

พีชคณิต

ข้อสอบได้ “พีชคณิต ก.” เตรียมอุดมศึกษา ปีการศึกษา 2493 (แผนกอักษรศาสตร์)

ข้อ 1. จงหาค่าของ $\frac{a^2 - 2ax + x^2}{2(a^2 - x^2)} - \frac{2ax(a+x)}{(a-x)(a^2 + 2ax + x^2)} - \frac{x^2 - a^2}{2(x^2 - 2ax + a^2)}$

กำหนดให้ $a = 120$ และ $x = -40$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(a-x)^2}{2(a-x)(a+x)} - \frac{2ax(a+x)}{(a-x)(a+x)^2} - \frac{(x-a)(x+a)}{2(x-a)^2} \\
 &= \frac{(a-x)}{2(a+x)} - \frac{2ax}{(a-x)(a+x)} - \frac{(x+a)}{2(x-a)} \\
 &= \frac{(a-x)}{2(a+x)} - \frac{2ax}{(a-x)(a+x)} + \frac{(a+x)}{2(a-x)} \\
 &= \frac{(a-x)^2 - 4ax + (a+x)^2}{2(a-x)(a+x)} \\
 &= \frac{a^2 - 2ax + x^2 - 4ax + a^2 + 2ax + x^2}{2(a-x)(a+x)} = \frac{2a^2 - 4ax + 2x^2}{2(a-x)(a+x)} \\
 &= \frac{(a-x)^2}{(a-x)(a+x)} = \frac{120 - (-40)}{120 + (-40)} = \frac{160}{80} = 2
 \end{aligned}$$

ข้อ 2. จงแก้สมการต่อไปนี้ $\frac{5x-3}{2x+1} - \frac{x-13}{x+4} = 2$

$$\begin{aligned}
 &\frac{(5x-3)(x+4) - (2x+1)(x-13)}{(2x+1)(x+4)} = 2 \\
 &\frac{(5x-3)(x+4) - (2x+1)(x-13)}{(2x+1)(x+4)} = 2(2x+1)(x+4) \\
 &(5x^2 + 20x - 3x - 12) - (2x^2 - 26x + x - 13) = 2(2x^2 + 8x + x + 4) \\
 &5x^2 + 17x - 12 - 2x^2 + 25x + 13 = 4x^2 + 18x + 8 \\
 &\quad - x^2 + 24x - 7 = 0 \\
 &\quad x^2 + 23x + 7 = 0
 \end{aligned}$$

ข้อ 3. จงหาเทอมสุดท้ายและผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้ $128 - 64 + 32 - 16 + \dots$ รวม 10 เทอม

จากอนุกรม $128 - 64 + 32 - 16$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

มีอัตราส่วนร่วม เท่ากับ $\frac{-64}{128} = \frac{32}{-64} = \frac{-16}{32} = -\frac{1}{2}$

หาผลบวกพจน์ที่ 10 จาก $S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{128(1 - (-\frac{1}{2})^{10})}{1 - (-\frac{1}{2})}$

$$= \frac{128(1 - \frac{1}{1024})}{\frac{3}{2}} = \frac{128 \cdot (\frac{1023}{1024})}{\frac{3}{2}} = \frac{341}{\frac{3}{2}}$$

หาพจน์ที่ 10 จาก $\frac{341}{4} = \frac{128 - a_{10}(-\frac{1}{2})}{1 + \frac{1}{2}}$

$$\frac{341}{4} = \frac{256 + a_{10}}{3}$$

$$\frac{3 \times 341}{4} - 256 = a_{10}$$

$$a_{10} = -\frac{1}{4}$$

ข้อสอบไล่ “พีชคณิต ก.” เตรียมอุดมศึกษา ปีการศึกษา 2494 (แผนกอักษรศาสตร์)

ข้อ 1. ถ้า $a^2 + b^2 = 7ab$ จงพิสูจน์ว่า $a^4 + b^4 = 47a^2b^2$

$$\text{จาก } a^2 + b^2 = 7ab$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 49a^2b^2$$

$$a^4 + b^4 = 47a^2b^2$$

Q.E.D

ข้อ 3. จงแก้สมการ $\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{4x-1}{2}$

$$\text{จากสมการ } \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{4x-1}{2}$$

คูณด้วยพจน์ที่จะทำให้เป็นผลต่างกำลังสอง จะได้

$$\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{4x-1}{2}$$

$$\frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2}{(x+1) - (x-1)} = \frac{4x-1}{2}$$

$$\frac{x+1 + 2\sqrt{(x+1)(x-1)} + x-1}{2} = \frac{4x-1}{2}$$

$$2x + 2\sqrt{(x+1)(x-1)} = 4x - 1$$

$$2\sqrt{(x+1)(x-1)} = 2x - 1$$

$$4(x^2 - 1) = 4x^2 - 4x + 1$$

$$4x^2 - 4 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$4x = 5$$

$$x = \frac{5}{4}$$

ข้อ 5. ถ้ารากทั้งสองของสมการ $x^2 - 2x(1+3m) + 7(3+2m) = 0$ มีค่าเท่ากัน จงหาค่าของ m

การที่ค่าของรากเท่ากันนี้ แสดงว่าพหุนามนี้จะต้องอยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์แน่

$$\text{จะได้ว่า } (1 + 3m)^2 = 7(3 + 2m)$$

$$1 + 6m + 9m^2 = 21 + 14m$$

$$9m^2 - 8m - 20 = 0$$

$$(9m + 10)(m - 2) = 0$$

$$m = 2, -\frac{10}{9}$$

ข้อ 4. จงหาค่าของ m ในสมการ $4x^2 - mx + 9 = 0$ ซึ่งมีรากทั้งสองเท่ากัน

ข้อนี้ ทำนองเดียวกันกับ ข้อ 5 ปี 2494

รากเท่ากัน แสดงว่า ต้องเป็นกำลังสองสมบูรณ์

จัดพจน์ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ จะได้

$$(2x)^2 \pm 2(2)(3)x + (3)^2 = 0$$

ดังนั้น m เท่ากับ 12

ข้อ 2. ถ้า $\frac{b^2 + bx + x^2}{a^2 + ay + y^2} = \frac{b^2 - bx + x^2}{a^2 - ay + y^2}$ จงพิสูจน์ว่า $\frac{x}{a} = \frac{b}{y}$ หรือ $\frac{x}{b} = \frac{y}{a}$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

$$\begin{aligned} \text{จาก } \frac{b^2 + bx + x^2}{a^2 + ay + y^2} &= \frac{b^2 - bx + x^2}{a^2 - ay + y^2} \\ \frac{b^2 + bx + x^2}{b^2 - bx + x^2} &= \frac{a^2 + ay + y^2}{a^2 - ay + y^2} \\ \frac{(b^2 + x^2) + bx}{(b^2 + x^2) - bx} &= \frac{(a^2 + y^2) + ay}{(a^2 + y^2) - ay} \end{aligned}$$

จากกฎของสัดส่วน Compo et Dividendo

$$\begin{aligned} \text{ถ้า } \frac{a}{b} &= \frac{x}{y} \quad \text{แล้ว } \frac{a+b}{a-b} = \frac{x+y}{x-y} \\ \frac{b^2 + x^2}{bx} &= \frac{a^2 + y^2}{ay} \\ \frac{ay(b^2 + x^2)}{ab^2y + ayx^2} &= \frac{bx(a^2 + y^2)}{ba^2x + bxy^2} \\ \frac{ab^2y - ba^2x}{ab(by - ax)} &= \frac{bxy^2 - ayx^2}{xy(by - ax)} \\ \frac{ab}{ab} &= \frac{xy}{xy} \\ \frac{x}{a} &= \frac{b}{y} \end{aligned}$$

Q.E.D

- ข้อ 5. ค่าพิมพ์สมุดรายงานประจำตัวนักเรียนเป็นจำนวนคงที่เสียส่วนหนึ่ง และแปรตามจำนวนเล่มที่พิมพ์อีกส่วนหนึ่ง ในการพิมพ์สมุด 80 เล่ม ค่าพิมพ์เป็น 64 บาท และในการพิมพ์สมุด 120 เล่ม ค่าพิมพ์เป็น 88 บาท ถามว่าในการพิมพ์สมุดรายงาน 200 เล่ม ค่าพิมพ์จะเป็นเท่าไร

$$\begin{aligned} \text{จากข้อมูล} \quad & \text{ให้ค่าพิมพ์} = P & \text{จำนวนเล่ม} = b \\ \text{จะได้ว่า} \quad & P \propto b \\ & P = kb & \text{โดยที่ } k \text{ เป็นค่าคงตัว} \\ \text{หาค่าของ } k ; & 64 = 80k \\ & k = \frac{64}{80} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

- ข้อ 2. จงหาเทอมที่ n ผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้ $0.45, 0.015, 0.0005, \dots$

$$\begin{aligned} \text{จาก } a_n &= S_n - S_{n-1} \\ \text{เราพบว่าเป็นลำดับเรขาคณิต มีผลต่างร่วม} &= \frac{0.015}{0.45} = \frac{0.0005}{0.015} = \dots = \frac{1}{30} \\ \text{จาก } T_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \\ T_n &= \frac{45}{100} \cdot \left(\frac{1}{30}\right)^{n-1} \\ &= \frac{45}{100} \cdot \frac{\left(\frac{1}{30}\right)^n}{\left(\frac{1}{30}\right)} = \frac{45}{100} \cdot 30 \cdot \left(\frac{1}{30}\right)^n \\ &= \frac{135}{10} \cdot \left(\frac{1}{30}\right)^n \end{aligned}$$

ข้อสอบได้ “พิชคณิต ก.” เตรียมอุดมศึกษา ปีการศึกษา 2495 (แผนกอักษรศาสตร์)

- ข้อ 1. จงแก้สมการต่อไปนี้ $(x+y)^2 - z^2 = 65, \quad x^2 - (y+z)^2 = 13, \quad x+y-z = 5$

$$\begin{aligned} \text{กำหนดสมการ} \quad & (x+y)^2 - z^2 &= 65 & \dots(1) \\ & x^2 - (y+z)^2 &= 13 & \dots(2) \\ & x+y-z &= 5 & \dots(3) \\ \text{จากสมการที่ (1) ;} & (x+y-z)(x+y+z) &= 65 \\ \text{แทน (3) ใน (1) ;} & 5(x+y+z) &= 65 \\ & x+y+z &= 13 & \dots(4) \\ \text{จากสมการที่ (2) ;} & (x-y-z)(x+y+z) &= 13 & \dots(5) \\ \text{แทน (4) ใน (5) ;} & 13(x-y-z) &= 13 & \dots(6) \end{aligned}$$

$$x - y - z = 1 \quad \dots(7)$$

$$(4) + (7) \quad ; \quad x = 7$$

$$\text{แทนค่าของ } x \text{ ใน (3) ;} \quad 7 + y - z = 5$$

$$y - z = -2 \quad \dots(8)$$

$$\text{แทนค่าของ } x \text{ ใน (4) ;} \quad 7 + y + z = 13$$

$$y + z = 6 \quad \dots(9)$$

$$(8) + (9) \quad ; \quad 2y = 4$$

$$y = 2$$

$$\text{แทนค่าของ } x \text{ และ } y \text{ ใน (3) จะได้} \quad 7 + 2 - z = 5$$

$$z = 7 + 2 - 5$$

$$z = 4$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ (7, 2, 4)

ข้อ 4. ถ้า $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ จงพิสูจน์ว่า $\frac{2a^4b^2 + 3a^2e^2 - 5e^4f}{2b^6 + 3b^2f^2 - 5f^5} = \frac{a^4}{b^4}$

$$\text{จาก } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \text{ จะได้ว่า } a = b = \frac{de}{cf}, a = \frac{bcf}{d} = e, a = f = \frac{ed}{bc}$$

$$\text{และ } b = f = \frac{c}{ade}$$

$$\text{จาก } \frac{2a^4b^2 + 3a^2e^2 - 5e^4f}{2b^6 + 3b^2f^2 - 5f^5} = \frac{2a^4a^2 + 3a^2a^2 - 5a^4a}{2b^6 + 3b^2b^2 - 5b^5}$$

$$= \frac{2a^6 + 3a^4 - 5a^5}{2b^6 + 3b^4 - 5b^5}$$

$$= \frac{a^4(2a^2 + 3 - 5a)}{b^4(2b^4 + 3 - 5b)}$$

$$\text{เนื่องจาก } a = b \text{ จากที่ได้ จะได้ว่า } = \frac{a^4(2a^2 + 3 - 5a)}{b^4(2a^4 + 3 - 5a)} = \frac{a^4}{b^4} \quad \text{Q.E.D}$$

ข้อ 5. นักเรียนคนหนึ่งเดินจากบ้านไปโรงเรียนด้วยความเร็วสม่ำเสมอ ถ้าเขาเดินได้ชั่วโมงละ 10 กิโลเมตร เขาจะเดินไปโรงเรียนสายไป 1 นาที แต่ถ้าเดินได้ชั่วโมงละ 12 กิโลเมตร เขาจะไปถึงก่อนเวลาครึ่งนาที ถามว่าระยะทางจากบ้านถึงโรงเรียนยาวกี่กิโลเมตร ถ้าเขาต้องการจะไปถึงโรงเรียนทันเวลาพอดี เขาจะต้องเดินชั่วโมงละกี่กิโลเมตร

ให้ระยะทางระหว่างบ้านไปยังโรงเรียน เท่ากับ S กิโลเมตร

ให้ใช้เวลาเดินทางระหว่างบ้านกับโรงเรียนที่ทันเวลาพอดี เท่ากับ t ชั่วโมง

ให้ความเร็วในการเดินทาง เท่ากับ v กิโลเมตรต่อชั่วโมง

$$\text{จาก } \text{ระยะทาง} = \text{ความเร็ว} \times \text{เวลา} \quad \text{จะได้ } S = vt$$

กรณีเดินทางด้วยความเร็ว 10 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จะได้ว่า

$$S = 10 \cdot \left(t + \frac{1}{60} \right) \quad \dots(1)$$

กรณีเดินทางด้วยความเร็ว 12 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จะได้ว่า

$$S = 12 \cdot \left(t - \frac{1}{120} \right) \quad \dots(2)$$

$$(1) = (2); \quad 10 \cdot \left(t + \frac{1}{60} \right) = 12 \cdot \left(t - \frac{1}{120} \right)$$

$$10t + \frac{1}{6} = 12t - \frac{1}{10}$$

$$2t = \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$$

$$2t = \frac{16}{60}$$

$$t = \frac{8}{60} = 8 \text{ นาที}$$

หาระยะทาง โดยแทน t ในสมการที่ (1)

$$S = 10 \cdot \left(\frac{8}{60} + \frac{1}{60} \right) = 10 \cdot \left(\frac{9}{60} \right) = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ กิโลเมตร}$$

หาอัตราเร็ว ถ้าไปโรงเรียนทันเวลาพอดี จะได้ $1.5 = v \cdot \frac{8}{60}$

$$v = \frac{60 \cdot 1.5}{8} = \frac{90}{8} = 11.25 \text{ กิโลเมตรต่อชั่วโมง}$$

ข้อสอบไล่ “พีชคณิต ก.” เตรียมอุดมศึกษา ปีการศึกษา 2492 (แผนกอักษรศาสตร์)

ข้อ 1. จงแก้สมการ $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 11$ และ $\frac{1}{xy} = -28$

$$\text{จากสมการ} \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 11 \quad \dots(1)$$

$$\frac{1}{xy} = -28 \quad \dots(2)$$

$$\text{จาก (1)} \quad \frac{x-y}{xy} = 11 \quad \dots(3)$$

$$\text{จาก (2) แทนใน (1)} \quad \frac{x-y}{-\frac{1}{28}} = 11 \quad \dots(4)$$

$$x-y = -\frac{11}{28} \quad \dots(5)$$

$$\text{จัดเทอมของ } y \quad y = x - \frac{11}{28} \quad \dots(6)$$

$$\text{แทน (6) ใน (2)} \quad \frac{1}{x(x - \frac{11}{28})} = -28 \quad \dots(7)$$

$$1 = -28x(x - \frac{11}{28})$$

$$1 = -28x^2 + 11x$$

$$28x^2 - 11x + 1 = 0$$

$$(7x-1)(4x-1) = 0$$

$$x = \frac{1}{4}, \frac{1}{7}$$

$$\text{แทนค่า } x \text{ ใน (1)} \quad \text{กรณีที่ } x = \frac{1}{4}; \quad 4 - \frac{1}{y} = 11; \quad y = -\frac{1}{7}$$

$$\text{กรณีที่ } x = \frac{1}{7}; \quad 7 - \frac{1}{y} = 11; \quad y = -\frac{1}{4}$$

$$\text{ดังนั้นคำตอบของระบบสมการคือ } (\frac{1}{4}, -\frac{1}{7}) \text{ และ } (\frac{1}{7}, -\frac{1}{4})$$

ข้อ 4. ถ้า $y = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $x = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ จงหาค่าของ $3y^2 - 5xy + 3x^2$

$$\text{แยกตัวประกอบของพหุนาม } 3y^2 - 5xy + 3x^2 = (3y-x)(y-x)$$

ข้อ 5. จงแก้สมการ $\sqrt{3x^2-2x+9} + \sqrt{3x^2-2x-4} = 13$

ข้อ 3. ถ้ารากทั้งสองของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ มีสัดส่วนเป็น 3 ต่อ 2 จงพิสูจน์ว่า $25ac = 6b^2$

ทำสมการที่กำหนดให้ให้อยู่ในรูปพหุนามโมนิก จะได้ว่า

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

สมมติให้รากของสมการพหุนามดังกล่าว เท่ากับ β และ γ

และกำหนดให้ $\frac{3}{2} = \frac{\beta}{\gamma}$ จะได้ว่า $3\gamma = 2\beta$; $\gamma = \frac{2\beta}{3}$

จะได้ความสัมพันธ์ว่า $3\gamma + 2\beta = -\frac{b}{a}$ จะได้ $a = -\frac{b}{3\gamma + 2\beta}$
และจะได้ $b = -a(3\gamma + 2\beta)$

$6\gamma\beta = \frac{c}{a}$ จะได้ $c = a(6\gamma\beta)$

หาค่าของ $25ac = 25 \cdot \left(-\frac{b}{3\gamma + 2\beta}\right) \cdot a(6\gamma\beta)$
 $= 25 \cdot \left(-\frac{b}{3\gamma + 2\beta}\right) \cdot \left(-\frac{b}{3\gamma + 2\beta}\right) \cdot (6\gamma\beta)$
 $= 25 \cdot \frac{b}{3\left(\frac{2\beta}{3}\right) + 2\beta} \cdot \frac{b}{3\left(\frac{2\beta}{3}\right) + 2\beta} \cdot (6\gamma\beta)$
 $= 25 \cdot \frac{b}{2\beta + 2\beta} \cdot \frac{b}{2\beta + 2\beta} \cdot \left(6 \cdot \frac{2\beta}{3} \beta\right)$
 $= 25 \cdot \frac{b^2}{16\beta^2} \cdot 4\beta^2$
 $= \frac{25}{4} b^2$

ข้อสอบไล่ “พีชคณิต” เตรียมอุดมศึกษา ปีการศึกษา 2500 (แผนกอักษรศาสตร์)

ข้อ 1. จงพิสูจน์ว่าสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ มีรากมากกว่าสองรากไม่ได้

สมมติให้คำตอบของสมการ มี 3 คำตอบ คือ γ , β และ α ซึ่งแต่ละคำตอบไม่เท่ากัน

$$\text{จะได้สมการเป็น} \quad a\gamma^2 + b\gamma + c = 0 \quad \dots(1)$$

$$a\beta^2 + b\beta + c = 0 \quad \dots(2)$$

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \quad \dots(3)$$

$$\text{นำ (1) - (2); } a\gamma^2 + b\gamma + c - a\beta^2 - b\beta - c = 0$$

$$a(\gamma^2 - \beta^2) + b(\gamma - \beta) = 0$$

$$a(\gamma + \beta)(\gamma - \beta) + b(\gamma - \beta) = 0$$

เนื่องจาก $\gamma - \beta \neq 0$ ดังนั้น

$$a(\gamma + \beta) + b = 0 \quad \dots(4)$$

$$\text{นำ (2) - (3); } a\beta^2 + b\beta + c - a\alpha^2 - b\alpha - c = 0$$

$$\text{ทำนองเดียวกัน จะได้ว่า } a(\beta + \alpha) + b = 0 \quad \dots(5)$$

$$\text{นำ (4) - (5); } a(\gamma + \beta) - a(\beta + \alpha) = 0$$

$$\gamma + \beta - \beta - \alpha = 0$$

$$\gamma - \alpha = 0$$

$$\gamma = \alpha$$

ซึ่ง $\gamma = \alpha$ ขัดแย้งกับที่กำหนดไว้ข้างต้น

ดังนั้น คำตอบของสมการกำลังสองจึงมีจำนวนคำตอบสูงสุด 2 คำตอบเท่านั้น

ข้อสอบไล่ “คณิตศาสตร์ 2 ข. (วิชาเลือก)” เตรียมอุดมศึกษา ปีการศึกษา 2500 (แผนกอักษรศาสตร์)

ข้อ 1. ถ้ารากหนึ่งของ $x^2 + px + q = 0$ เป็น 3 เท่าของอีกรากหนึ่ง จงแสดงให้เห็นว่า $3p^2 = 16q$

ให้รากของสมการกำลังสองเป็น γ ดังนั้นอีกรากหนึ่งจะเป็น 3γ

$$\text{เราจะได้ความสัมพันธ์ว่า } -(\gamma + 3\gamma) = p$$

$$\text{และ} \quad 3\gamma^2 = q$$

$$\text{จาก } p \text{ จะได้ว่า} \quad 3p^2 = 3(-4\gamma)^2$$

$$= 3(16\gamma^2)$$

$$= 16(3\gamma^2)$$

$$= 16q$$

Q.E.D.

ข้อ 4. ถ้า $\frac{3x+4y}{7x-3y} = \frac{18}{5}$ จงหาค่าของ $\frac{x^2-3xy+4y^2}{x^2+3xy+4y^2}$

53. Solve $\sqrt[3]{6(5x+6)} - \sqrt[3]{5(6x-11)} = 1$.

[QUEENS' COLL. CAMB.]

$$\sqrt[3]{6(5x+6)} - \sqrt[3]{5(6x-11)} = 1$$

$$\sqrt[3]{30x+36} - \sqrt[3]{30x-55} = 1$$

ให้ $30x + 36 = A$

$$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{A-91} = 1$$

ตรีโกณมิติ

$$\frac{15}{4} \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } \tan(A+B) &= \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} \\ &= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B} \\ &= \frac{\frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} + \frac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\frac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B} - \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}} \quad \text{เมื่อ } \cos A, \cos B \neq 0 \\ &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \end{aligned}$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

ข้อสอบได้ตรีโกณมิติ เตรียมอุดมศึกษา ปีการศึกษา 2500

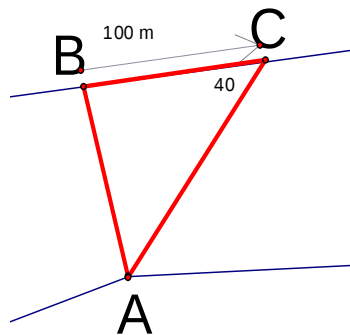
แผนกอักษรศาสตร์

ข้อ 1. จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้ $\frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{1}{1+\cot^2 A} = 1$

$$\text{พิจารณา } \frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{1}{1+\cot^2 A} = \frac{1}{1+\left(\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)} + \frac{1}{1+\left(\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}\right)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos^2 A}} + \frac{1}{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin^2 A}} \\
 &= \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A + \cos^2 A} + \frac{\sin^2 A}{\sin^2 A + \cos^2 A} \\
 &= \frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\sin^2 A + \cos^2 A} = 1 \quad \text{Q.E.D}
 \end{aligned}$$

- ข้อ 5. ชายคนหนึ่งต้องการวัดความกว้างของแม่น้ำ เขายืนอยู่ริมฝั่งที่จุด B แล้วมองข้ามไปที่ A ฝั่งตรงข้าม ซึ่งเป็นระยะสั้นที่สุด และตรงกันข้ามพอดี แล้วก็เดินเลียบฝั่งแม่น้ำนี้ไป 100 เมตร ถึงหยุดที่ C วัดมุม BCA ได้ 40° จงหาส่วนกว้างของแม่น้ำ (กำหนดให้ $\tan 40^\circ = 0.8391$)



$$\begin{aligned}
 \text{หา BA จาก } \tan 40^\circ &= \frac{BA}{100} \\
 0.8391 \cdot 100 &= BA \\
 BA &= 83.91 \text{ เมตร}
 \end{aligned}$$

- ข้อ 5. เสา $ABCDE$ ปักอยู่บนสนามแห่งหนึ่ง ส่วนของเสา AB , AC และ AD ปิดมุม ณ จุด P บนสนามแห่งนี้ มีค่าเท่ากับ α , β และ γ ตามลำดับ ถ้า $AB = 2$, $AC = 16$, $AD = 18$ และ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ จงหาระยะทาง AP

ข้อ 2. จงพิสูจน์เอกลักษณ์ $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{1 + 2 \sin x \cos x}{1 - 2 \cos^2 x}$

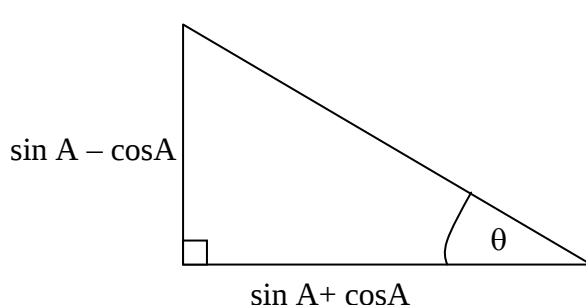
วิธีทำ พิจารณานิพจน์ทางขวามือ

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2 \sin x \cos x}{1 - 2 \cos^2 x} &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}{-(2 \cos^2 x - 1)} \\ &= \frac{(\sin x + \cos x)^2}{-(2 \cos 2x)} \\ &= \frac{(\sin x + \cos x)^2}{-(\cos^2 x - \sin^2 x)} \\ &= \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin^2 x - \cos^2 x} \\ &= \frac{(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)} \\ &= \frac{(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)} = \text{นิพจน์ทางขวามือ} \quad \#\#\# \end{aligned}$$

ข้อ 1. จงหาค่าของมุม A จากสมการนี้ $2 \cos A \cot A + 1 = \cot A + 2 \cos A$

ข้อ 3. ถ้า $\tan \theta = \frac{\sin A - \cos A}{\sin A + \cos A}$ จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{2} \sin \theta = \sin A - \cos A$

จาก $\tan \theta = \frac{\sin A - \cos A}{\sin A + \cos A}$ สร้างรูปสามเหลี่ยมเพื่อการพิสูจน์ จากรูปหาด้านตรงข้ามมุมฉาก จะได้



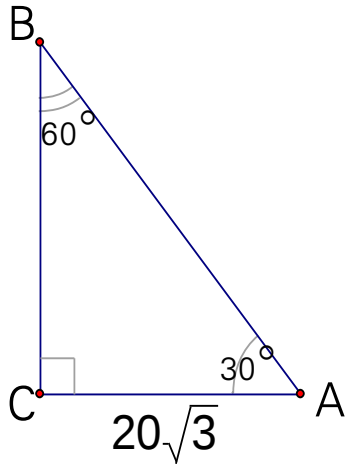
ด้านตรงข้ามมุมฉาก

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(\sin A - \cos A)^2 + (\sin A + \cos A)^2} \\ &= \sqrt{\sin^2 A - 2 \cos A \sin A + \cos^2 A + \sin^2 A + 2 \cos A \sin A + \cos^2 A} \\ &= \sqrt{2(\sin^2 A + \cos^2 A)} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

พิจารณา $\sin \theta = \frac{\sin A - \cos A}{\sqrt{2}}$ ดังนั้น $\sqrt{2} \sin \theta = \sin A - \cos A \quad \#\#\#$

ข้อ 4. สามเหลี่ยม ABC มี $b = 20\sqrt{3}$, $A = 30^\circ$, $B = 60^\circ$ จงหาด้าน a และ

ด้าน c หาได้จาก



$$\tan 30^\circ = \frac{a}{20\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{20\sqrt{3}}$$

$$a = 20 \text{ หน่วย}$$

ด้าน c หาได้จาก

$$\sin 60^\circ = \frac{20\sqrt{3}}{c}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{c}$$

$$c = 40 \text{ หน่วย}$$

26. Prove the identities:

$$(1) (\sin A - \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A - \sec A)^2 = \cot^2 A + \tan^2 A - 1;$$

25. Find the numerical value of

$$3 \tan^2 45^\circ - \sin^2 60^\circ - \frac{1}{2} \cot^2 30^\circ + \frac{1}{8} \sec^2 45^\circ;$$

and find x from the equation

$$\operatorname{cosec} (90^\circ - A) - x \cos A \cot (90^\circ - A) = \sin (90^\circ - A).$$

25.1 จงหาค่าที่เป็นจำนวน ของ $3 \tan^2 45^\circ - \sin^2 60^\circ - \frac{1}{2} \cot^2 30^\circ + \frac{1}{8} \sec^2 45^\circ$

$$\begin{aligned} &= 3(1)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{3})^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= 3 - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = 3 - \frac{3}{4} - \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = 3 - \frac{8}{4} = 1 \end{aligned}$$

25.2 จงหาค่า x จากสมการ $\operatorname{cosec} (90^\circ - A) - x \cos A \cot (90^\circ - A) = \sin (90^\circ - A)$
เปลี่ยนเป็น Co-Function

$$\begin{aligned} \sec A - x \cos A \tan A &= \cos A \\ \sec A - x \sin A &= \cos A \\ \sec A - \cos A &= x \sin A \\ \frac{1}{\cos A} - \cos A &= x \sin A \\ \frac{1 - \cos^2 A}{\cos A} &= x \sin A \\ \frac{\sin^2 A}{\cos A} &= x \sin A \\ \frac{\sin^2 A}{\cos A} &= x \sin A \\ \tan A &= x \end{aligned}$$

ดังนั้นค่าของ x จากสมการคือ $\tan A$

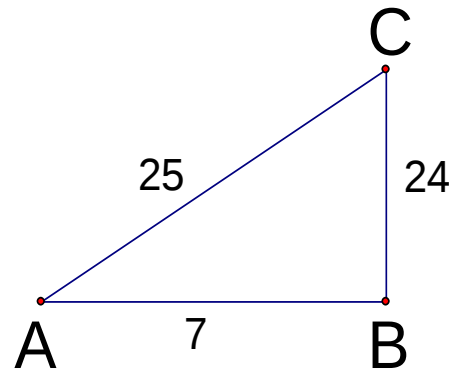
ตอบ....

34. Given that $\sec A = \frac{25}{7}$, find all the other Trigonometrical ratios of A .

เพื่อความสะดวกในการหาค่า จะวาดรูป
จะได้อัตราส่วนดังนี้

$$\sin A = \frac{24}{25}, \cos A = \frac{7}{25}, \tan A = \frac{24}{7}$$

$$\csc A = \frac{25}{24}, \sec A = \frac{25}{7}, \cot A = \frac{7}{24}$$



23. Shew that

$$(1) \sin \theta \cos \theta \left\{ \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \operatorname{cosec} \theta + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sec \theta \right\} = 1;$$

$$(2) \frac{\tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{\sec \theta} \cdot \frac{\cot^2 \theta}{\sec \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)} \cdot \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{\sin^3 \theta} = \cot^5 \theta.$$

23.1 พิจารณานิพจน์ทางซ้ายมือ จะได้ว่า

$$= \sin \theta \cos \theta [\cos \theta \operatorname{cosec} \theta + \sin \theta \sec \theta]$$

$$= \sin \theta \cos \theta \left[\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right]$$

$$= \sin \theta \cos \theta \left[\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \right]$$

$$= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1$$

= นิพจน์ทางขวามือ

Q.E.D.

23.2 พิจารณานิพจน์ทางซ้ายมือ จะได้ว่า

$$= \frac{\cot \theta}{\sec \theta} \cdot \frac{\cot^2 \theta}{\csc \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta}$$

$$= \frac{\cot^3 \theta \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$= \cot^5 \theta$$

= นิพจน์ทางขวามือ

Q.E.D.

21. In a triangle, right-angled at C , find c and b , given that $a+c=281$, $\cos B=.405$.

21. ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เมื่อกำหนดมุมฉากที่มุม C จงหาความยาวด้าน c และ b เมื่อกำหนดให้ $a + c = 281$ และ $\cos B = .405$

ระบุนายละเอียดจากที่โจทย์กำหนดให้

หาความยาวด้าน หาความยาวของด้าน c โดยเทียบสัดส่วน

$$\cos B = 0.405 = \frac{a}{c}$$

$$\text{หา } c \text{ จะได้ } c = 281 - a$$

$$0.405 = \frac{a}{281 - a}$$

$$113.805 - 0.405a = a$$

$$113.805 = 1.405a$$

$$a = 81$$

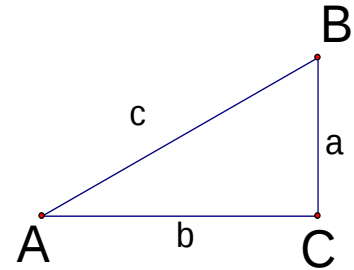
$$c = 281 - 81 = 200$$

$$\text{หา } b \text{ จาก } (200)^2 = (81)^2 + b^2$$

$$(200 + 81)(200 - 81) = b^2$$

$$281 \cdot 119 = b^2$$

$$b = 182.86$$



44. In a triangle ABC right-angled at C shew that

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} - \frac{\cos^2 A}{\cos^2 B} = \frac{a^4 - b^4}{a^2 b^2}$$

พิจารณานิพจน์ทางซ้ายมือ

$$= \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} - \frac{\cos^2 A}{\cos^2 B}$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{c}\right)^2}{\left(\frac{b}{c}\right)^2} - \frac{\left(\frac{b}{c}\right)^2}{\left(\frac{a}{c}\right)^2}$$

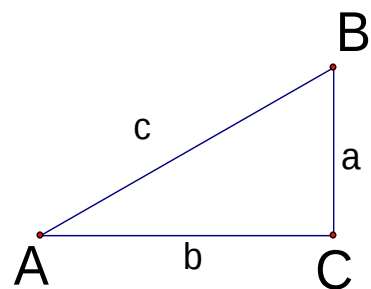
$$= \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}$$

$$= \frac{\frac{a^2}{c^2} - \frac{b^2}{c^2}}{\frac{b^2}{c^2} - \frac{a^2}{c^2}}$$

$$= \frac{a^4 - b^4}{a^2 b^2}$$

= นิพจน์ทางขวา

Q. E. D



28. Find two values of θ which satisfy

$$2 \cos \theta \cot \theta + 1 = \cot \theta + 2 \cos \theta.$$

$$2 \cos \theta \cdot \cot \theta + 1 = \cot \theta + 2 \cos \theta$$

$$2 \cos \theta \cdot \cot \theta - \cot \theta = 2 \cos \theta - 1$$

$$\cot \theta (2 \cos \theta - 1) = 2 \cos \theta - 1 ; 2 \cos \theta - 1 \neq 0$$

$$\cot \theta = 1$$

$$\theta = 45^\circ, 405^\circ$$

$$\text{หรือ } \theta \text{ อาจจะ เท่ากับ } 360^\circ n + 45^\circ$$

36. Walking down a hill inclined to the horizon at an angle θ a man observes an object in the horizontal plane whose angle of depression is α . Half way down the hill the angle of depression is β . Prove that $\cot \theta = 2 \cot \alpha - \cot \beta$.

แปลโจทย์ : น่องตงเดินลงมาจากเขาที่มีความเอียง ทำมุม θ กับแนวระดับ. น่องตงสำรวจวัตถุบนพื้นราบที่มีมุมก้มเท่ากับ α ครึ่งทางของการลงเขาทำมุมก้มเป็น β จงพิสูจน์ว่า $\cot \theta = 2 \cot \alpha - \cot \beta$

24. From a station two lighthouses A, B , are seen in directions N. and N.E. respectively; but if A were half as far off as it really is, it would appear due W. from B . Compare the distances of A and B from the station.

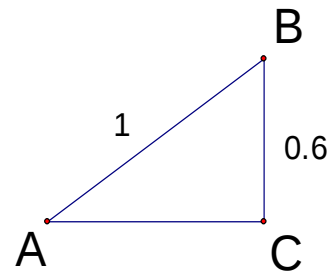
แปลโจทย์ : ประภาคาร A และ B อยู่ทิศเหนือ และตะวันออกเฉียงเหนือจากสถานี ถ้าระยะทางของ A เหลือครึ่งหนึ่ง แล้ว ประภาคาร A นี้จะอยู่ทางตะวันตกของ B จงเปรียบเทียบระยะทางของประภาคาร A และ B จากสถานี

46. Determine the value of $\sin (270^\circ + A)$ when $\sin A = 0.6$.

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad &= \sin 270^\circ \cos A + \cos 270^\circ \sin A \\ &= -1 (\cos A) + 0 \\ &= -1 (\cos A)\end{aligned}$$

นี่อะไร ไม่ออกบอกสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\begin{aligned}\text{หา AC จาก } 1 - 0.36 &= 0.64 \quad (AC)^2 \\ AC &= 0.8 \\ &= -1(0.8) = -0.8\end{aligned}$$



51. Find the value of

$$(1) \cot^2 \frac{\pi}{6} - 2 \cos^2 \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4} \sec^2 \frac{\pi}{4} - 4 \sin^2 \frac{\pi}{6};$$

$$(2) 2 \sec^2 180^\circ \sin 0^\circ - \cos 2\pi + \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned}51.1 \quad \cot^2 \frac{\pi}{6} - 2 \cos^2 \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4} \sec^2 \frac{\pi}{4} - 4 \sin^2 \frac{\pi}{6} &= \cot^2 30^\circ - 2 \cos^2 60^\circ - \frac{3}{4} \sec^2 45^\circ - 4 \sin^2 30^\circ \\ &= (\sqrt{3})^2 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)^2 - 4 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \\ &= 3 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 1 \\ &= 3 - 2 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}51.2 \quad 2 \sec^2 180^\circ \sin 0^\circ - \cos 360^\circ + \operatorname{cosec} 270^\circ \\ &= 2(-1)^2 \cdot 0 - 1 + (-1) \\ &= -2\end{aligned}$$

49. If $\cos A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, find $\tan A$, drawing a diagram to explain the two values.

พิจารณาค่าในจุดภาคที่ 2 ซึ่งค่า $\cos$ เป็นลบ

สมมติว่าไม่รู้ค่า $\cos A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

จะได้ค่า $\cos A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ทราบความยาวด้าน 2 ด้าน ใช้ ทบ ปีทาгорัส

จะได้ความยาวด้าน BC เท่ากับ 1

ดังนั้น จะได้ค่า $\tan A = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

พิจารณาค่าในจุดภาคที่ 3 ซึ่งค่า $\cos$ เป็นลบเช่นกัน

คิดเหมือนด้านบน

สมมติว่าไม่รู้ค่า $\cos A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

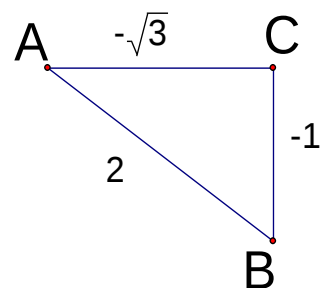
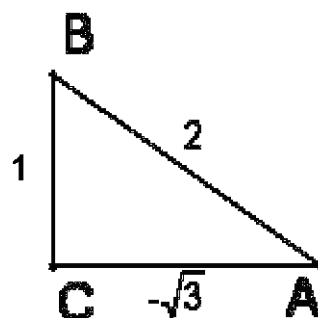
จะได้ค่า $\cos A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ทราบความยาวด้าน 2 ด้าน ใช้ ทบ ปีทาгорัส

จะได้ความยาวด้าน BC เท่ากับ -1 (พิจารณาตามระบบพิกัดฉาก)

ดังนั้น จะได้ค่า $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ทำมุมในจุดภาคที่ 2 (ค่า $\cos$ เป็นลบ)



89. Prove that $\log_a b \log_b c \log_c a = 1$.

Given $\log_{10} 3 = 0.47712$, $\log_{10} 8 = 0.90309$, find the values of $\log_{10} 2.4$, $\log_{10} 5400$, $L \tan 30^\circ$.

89.1 ตอนแรกพิสูจน์ก่อน พิจารณานิพจน์ทางซ้ายมือ จะได้ว่า

$$= \frac{\log b}{\log a} \cdot \frac{\log c}{\log b} \cdot \frac{\log a}{\log c} = 1$$

ต่อมา โจทย์อยากให้เราหาค่า (เนื่องจากเป็น log ฐาน 10 ขอไม่เขียนฐานละกัน)

$$\begin{aligned} 89.2 \quad \log 2.4 &= \log 24 \times 10^{-1} = \log 24 + \log 10^{-1} \\ &= -1 + \log (8 \times 3) \\ &= -1 + \log 8 + \log 3 \\ &= -1 + 0.90309 + 0.47712 \\ &= 0.38021 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 89.3 \quad \log 5400 &= \log 54 \times 10^2 \\ &= \log 18 \times 3 + \log 10^2 \\ &= 2 + \log 3^3 \times 2 \\ &= 2 + 3\log 3 + \log 2 \end{aligned}$$

พิจารณาค่า $\log 8 = 0.90309$

$$3\log 2 = 0.90309$$

$$\log 2 = 0.30103$$

แทนค่าต่อ $= 2 + 3(0.47712) + 0.30103$
 $= 3.73239$

$$89.4 \quad L \tan 30^\circ = L \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(ไม่รู้ L นั้นหมายความว่าอย่างไร?)

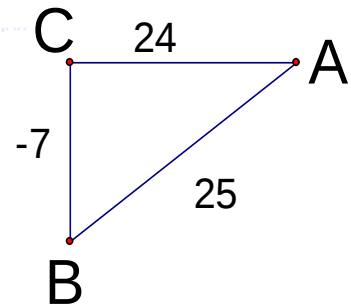
97. If A be between 270° and 360° , and $\sin A = -\frac{7}{25}$,

find the values of $\sin 2A$ and $\tan \frac{A}{2}$.

พิจารณาแล้ว มุม A ตกในจุดภาคที่ 4

ค่า $\sin$ และ $\tan$ เป็นลบ แต่ $\cos$ เป็นบวก

วาดรูปประกอบ จาก ทบ ปี่ทากอรัส จะได้ $CA = 24$



$$\begin{aligned} 97.1 \text{ หาค่า } \sin 2A &= 2 \sin A \cos A \\ &= 2 \cdot \left(-\frac{7}{25}\right) \cdot \left(\frac{24}{25}\right) \\ &= -\frac{336}{625} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 97.2 \text{ หาค่า } \tan \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} && \text{แต่ } \tan \text{ อยู่ใน Q4 เลือกค่าเป็นลบ} \\ &= -\sqrt{\frac{1 - \frac{24}{25}}{1 + \frac{24}{25}}} && = -\sqrt{\frac{\frac{1}{25}}{\frac{49}{25}}} = -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

85. Prove that

$$(1) \sin A \sin (B-C) + \sin B \sin (C-A) + \sin C \sin (A-B) = 0;$$

$$(2) \tan \theta = \frac{\sin \theta + \sin 2\theta}{1 + \cos \theta + \cos 2\theta}$$

85.1 พิจารณานิพจน์ทางด้านซ้าย จะได้ว่า

$$\begin{aligned} &= \sin A [\sin B \cos C - \cos B \sin C] + \sin B [\sin C \cos A - \cos C \sin A] \\ &\quad + \sin C [\sin A \cos B - \cos A \sin B] \\ &= \sin A \sin B \cos C - \sin A \cos B \sin C + \cos A \sin B \sin C - \sin A \sin B \cos C + \sin A \cos B \sin C - \cos A \sin B \sin C \\ &= 0 \end{aligned}$$

85.2 พิจารณานิพจน์ทางด้านขวา

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta + \sin 2\theta}{1 + \cos \theta + \cos 2\theta} &= \frac{\sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta}{1 + \cos \theta + 2 \cos^2 \theta - 1} \\ &= \frac{\sin \theta (1 + 2 \cos \theta)}{\cos \theta (1 + 2 \cos \theta)} \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = \text{นิพจน์ทางซ้ายมือ} \quad \text{Q.E.D} \end{aligned}$$

53. If $b \tan \theta = a$, find the value of

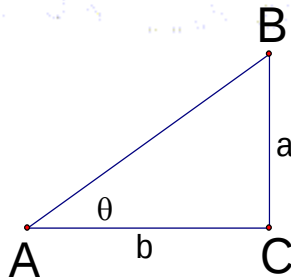
$$\frac{a \sin \theta - b \cos \theta}{a \sin \theta + b \cos \theta}$$

จาก $b \tan \theta = a$

$$\tan \theta = \frac{a}{b}$$

จะได้ $\sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\cos \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



$$\begin{aligned} \frac{a \sin \theta - b \cos \theta}{a \sin \theta + b \cos \theta} &= \frac{a \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - b \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{a \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + b \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \\ &= \frac{a^2 \sqrt{a^2 + b^2} - b^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 \sqrt{a^2 + b^2} + b^2 \sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\frac{a^2 \sqrt{a^2 + b^2} + b^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2} (a^2 - b^2)}{\sqrt{a^2 + b^2} (a^2 + b^2)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

82. Prove that $\cos 6^\circ \cos 66^\circ \cos 42^\circ \cos 78^\circ = \frac{1}{16}$.

$$\cos 6^\circ \cos 66^\circ \cos 42^\circ \cos 78^\circ$$

$$= \frac{1}{4} (2\cos 78^\circ \cos 42^\circ) (2\cos 66^\circ \cos 6^\circ)$$

$$= \frac{1}{4} (\cos 120^\circ + \cos 36^\circ) (\cos 72^\circ + \cos 60^\circ)$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} + \cos 36^\circ \right) \left(\cos 72^\circ + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \cos 72^\circ - \frac{1}{4} + \cos 36^\circ \cos 72^\circ + \frac{1}{2} \cos 36^\circ \right)$$

$$= -\frac{1}{8} \cos 72^\circ - \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \cos 36^\circ \cos 72^\circ + \frac{1}{8} \cos 36^\circ$$

$$= -\frac{1}{8} \cos 2(36^\circ) - \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \cos 36^\circ \cos 2(36^\circ) + \frac{1}{8} \cos 36^\circ$$

$$= -\frac{1}{8} (2 \cos^2 36^\circ - 1) - \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \cos 36^\circ (2 \cos^2 36^\circ - 1) + \frac{1}{8} \cos 36^\circ$$

$$= -\frac{1}{4} \cos^2 36^\circ + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4} (2 \cos^3 36^\circ - \cos 36^\circ) + \frac{1}{8} \cos 36^\circ$$

$$= \frac{1}{4} \cos^3 36^\circ - \frac{1}{4} \cos^2 36^\circ + \frac{1}{8} \cos 36^\circ + \frac{1}{16}$$

$$=$$

73. Simplify $1 - \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cot \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{1 + \tan \theta}$.

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cot \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{1 + \tan \theta} \\
 &= 1 - \frac{\sin^2 \theta}{1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} - \frac{\cos^2 \theta}{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\
 &= 1 - \frac{\sin^2 \theta}{\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta}} - \frac{\cos^2 \theta}{\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta}} \\
 &= 1 - \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \\
 &= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \\
 &= \frac{\sin \theta + \cos \theta - \sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = 0
 \end{aligned}$$

91. Shew that

$$(1 + \sin 2A + \cos 2A)^2 = 4 \cos^2 A (1 + \sin 2A).$$

พิจารณานิพจน์ทางซ้ายมือ

$$\begin{aligned}
 (1 + \sin 2A + \cos 2A)^2 &= (1 + \sin 2A + 2\cos^2 A - 1)^2 \\
 &= (\sin 2A + 2\cos^2 A)^2 \\
 &= \sin^2 2A + 4\sin 2A \cos^2 A + 4\cos^4 A \\
 &= 4\sin^2 A \cos^2 A + 4\sin 2A \cos^2 A + 4\cos^4 A \\
 &= 4\cos^2 A (\sin^2 A + \sin 2A + \cos^2 A) \\
 &= 4\cos^2 A (1 + \sin 2A) = \text{นิพจน์ทางขวามือ} \quad \text{Q.E.D}
 \end{aligned}$$

139. If $\cos \theta = \cos \alpha \cos \beta$, prove that

$$\tan \frac{\theta + \alpha}{2} \tan \frac{\theta - \alpha}{2} = \tan^2 \frac{\beta}{2}.$$

พิจารณานิพจน์ทางซ้ายมือ

$$\begin{aligned} &= \tan \frac{\theta + \alpha}{2} \tan \frac{\theta - \alpha}{2} \\ &= \frac{\sin \frac{\theta + \alpha}{2}}{\cos \frac{\theta + \alpha}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{\theta - \alpha}{2}}{\cos \frac{\theta - \alpha}{2}} \\ &= \frac{\cos \theta - \cos \alpha}{-(\cos \theta + \cos \alpha)} \\ &= \frac{\cos \alpha \cos \beta - \cos \alpha}{-\cos \alpha \cos \beta - \cos \alpha} \\ &= -\frac{(\cos \beta - 1)}{(\cos \beta + 1)} \end{aligned}$$

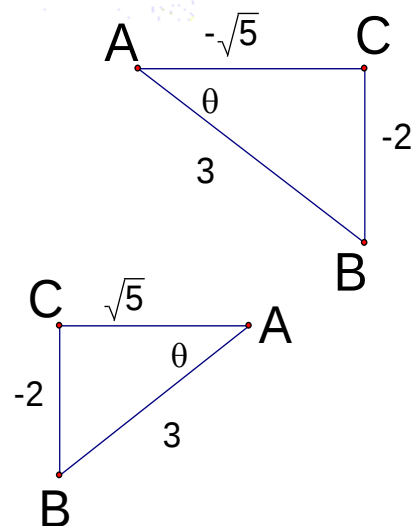
$$\begin{aligned} &= \left(\frac{-2}{-2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{\theta + \alpha}{2}}{\cos \frac{\theta + \alpha}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{\theta - \alpha}{2}}{\cos \frac{\theta - \alpha}{2}} \\ &= \frac{\cos \theta - \cos \alpha}{-\cos \theta - \cos \alpha} \\ &= \frac{\cos \alpha (\cos \beta - 1)}{-\cos \alpha (\cos \beta + 1)} \end{aligned}$$

127. If $\sin \theta = -\frac{2}{3}$, find $\tan \theta$, and explain by means of a figure why there are two values.

ค่าของ $\sin \theta$ ที่เป็นลบ อยู่ใน Q3 และ Q4

Q3; จะได้ $\tan \theta = \frac{-2}{-\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Q4; จะได้ $\tan \theta = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$



125. If $\tan \frac{\beta}{2} = 4 \tan \frac{\alpha}{2}$, prove that

$$\tan \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{3 \sin \alpha}{5 - 3 \cos \alpha}.$$

พิจารณานิพจน์ทางด้านซ้าย

$$\begin{aligned} \tan \frac{\beta - \alpha}{2} &= \tan \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= \frac{\tan \frac{\beta}{2} - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{4 \tan \frac{\alpha}{2} - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + 4 \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\tan \frac{\alpha}{2} (4 - 1)}{1 + 4 \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{3 \left(\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \right)}{1 + 4 \left(\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \right)^2} \\ &= \frac{3 \left(\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \right)}{1 + 4 \left(\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \right)} = \frac{3 \left(\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \right)}{\frac{1 + \cos \alpha + 4 - 4 \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \\ &= \frac{3 \left(\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \right) (1 + \cos \alpha)}{5 - 3 \cos \alpha} \\ &= \frac{3 \left(\sqrt{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} \right)}{5 - 3 \cos \alpha} \\ &= \frac{3 \left(\sqrt{\sin^2 \alpha} \right)}{5 - 3 \cos \alpha} = \frac{3 \sin \alpha}{5 - 3 \cos \alpha} = \text{นิพจน์ทางขวามือ} \quad \text{Q.E.D} \end{aligned}$$

126. Shew that

$$\sin (36^{\circ}+A)-\sin (36^{\circ}-A) \\ +\sin (72^{\circ}-A)-\sin (72^{\circ}+A)=\sin A.$$

พิจารณานิพจน์ทางซ้ายมือ

$$\begin{aligned} &= \sin 36^{\circ} \cos A + \cos 36^{\circ} \sin A - (\sin 36^{\circ} \cos A - \cos 36^{\circ} \sin A) \\ &\quad + (\sin 72^{\circ} \cos A - \cos 72^{\circ} \sin A) - (\sin 72^{\circ} \cos A + \cos 72^{\circ} \sin A) \\ &= \cancel{\sin 36^{\circ} \cos A} + \cos 36^{\circ} \sin A - \cancel{\sin 36^{\circ} \cos A} + \cos 36^{\circ} \sin A \\ &\quad + \cancel{\sin 72^{\circ} \cos A} - \cos 72^{\circ} \sin A - \cancel{\sin 72^{\circ} \cos A} - \cos 72^{\circ} \sin A \\ &= 2 \cos 36^{\circ} \sin A - 2 \cos 72^{\circ} \sin A \\ &= 2 \sin A (\cos 36^{\circ} - \cos 72^{\circ}) \\ &= 2 \sin A (\cos 36^{\circ} - \cos 2(36)^{\circ}) \\ &= 2 \sin A (\cos 36^{\circ} - 2 \cos^2 36^{\circ} + 1) \\ &= 2 \sin A (\end{aligned}$$

118. Find the values of $\tan \frac{x}{2}$ from the equation

$$\cos x - \sin \alpha \cot \beta \sin x = \cos \alpha.$$

$$\cos x - \sin \alpha \cot \beta \sin x = \cos \alpha$$

$$\cos x - \sin \alpha \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \sin x = \cos \alpha$$

$$\cos x - \cos \alpha = \sin \alpha \sin x \frac{\cos \beta}{\sin \beta}$$

$$-2 \sin \frac{x + \alpha}{2} \sin \frac{x - \alpha}{2} = \sin \alpha \sin x \frac{\cos \beta}{\sin \beta}$$

119. If $\sin A : \sin (2A+B) = n : m$, prove that

$$\cot (A+B) = \frac{m-n}{m+n} \cot A.$$

จากที่กำหนดให้ $\frac{\sin A}{\sin (2A+B)} = \frac{n}{m}$

จะได้ $n = m \cdot \frac{\sin A}{\sin (2A+B)}$ และ $m = n \cdot \frac{\sin (2A+B)}{\sin A}$

จากนิพจน์ทางขวามือ

$$\begin{aligned} \frac{m-n}{m+n} \cot A &= \frac{n \cdot \frac{\sin (2A+B)}{\sin A} - m \cdot \frac{\sin A}{\sin (2A+B)}}{n \cdot \frac{\sin (2A+B)}{\sin A} + m \cdot \frac{\sin A}{\sin (2A+B)}} \cot A \\ &= \frac{\frac{n \sin^2 (2A+B) - m \sin^2 A}{\sin A \sin (2A+B)}}{\frac{n \sin^2 (2A+B) + m \sin^2 A}{\sin A \sin (2A+B)}} \cot A = \frac{n \sin^2 (2A+B) - m \sin^2 A}{n \sin^2 (2A+B) + m \sin^2 A} \cot A \\ &= \frac{n [1 - \cos^2 (2A+B)] - m [1 - \cos^2 A]}{n [1 - \cos^2 (2A+B)] + m [1 - \cos^2 A]} \cot A \\ &= \frac{n [1 - \cos^2 (2A+B)] - m [1 - \cos^2 A]}{n [1 - \cos^2 (2A+B)] + m [1 - \cos^2 A]} \cot A \end{aligned}$$

141. If in a triangle $c(a+b) \cos \frac{B}{2} = b(a+c) \cos \frac{C}{2}$, prove that $b=c$.

พิจารณาค่า $\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos B}{2}}$ (ใช้ค่าบวกเนื่องจากเป็นสามเหลี่ยมใด ๆ ความยาวด้านเป็นบวก)

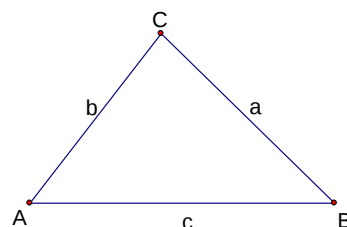
ทำนองเดียวกัน $\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos C}{2}}$

$$c(a+b) \cos \frac{B}{2} = b(a+c) \cos \frac{C}{2}$$

$$(ac+ab) \cos \frac{B}{2} = (ab+bc) \cos \frac{C}{2}$$

$$(ac+ab) \sqrt{\frac{1 + \cos B}{2}} = (ab+bc) \sqrt{\frac{1 + \cos C}{2}}$$

$$(ac+ab) \sqrt{1 + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}} = (ab+bc) \sqrt{1 + \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}}$$



$$1) \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$2) \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

$$3) \cos C = \frac{c^2 + a^2 - c^2}{2ab}$$

170. Prove that

$$\tan A \tan (60^\circ + A) \tan (120^\circ + A) = -\tan 3A.$$

พิจารณานิพจน์ทางด้านซ้าย จะได้ว่า

$$\begin{aligned} &= \tan A \left[\frac{\tan 60^\circ + \tan A}{1 - \tan 60^\circ \tan A} \right] \left[\frac{\tan 120^\circ + \tan A}{1 - \tan 120^\circ \tan A} \right] \\ &= \tan A \left[\frac{\sqrt{3} + \tan A}{1 - \sqrt{3} \tan A} \right] \left[\frac{-\sqrt{3} + \tan A}{1 + \sqrt{3} \tan A} \right] \\ &= \tan A \left[\frac{\tan A + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan A} \right] \left[\frac{\tan A - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \tan A} \right] = \tan A \left(\frac{\tan^2 A - 3}{1 - 3 \tan^2 A} \right) \\ &= \frac{\tan^3 A - 3 \tan A}{1 - 3 \tan^2 A} = -\frac{(3 \tan A - \tan^3 A)}{1 - 3 \tan^2 A} \end{aligned}$$

จากเอกลักษณ์ตรีโกณมิติที่ว่า $\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$

$$= -\tan 3A$$

= นิพจน์ทางขวามือ

Q.E.D

169. If $\tan^2 \theta = 2 \tan^2 \phi + 1$, then

$$\cos 2\theta + \sin^2 \phi = 0.$$

พิจารณานิพจน์ $\cos 2\theta + \sin^2 \phi$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} + \sin^2 \phi \\ &= \frac{1 - (2 \tan^2 \phi + 1)}{1 + (2 \tan^2 \phi + 1)} + \sin^2 \phi \\ &= \frac{1 - 2 \tan^2 \phi - 1}{1 + 2 \tan^2 \phi + 1} + \sin^2 \phi \\ &= \frac{-2 \tan^2 \phi}{2 + 2 \tan^2 \phi} + \sin^2 \phi = \frac{-2 \tan^2 \phi}{2(1 + \tan^2 \phi)} + \sin^2 \phi \\ &= \frac{-2 \tan^2 \phi}{2 \sec^2 \phi} + \sin^2 \phi = \frac{-2 \frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \phi}}{2 \frac{1}{\cos^2 \phi}} + \sin^2 \phi \\ &= -\sin \phi + \sin \phi = 0 \end{aligned}$$

Q.E.D

153. Prove that

$$\cot \frac{\theta}{2} - 3 \cot \frac{3\theta}{2} = \frac{4 \sin \theta}{1 + 2 \cos \theta}$$

พิจารณานิพจน์ทางซ้ายมือ จะได้

$$\begin{aligned} &= \cot \frac{\theta}{2} - 3 \cot \left(\theta + \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \cot \frac{\theta}{2} - 3 \left(\frac{\cot \theta \cot \frac{\theta}{2} - 1}{\cot \theta + \cot \frac{\theta}{2}} \right) \\ &= \frac{\cot \frac{\theta}{2} \left(\cot \theta + \cot \frac{\theta}{2} \right) - 3 \left(\cot \theta \cot \frac{\theta}{2} - 1 \right)}{\cot \theta + \cot \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\cot \theta \cot \frac{\theta}{2} + \cot^2 \frac{\theta}{2} - 3 \cot \theta \cot \frac{\theta}{2} + 3}{\cot \theta + \cot \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

163. If $a \sin (\theta + \alpha) = b \sin (\theta + \beta)$, prove that

$$\cot \theta = \frac{a \cos \alpha - b \cos \beta}{b \sin \beta - a \sin \alpha}$$

พิจารณานิพจน์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a [\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha] &= b [\sin \theta \cos \beta + \cos \theta \sin \beta] \\ a \sin \theta \cos \alpha + a \cos \theta \sin \alpha &= b \sin \theta \cos \beta + b \cos \theta \sin \beta \\ a \sin \theta \cos \alpha - b \sin \theta \cos \beta &= b \cos \theta \sin \beta - a \cos \theta \sin \alpha \\ \sin \theta [a \cos \alpha - b \cos \beta] &= \cos \theta [b \sin \beta - a \sin \alpha] \\ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{a \cos \alpha - b \cos \beta}{b \sin \beta - a \sin \alpha} \\ \cot \theta &= \frac{a \cos \alpha - b \cos \beta}{b \sin \beta - a \sin \alpha} \end{aligned}$$

Q.E.D

164. In the ambiguous case shew that the circum-circles of the two triangles are equal.

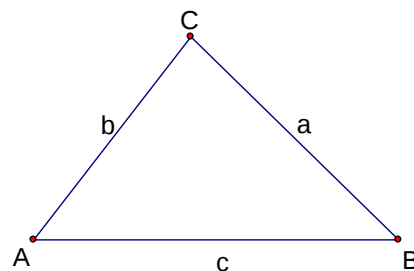
ในกรณีกำกวม จงแสดงว่าเส้นรอบรูปวงกลมที่รูปสามเหลี่ยมนั้นไปแนบในทั้งสองนั้นเท่ากัน
นิยาม กรณีกำกวม

The ambiguous case in trigonometry calls for the solution of triangles when given two sides and a non-included angle. There can be two possible triangles with the given measures.

จากรูป จะได้กฎของไซน์ ดังนี้

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\text{จะได้ } \sin B = \frac{b \sin A}{a}$$



<http://mathworld.wolfram.com/Circumcircle.html>

<http://www.geocities.com/lilyballbabe23/ambiguous.htm>

159. Prove the identities:

$$(1) \sin 3A = \sin A(2 \cos 2A - 1) \tan(60^\circ + A) \tan(60^\circ - A);$$

พิจารณานิพจน์ทางขวามือ

$$\begin{aligned}
 &= \sin A(2 \cos 2A - 1) \tan(60^\circ + A) \tan(60^\circ - A) \\
 &= \sin A[2(1 - 2\sin^2 A) - 1] \left[\frac{\tan 60^\circ + \tan A}{1 - \tan 60^\circ \tan A} \right] \left[\frac{\tan 60^\circ - \tan A}{1 + \tan 60^\circ \tan A} \right] \\
 &= \sin A[1 - 4\sin^2 A] \left[\frac{\tan^2 60^\circ - \tan^2 A}{1 - (\tan 60^\circ \tan A)^2} \right] \\
 &= \sin A[1 - 4\sin^2 A] \left[\frac{3 - \tan^2 A}{1 - 3 \tan^2 A} \right] \\
 &= \sin A[1 - 4\sin^2 A] \left[\frac{3 - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{1 - \frac{3 \sin^2 A}{\cos^2 A}} \right] = \sin A[1 - 4\sin^2 A] \left[\frac{\frac{3 \cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A}}{\frac{\cos^2 A - 3 \sin^2 A}{\cos^2 A}} \right] \\
 &= \sin A[1 - 4\sin^2 A] \left[\frac{3 \cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A - 3 \sin^2 A} \right] = \sin A[1 - 4\sin^2 A] \left[\frac{3(1 - \sin^2 A) - \sin^2 A}{1 - \sin^2 A - 3 \sin^2 A} \right] \\
 &= \sin A[1 - 4\sin^2 A] \left[\frac{3 - 4 \sin^2 A}{1 - 4 \sin^2 A} \right] \\
 &= \sin A(3 - 4 \sin^2 A) \\
 &= 3 \sin A - 4 \sin^3 A = \text{นิพจน์ทางด้านขวามือ} \quad \text{Q.E.D}
 \end{aligned}$$

166. If $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, express $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 1$ in the form of a product.

พิจารณา $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 1$

จากที่กำหนดให้ $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$

จะได้ $\alpha + \beta = 2\pi - \gamma$

$$= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \gamma + 1$$

$$= 2 \cos \frac{2\pi - \gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \gamma + 1$$

$$= 2 \cos \left(\pi - \frac{\gamma}{2} \right) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \gamma + 1$$

161. A circle and a regular octagon have the same perimeter; compare their areas, given $\sqrt{2} = 1.414$, $\pi = 3.1416$.

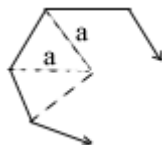
ในรูปวงกลมและรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวเท่ากัน จงเปรียบเทียบพื้นที่
สมมติให้ ความยาวเส้นรอบวงกลม และความยาวรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่า = c

หาเส้นรอบวงได้จาก $c = 2\pi r$ โดยที่รัศมีเท่ากับ r

$$\text{จะได้ } r = \frac{c}{2\pi}$$

$$\text{พื้นที่รูปวงกลม จะได้ } \text{area} = \pi \left(\frac{c}{2\pi} \right)^2 = \frac{c^2}{2\pi}$$

สูตรพื้นที่ n เหลี่ยมด้านเท่า



$$\text{Area} = \frac{1}{2} n a^2 \sin \left(\frac{360^\circ}{n} \right)$$

n = # of sides

สมมติให้แต่ละด้านยาวเท่ากับ $\frac{c}{8}$

181. Prove that

$$(1) \tan \frac{A+B}{2} - \tan \frac{A-B}{2} = \frac{2 \sin B}{\cos A + \cos B};$$

พิจารณานิพจน์ทางด้านซ้ายมือ

$$\begin{aligned} &= \tan \frac{A+B}{2} - \tan \frac{A-B}{2} \\ &= \tan \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) - \tan \left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2} \right) \\ &= \frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} - \frac{\tan \frac{A}{2} - \tan \frac{B}{2}}{1 + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} \\ &= \frac{\left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} \right) \left(1 + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \right) - \left(\tan \frac{A}{2} - \tan \frac{B}{2} \right) \left(1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \right)}{\left(1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \right) \left(1 + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \right)} \\ &= \frac{\left(\tan \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan^2 \frac{B}{2} \right) - \left(\tan \frac{A}{2} - \tan^2 \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} - \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan^2 \frac{B}{2} \right)}{1 - \left(\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \right)^2} \\ &= \frac{\tan^2 \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \left(\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \right)^2} = \frac{2 \tan^2 \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + 2 \tan \frac{B}{2}}{1 - \left(\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \right)^2} \\ &= \frac{2 \tan \frac{B}{2} \left(\tan^2 \frac{A}{2} + 1 \right)}{1 - \left(\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \right)^2} = \frac{2 \tan \frac{B}{2} \left(\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} + 1 \right)}{1 - \left(\sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} \left(\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B} \right) \right)^2} \\ &= \frac{2 \tan \frac{B}{2} \left(\frac{1 - \cos A + 1 + \cos A}{1 + \cos A} \right)}{\frac{(1 + \cos A)(1 + \cos B) - (1 - \cos A)(1 - \cos B)}{(1 + \cos A)(1 + \cos B)}} \\ &= \frac{4 \tan \frac{B}{2}}{(1 + \cos A + \cos B + \cos A \cos B) - (1 - \cos A - \cos B + \cos A \cos B)} \\ &= \frac{4 \tan \frac{B}{2}}{(1 + \cos B)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4 \tan \frac{B}{2}}{1 + \cos A + \cos B + \cos A \cos B - 1 + \cos A + \cos B - \cos A \cos B} \\
&\quad (1 + \cos B) \\
&= \frac{4 \sqrt{\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}}}{\frac{2 \cos A + 2 \cos B}{(1 + \cos B)}} = 4 \sqrt{\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}} \times \frac{(1 + \cos B)}{2 \cos A + 2 \cos B} \\
&= \frac{4 \sqrt{(1 - \cos B)(1 + \cos B)}}{2 \cos A + 2 \cos B} = \frac{4 \sqrt{1 - \cos^2 B}}{2 \cos A + 2 \cos B} \\
&= \frac{4 \sqrt{\sin^2 B}}{2 \cos A + 2 \cos B} = \frac{4 \sin B}{2(\cos A + \cos B)} \\
&= \frac{2 \sin B}{\cos A + \cos B} = \text{นิพจน์ทางขวามือ} \quad \text{Q.E.D}
\end{aligned}$$

176. If, in a triangle, $b = \sqrt{3} + 1$, $c = 2$, and $A = 30^\circ$, find B , C , and a .

จากกฎของโคไซน์

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 30^\circ$$

$$a^2 = (\sqrt{3} + 1)^2 + 4 - 2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$$

$$a^2 = (3 + 2\sqrt{3} + 1) + 4 - (6 + 2\sqrt{3})$$

$$a^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 4 - 6 - 2\sqrt{3}$$

$$a^2 = 3 + 1 + 4 - 6 = 2$$

$$a = \sqrt{2}$$

หา B จากกฎของไซน์

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

→

$$\frac{\sin 30^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{\sin B}{\sqrt{3} + 1}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sin B}{\sqrt{3} + 1}$$

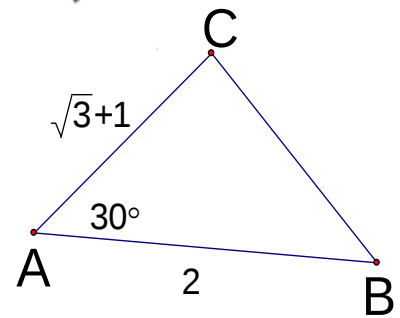
$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sin B}{\sqrt{3} + 1}$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

$B = 75^\circ$ องศา (จากที่เคยทราบกันมา)

จากสมบัติที่ว่ารูปสามเหลี่ยมต้องมีมุมเท่ากับ 180° องศา จะได้มุม C

$$180 - 75 - 30 = 75^\circ \text{ องศา เช่นเดียวกัน}$$



188. Prove that

$$\frac{\sin(A+B+C)}{\cos A \cos B \cos C} = \tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C.$$

พิจารณานิพจน์ทางซ้ายมือ

$$= \frac{\sin(A+B+C)}{\cos A \cos B \cos C} = \frac{\sin[(A+B)+C]}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$= \frac{\sin(A+B)\cos C + \cos(A+B)\sin C}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$= \frac{\cos C [\sin A \cos B + \cos A \sin B] + \sin C [\cos A \cos B - \sin A \sin B]}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$= \frac{\cos C \sin A \cos B + \cos C \cos A \sin B + \sin C \cos A \cos B - \sin C \sin A \sin B}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$= \frac{\cos C \sin A \cos B}{\cos A \cos B \cos C} + \frac{\cos C \cos A \sin B}{\cos A \cos B \cos C} + \frac{\sin C \cos A \cos B}{\cos A \cos B \cos C} - \frac{\sin C \sin A \sin B}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$= \tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C$$

= นิพจน์ทางขวามือ Q.E.D

183. Shew that in any triangle

$$\cos A + \cos B - \sin C = 4 \sin \frac{C}{2} \sin \left(45^\circ - \frac{A}{2} \right) \sin \left(45^\circ - \frac{B}{2} \right).$$

พิจารณานิพจน์ทางขวามือ

$$\begin{aligned} &= 4 \sin \frac{C}{2} \sin \left(45^\circ - \frac{A}{2} \right) \sin \left(45^\circ - \frac{B}{2} \right) \\ &= 2 \left[2 \sin \frac{C}{2} \sin \left(45^\circ - \frac{A}{2} \right) \right] \sin \left(45^\circ - \frac{B}{2} \right) \\ &= 2 \left[\cos \left(\frac{C}{2} - 45^\circ + \frac{A}{2} \right) - \cos \left(\frac{C}{2} + 45^\circ - \frac{A}{2} \right) \right] \sin \left(45^\circ - \frac{B}{2} \right) \\ &= 2 \left[\cos \left(\frac{C}{2} - 45^\circ + \frac{A}{2} \right) - \cos \left(\frac{C}{2} + 45^\circ - \frac{A}{2} \right) \right] \sin \left(45^\circ - \frac{B}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 4 \sin \frac{C}{2} \left[\sin 45^\circ \cos \frac{A}{2} - \cos 45^\circ \sin \frac{A}{2} \right] \left[\sin 45^\circ \cos \frac{B}{2} - \cos 45^\circ \sin \frac{B}{2} \right] \\ &= 4 \sin \frac{C}{2} \left[\sin 45^\circ \cos \frac{A}{2} - \cos 45^\circ \sin \frac{A}{2} \right] \left[\sin 45^\circ \cos \frac{B}{2} - \cos 45^\circ \sin \frac{B}{2} \right] \\ &= 4 \sin \frac{C}{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \right] \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \right] \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{C}{2} \left[\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2} \right] \left[\cos \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2} \right] \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \left[\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2} \right] \left[\cos \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\sqrt{\frac{1-\cos C}{2}} \left[\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} - \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \right] \left[\sqrt{\frac{1+\cos B}{2}} - \sqrt{\frac{1-\cos B}{2}} \right] \\
&= 2\sqrt{\frac{1-\cos C}{2}} \left[\frac{\sqrt{1+\cos A} - \sqrt{1-\cos A}}{\sqrt{2}} \right] \left[\frac{\sqrt{1+\cos B} - \sqrt{1-\cos B}}{\sqrt{2}} \right] \\
&= \sqrt{\frac{1-\cos C}{2}} \left[\sqrt{1+\cos A} - \sqrt{1-\cos A} \right] \left[\sqrt{1+\cos B} - \sqrt{1-\cos B} \right] \\
&= \sqrt{\frac{1-\cos C}{2}} \left[\left(\sqrt{1+\cos A} - \sqrt{1-\cos A} \right) \times \frac{\sqrt{1+\cos A} + \sqrt{1-\cos A}}{\sqrt{1+\cos A} + \sqrt{1-\cos A}} \right] \left[\left(\sqrt{1+\cos B} - \sqrt{1-\cos B} \right) \times \frac{\sqrt{1+\cos B} + \sqrt{1-\cos B}}{\sqrt{1+\cos B} + \sqrt{1-\cos B}} \right] \\
&= \sqrt{\frac{1-\cos C}{2}} \left[\frac{1+\cos A - 1+\cos A}{\sqrt{1+\cos A} + \sqrt{1-\cos A}} \right] \left[\frac{1+\cos B - 1+\cos B}{\sqrt{1+\cos B} + \sqrt{1-\cos B}} \right] \\
&= \sqrt{\frac{1-\cos C}{2}} \left[\frac{2\cos A}{\sqrt{1+\cos A} + \sqrt{1-\cos A}} \right] \left[\frac{2\cos B}{\sqrt{1+\cos B} + \sqrt{1-\cos B}} \right]
\end{aligned}$$

201. Prove the identities:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & (\tan A + \sec A) \cot \frac{A}{2} = (\cot A + \operatorname{cosec} A) \tan \left(45^\circ + \frac{A}{2} \right); \\
(2) \quad & \cos 2A + \cos 2B - 4 \sin (45^\circ - A) \sin (45^\circ - B) \cos (A+B) \\
& \quad \quad \quad = \sin 2(A+B).
\end{aligned}$$

201.1 พิจารณานิพจน์ทางขวามือ จะได้

$$\begin{aligned}
&= \left(\cot A + \operatorname{csc} A \right) \tan \left(45^\circ + \frac{A}{2} \right) \\
&= \left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{1}{\sin A} \right) \frac{\tan 45^\circ + \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan 45^\circ \tan \frac{A}{2}} = \left(\frac{\cos A + 1}{\sin A} \right) \frac{1 + \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2}} \\
&= \left(\frac{\cos A + 1}{\sin A} \right) \frac{1 + \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2}} \cdot \left(\frac{1 + \tan \frac{A}{2}}{1 + \tan \frac{A}{2}} \right) = \left(\frac{\cos A + 1}{\sin A} \right) \frac{\left(1 + \tan \frac{A}{2} \right)^2}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}} \\
&= \left(\frac{\cos A + 1}{\sin A} \right) \frac{\sec^2 \frac{A}{2} + 2 \tan \frac{A}{2}}{1 - \left(\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} \right)} = \left(\frac{\cos A + 1}{\sin A} \right) \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}}{\frac{1 + \cos A - 1 + \cos A}{1 + \cos A}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1 + 2 \sin \frac{A}{2}}{2} \\
& = \left(\frac{\cos A + 1}{\sin A} \right) \frac{\cos \frac{A}{2}}{\frac{2 \cos A}{1 + \cos A}} \\
& = \frac{(\cos A + 1)^2}{2 \sin A \cos A} \cdot \frac{1 + 2 \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} \\
& = \frac{(\cos A + 1)^2}{2 \sin A \cos A} \cdot \frac{1 + 2 \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}}
\end{aligned}$$

201. Prove the identities:

- (1) $(\tan A + \sec A) \cot \frac{A}{2} = (\cot A + \operatorname{cosec} A) \tan \left(45^\circ + \frac{A}{2} \right);$
- (2) $\cos 2A + \cos 2B - 4 \sin (45^\circ - A) \sin (45^\circ - B) \cos (A + B) = \sin 2(A + B).$

201.2 พิจารณานิพจน์ทางขวามือ จะได้

$$= (1 - 2\sin^2 A) + (1 - 2\sin^2 B) - 4[\sin 45^\circ \cos A - \cos 45^\circ \sin A][\sin 45^\circ \cos B - \cos 45^\circ \sin B]$$

224. If in a triangle $C=60^\circ$, prove that

$$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$$

กำหนดให้มุม $C = 60$ องศา จะได้ว่า $A + B = 120$ องศา

จะได้มุม $A = 120 - B$ และ $B = 120 - A$

จากกฎของโคไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ จะได้ว่า

$$\frac{\sin(120 - B)}{a} = \frac{\sin(120 - A)}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2c}$$

หาความยาวด้าน a โดยจับคู่ 1 และ 3 จะได้ $a = \frac{2c \sin(120 - B)}{\sqrt{3}}$

หาความยาวด้าน b โดยจับคู่ 2 และ 3 จะได้ $b = \frac{2c \sin(120 - A)}{\sqrt{3}}$

หาความยาวด้าน c โดยจับคู่ 2 และ 3 จะได้ $c = \frac{b\sqrt{3}}{2 \sin(120 - A)}$

แทนค่าในนิพจน์ทางด้านซ้าย จะได้ว่า

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{\frac{2c \sin(120 - B)}{\sqrt{3}} + \frac{b\sqrt{3}}{2 \sin(120 - A)}}}{\frac{1}{\frac{2c \sin(120 - B)}{\sqrt{3}} + \frac{b\sqrt{3}}{2 \sin(120 - A)}}} + \frac{\frac{1}{\frac{2c \sin(120 - A)}{\sqrt{3}} + \frac{b\sqrt{3}}{2 \sin(120 - A)}}}{\frac{1}{\frac{2c \sin(120 - A)}{\sqrt{3}} + \frac{b\sqrt{3}}{2 \sin(120 - A)}}} \\ &= \frac{\frac{1}{\frac{2c \sin(120 - B)}{\sqrt{3}} \cdot 2 \sin(120 - A) + 3b}}{\frac{\sqrt{3} \cdot 2 \sin(120 - A)}{\sqrt{3} \cdot 2 \sin(120 - A)}} + \frac{\frac{1}{\frac{2c \sin(120 - A)}{\sqrt{3}} \cdot 2 \sin(120 - A) + 3b}}{\frac{\sqrt{3} \cdot 2 \sin(120 - A)}{\sqrt{3} \cdot 2 \sin(120 - A)}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3} \cdot 2 \sin(120 - A)}{2c \sin(120 - B) \cdot 2 \sin(120 - A) + 3b}}{\frac{\sqrt{3} \cdot 2 \sin(120 - A)}{2c \sin(120 - B) \cdot 2 \sin(120 - A) + 3b}} + \frac{\frac{\sqrt{3} \cdot 2 \sin(120 - A)}{2c \sin(120 - A) \cdot 2 \sin(120 - A) + 3b}}{\frac{\sqrt{3} \cdot 2 \sin(120 - A)}{2c \sin(120 - A) \cdot 2 \sin(120 - A) + 3b}} \end{aligned}$$

218. If $\tan \theta = \frac{x \sin \phi}{1 - x \cos \phi}$, $\tan \phi = \frac{y \sin \theta}{1 - y \cos \theta}$,

prove that $\frac{\sin \theta}{\sin \phi} = \frac{x}{y}$.

พิจารณานิพจน์ที่กำหนดให้

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{x \sin \phi}{1 - x \cos \phi}, \quad \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{y \sin \theta}{1 - y \cos \theta}$$

พิจารณากลุ่มนิพจน์ทางขวา

$$\cos \phi = \frac{\sin \phi (1 - y \cos \theta)}{y \sin \theta}$$

แทนค่าลงในนิพจน์กลุ่มซ้าย

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{x \sin \phi}{1 - x \left[\frac{\sin \phi (1 - y \cos \theta)}{y \sin \theta} \right]}$$

$$\frac{\sin \theta}{\sin \phi} = \frac{x \cos \theta}{1 - x \left[\frac{\sin \phi (1 - y \cos \theta)}{y \sin \theta} \right]}$$

$$\frac{\sin \theta}{\sin \phi} = \frac{x \cos \theta}{\frac{y \sin \theta - x \sin \phi (1 - y \cos \theta)}{y \sin \theta}}$$

$$\frac{\sin \theta}{\sin \phi} = \frac{x \cos \theta \cdot y \sin \theta}{y \sin \theta - x \sin \phi (1 - y \cos \theta)}$$

$$\frac{\sin \theta}{\sin \phi} = \frac{x \cos \theta \cdot y \sin \theta}{y \sin \theta - x \sin \phi + yx \sin \phi \cos \theta}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{248} \text{ L.S.} &= [\cos(\theta - \cancel{\alpha} - m\theta + \cancel{\alpha}) - \cos(\theta - \alpha + m\theta - \alpha)] \cdot 2\cos(\theta - m\theta) \\
 &= [\cos(\theta - m\theta) - \cos(\theta + m\theta - 2\alpha)] \cdot 2\cos(\theta - m\theta) \\
 &= 2\cos^2(\theta - m\theta) - 2\cos(\theta + m\theta - 2\alpha) \cdot \cos(\theta - m\theta) \\
 &= 2\cos^2(\theta - m\theta) - [\cos(\theta + m\theta - 2\alpha + \theta - m\theta) + \cos(\theta + m\theta - 2\alpha - \theta + m\theta)] \\
 &= 2\cos^2(\theta - m\theta) - [\cos(2\theta - 2\alpha) + \cos(2m\theta - 2\alpha)] \\
 &= 2\cos^2(\theta - m\theta) - \cos(2\theta - 2\alpha) - \cos(2m\theta - 2\alpha) \\
 &= [2\cos^2(\theta - m\theta) - 1] - \cos(2\theta - 2\alpha) - \cos(2m\theta - 2\alpha) + 1 \\
 &= 1 + \cos(2\theta - 2m\theta) - \cos(2\theta - 2\alpha) - \cos(2m\theta - 2\alpha) = \text{R.S.} \quad Q.E.D.
 \end{aligned}$$

261. Prove that

$$\sin^{-1} \frac{1}{3} + \sin^{-1} \frac{1}{3\sqrt{11}} + \sin^{-1} \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{3\sqrt{11}} + \arcsin \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{\pi}{2}$$

Take sin ทั้งสองข้าง

$$\sin \left(\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{3\sqrt{11}} + \arcsin \frac{3}{\sqrt{11}} \right) = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \left(\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{3\sqrt{11}} + \arcsin \frac{3}{\sqrt{11}} \right) = 1$$

ซึ่งสมมูลกับข้อความแรก

พิจารณานิพจน์ทางซ้ายมือ

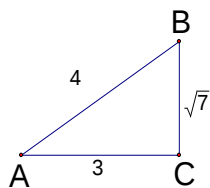
$$= \sin \left(\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{3\sqrt{11}} + \arcsin \frac{3}{\sqrt{11}} \right)$$

271. If $\cos A = \frac{3}{4}$, shew that

$$32 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{5A}{2} = 11.$$

พิจารณานิพจน์ทางซ้ายมือ

$$\begin{aligned}
 &= 32 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{5A}{2} = 32 \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \sin \left(2A + \frac{A}{2} \right) \\
 &= 32 \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{4}}{2}} \left(\sin 2A \cos \frac{A}{2} + \cos 2A \sin \frac{A}{2} \right) \\
 &= 32 \sqrt{\frac{1}{8}} \left(2 \sin A \cos A \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} + (2 \cos^2 A - 1) \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \right) \\
 &= 32 \sqrt{\frac{1}{8}} \left(2 \sin A \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{4}}{2}} + \left(2 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^2 - 1 \right) \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{4}}{2}} \right) \\
 &= 32 \sqrt{\frac{1}{8}} \left(2 \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\frac{7}{8}} + \left(\frac{18}{16} - 1 \right) \cdot \sqrt{\frac{1}{8}} \right) \\
 &= 32 \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(2 \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{16} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \\
 &= 32 \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{21}{16\sqrt{2}} + \frac{1}{16\sqrt{2}} \right) \\
 &= 32 \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{22}{16\sqrt{2}} \right) = \frac{22}{2} = 11 = \text{นิพจน์ทางขวา} \quad \text{QED}
 \end{aligned}$$



283. If $C=22\frac{1}{2}^\circ$, $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, solve the triangle.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

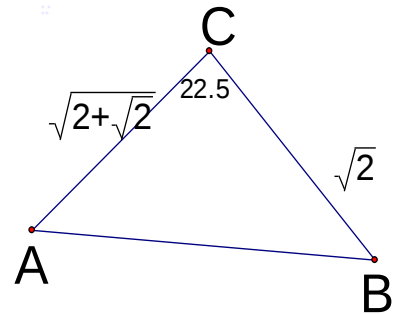
$$\frac{\sin A}{\sqrt{2}} = \frac{\sin B}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{2} \sin B}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sqrt{2} \sin B}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sin 45^\circ}{c}$$

$$\frac{\sqrt{2} \sin B}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{1-\sqrt{2}}}{c}$$



291. If $\cos A = \tan B$, $\cos B = \tan C$, $\cos C = \tan A$, prove that $\sin A = \sin B = \sin C = 2 \sin 18^\circ$.

จากที่กำหนดว่า $\cos A = \tan B$,

$\cos B = \tan C$,

$\cos C = \tan A$

จะได้ว่า $\cos A = \frac{\sin B}{\cos B}$

$\cos B = \frac{\sin C}{\cos C}$

$\cos C = \frac{\sin A}{\cos A}$

$\sin A = \cos A \cos B$

$\sin C = \cos B \cos C$

$\sin A = \cos A \cos C$

นำ $\sin A / \sin C$

$$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\cos A \cos B}{\cos B \cos C} \quad \text{จะได้} \quad \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\cos A}{\cos C}; \quad \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin C}{\cos C}$$

254. If $2S=A+B+C$, shew that

$$\cos^2 S + \cos^2 (S-A) + \cos^2 (S-B) + \cos^2 (S-C) = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C.$$

พิจารณานิพจน์ทางด้านซ้าย

$$\begin{aligned} &= \cos^2 S + [\cos S \cos A + \sin S \sin A]^2 + [\cos S \cos B + \sin S \sin B]^2 + [\cos S \cos C + \sin S \sin C]^2 \\ &= \cos^2 S + [\cos^2 S \cos^2 A + 2\cos S \cos A \sin S \sin A + \sin^2 S \sin^2 A] + \\ &\quad [\cos^2 S \cos^2 B + 2\cos S \cos B \sin S \sin B + \sin^2 S \sin^2 B] + \\ &\quad [\cos^2 S \cos^2 C + 2\cos S \cos C \sin S \sin C + \sin^2 S \sin^2 C] \\ &= (\cos^2 S + \cos^2 S \cos^2 A + \cos^2 S \cos^2 B + \cos^2 S \cos^2 C) + \\ &\quad (2\cos S \cos A \sin S \sin A + 2\cos S \cos B \sin S \sin B + 2\cos S \cos C \sin S \sin C) + \\ &\quad (\sin^2 S \sin^2 A + \sin^2 S \sin^2 B + \sin^2 S \sin^2 C) \\ &= \cos^2 S [1 + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C] + 2\cos S \sin S [\cos A \sin A + \cos B \sin B + \cos C \sin C] + \\ &\quad \sin^2 S [\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C] \\ &= \end{aligned}$$

จากเงื่อนไขที่กำหนดไว้ $2S = A + B + C$

$$\text{จะได้ } S = \frac{A + B + C}{2}$$

แทนค่าในนิพจน์ทางซ้าย จะได้

$$\begin{aligned} &= \cos^2 \left(\frac{A + B + C}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{A + B + C}{2} - A \right) + \cos^2 \left(\frac{A + B + C}{2} - B \right) + \cos^2 \left(\frac{A + B + C}{2} - C \right) \\ &= \cos^2 \left(\frac{A + B + C}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{-A + B + C}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{A - B + C}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{A + B - C}{2} \right) \\ &= \cos^2 \left(\frac{A + B + C}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{-A + B + C}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{A - B + C}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{A + B - C}{2} \right) \end{aligned}$$