + b^2y + c^2z = (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$188. x + yz = 7, \quad z + xy = 5, \quad x + y + z = 6$$

$$189. xy + 6z = 2xz + 3y = 3yz + 2x = 0$$

$$190. \frac{y+z+3}{2} = z + x + 1 = \frac{x+y-2}{5} = \frac{xy+yz+zx}{-10}$$

$$191. x + y + z = 1, \quad ax + by + cz = 0, \quad a^2x + b^2y + c^2z = 0$$

$$192. ax + by + z = zx + ay + b = yz + bx + a = 0$$

$$193. x + y + z = ab, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{b}{a}, \quad xyz = a^3$$

$$194. ayz + by + cz = bzx + cz + ax = cxy + ax + by = a + b + c$$

195. $y^2 + yz + z^2 = ax$
 $z^2 + zx + x^2 = ay$
 $x^2 + xy + y^2 = az$
196. $x(y+z-x) = a$
 $y(z+x-y) = b$
 $z(x+y-z) = c$
197. $x^2 + (y-z)^2 = a^2$
 $y^2 + (z-x)^2 = b^2$
 $z^2 + (x-y)^2 = c^2$
198. $y^2 + z^2 - x(y+z) = a^2$
 $z^2 + x^2 - y(z+x) = b^2$
 $x^2 + y^2 - z(x+y) = c^2$
199. $yz = a(y+z) + \alpha$
 $zx = a(z+x) + \beta$
 $xy = a(x+y) + \gamma$
200. $x^2 - (y-z)^2 = a^2$
 $y^2 - (z-x)^2 = b^2$
 $z^2 - (x-y)^2 = c^2$
201. $x+y+z = x^2+y^2+z^2$
 $= \frac{1}{2}(x^3+y^3+z^3) = 3$
202. $3ux - 2vy = vx + uy$
 $= 3u^2 + 2v^2 = 14$
 $xy = 10uv$
203. $3xy + 2z = xz + 6y$
 $= 2yz + 3x = 0$
204. $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{xyz}{x+y+z}$
205. $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$
 $= x+y+z = 3$
206. $\frac{u(y-x)}{z-u} = a$
 $\frac{z(y-x)}{z-u} = b$
 $\frac{y(u-z)}{x-y} = c$
 $\frac{x(u-z)}{x-y} = d$



จาก 7.00 น. ตรงไปอีก 11,999, 999, 994, นม. จะเป็น
เวลาอะไร ?