

82.3.17
15.-

เรขาคณิต

21/12/45

คำนำ

โดยทั่วไปแล้ววิชาเรขาคณิตเป็นวิชาที่หาผู้ที่มีความเข้าใจและเชี่ยวชาญในวิชานี้ได้ยาก เพราะอาจเนื่องมาจากขาดหลักการคิดและพื้นฐานในวิชานี้ยังไม่ดีพอ จึงทำให้มีผู้กล่าวว่า เป็นวิชาที่น่าเบื่อและล้าสมัย ทั้งที่วิชานี้เป็นพื้นฐานของวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์แขนงสำคัญอื่นๆ

ทางชุมนุมจึงจัดทำหนังสือเล่มนี้ขึ้นเพื่อใช้เป็นคู่มือประกอบการเรียน โดยได้รวบรวมเนื้อหาสำคัญต่าง ๆ ความลึกสูตร และให้แนวคิด หลักการพิสูจน์การวิเคราะห์ เพื่อให้ผู้ที่ใช้หนังสือเล่มนี้ นำหลักดังกล่าวไปใช้ต่อไป

หนึ่งตัวอย่างที่รวบรวมไว้ในหนังสือเล่มนี้ จัดทำไว้อย่างย่อ ๆ เพื่อแสดงแนวคิดเท่านั้น โดยเฉพาะเรื่องการสร้างจะไม่มีกรพิสูจน์อยู่เลย มีแต่เพียงการวิเคราะห์เพื่อให้เกิดความเข้าใจเท่านั้น ตัวอย่างต่าง ๆ ที่ให้มา ผู้ใช้หนังสือควรมุ่งมั่นที่จะทำความเข้าใจมาศึกษาเสียครั้งหนึ่งก่อน แล้วจึงดูแนวการคิดและวิธีทำต่อไป ไม่ควรดูผ่าน ๆ ไปจะไม่ทำให้เกิดความเข้าใจอย่างแจ่มแจ้ง โจทย์แบบฝึกหัดต่าง ๆ ในหนังสือ ท่านผู้อ่านควรลองทำดูก่อน เพราะเป็นโจทย์แปลก ๆ ซึ่งจะทำให้เกิดประสบการณ์ในวิชานี้มากยิ่งขึ้น

หนังสือเล่มนี้จัดทำโดยคณะกรรมการที่เป็นนักเรียนทั้งหมด ซึ่งย่อมมีข้อผิดพลาดเป็นธรรมดา ทางชุมนุมจึงขออภัยรับคำติชมทุกข้อและขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย ทางเราหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ที่สุดสำหรับท่านในการศึกษาวิชานี้ต่อไป

ด้วยความปรารถนาดี

ชุมนุมคณิตศาสตร์โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

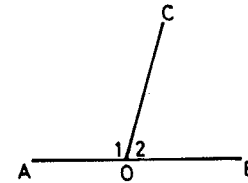


สารบัญ

ทฤษฎีบท	1
จักรัถ	19
โลไซ	81
การสร้าง	46
พื้นที่ในเทอมของด้าน	76
สามเหลี่ยมคล้าย	101
จุดจวบ	125
บรรดาขั้นสูงต่ำ	157
เบ็ดเตล็ด	167

ทฤษฎีบท

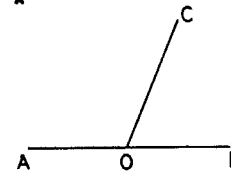
ทฤษฎีบทที่ 1



เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งพบกับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง ผลบวกของมุมประชิด 2 มุมที่เกิดขึ้นจะเท่ากับ 2 มุมฉาก

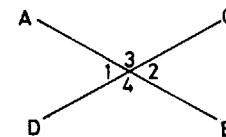
$$\text{จากรูป } \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$

ทฤษฎีบทที่ 2



ณ จุดใด ๆ บนเส้นตรงเส้นหนึ่ง ถ้าต่อเส้นตรงอีก 2 เส้นออกไปจากจุดนั้น ในทิศทางตรงกันข้ามกันทำให้เกิดมุมประชิดซึ่งรวมกันได้เท่ากับ 2 มุมฉากแล้ว เส้นตรงทั้ง 2 ที่ต่อออกไปจะต้องเป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน
จากรูป AO และ OB เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน

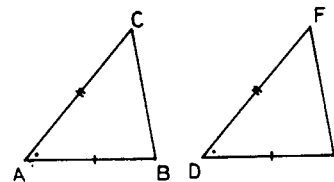
ทฤษฎีบทที่ 3



เส้นตรง 2 เส้นตัดกัน มุมตรงกันข้ามจะเท่ากัน

$$\text{จากรูป } \angle 1 = \angle 2; \angle 3 = \angle 4$$

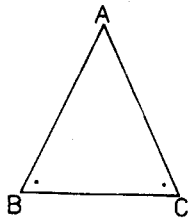
ทฤษฎีบทที่ 4



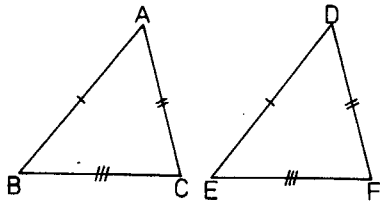
$\triangle 2$ รูปที่มี 2 ด้านเท่ากัน ด้านต่อด้าน และมุมระหว่างด้านทั้ง 2 เท่ากันด้วย $\triangle 2$ รูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

ทฤษฎีบทที่ 5

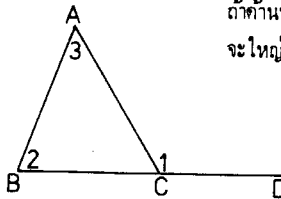
ทฤษฎีบทที่ 6

มุมที่ฐานของ $\triangle$ หน้าจั่วจะเท่ากันถ้ามุมทั้ง 2 ของ $\triangle$ เท่ากัน ด้านตรงข้ามกับมุมทั้ง 2 นั้น จะเท่ากันด้วย

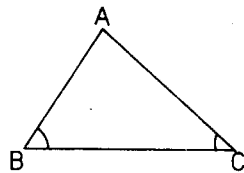
ทฤษฎีบทที่ 7

 $\triangle$ 2 รูปที่มีด้านทั้ง 3 เท่ากัน ด้านคู่ด้าน $\triangle$ 2 รูปนั้น จะเท่ากันทุกประการ

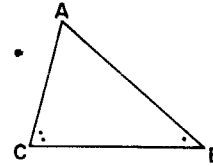
ทฤษฎีบทที่ 8

ถ้าด้านหนึ่งของ $\triangle$ ถูกต่อออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้น จะใหญ่กว่ามุมภายในที่อยู่ตรงกันข้ามทั้ง 2 มุมจากรูป $\angle 1 > \angle 2$ และ $\angle 1 > \angle 3$

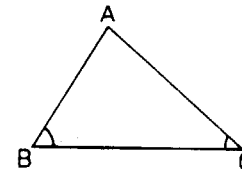
ทฤษฎีบทที่ 9

ใน $\triangle$ ใดๆ มุมที่อยู่ตรงกันข้ามกับด้านที่ยาวกว่าจะโตกว่า มุมที่อยู่ตรงกันข้ามกับด้านที่สั้นกว่า

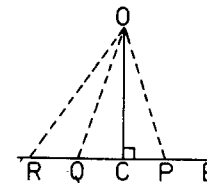
ทฤษฎีบทที่ 10

ใน $\triangle$ ใดๆ ด้านที่อยู่ตรงกันข้ามกับมุมที่โตกว่าจะยาว กว่าด้านที่อยู่ตรงกันข้ามกับมุมที่เล็กกว่า

ทฤษฎีบทที่ 11

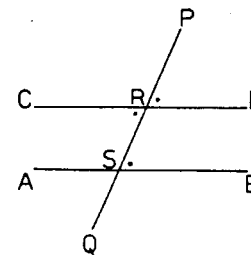
ผลบวกของ 2 ด้านใดๆ ของ $\triangle$ ย่อมมีค่ามากกว่าด้าน ที่เหลือหนึ่งจากรูป $AB + AC > BC$

ทฤษฎีบทที่ 12



ในบรรดาเส้นตรงทั้งหลายที่ลากจากจุดหนึ่งไปยังเส้น ตรงเส้นหนึ่ง เส้นที่ลากไปตั้งฉากจะเป็นเส้นที่สั้นที่สุด

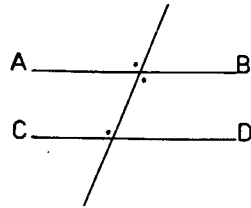
ทฤษฎีบทที่ 13



ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งไปตัดกับเส้นตรงอีก 2 เส้นแล้ว ทำให้

- 1) มุมแย้งเท่ากัน หรือ
- 2) มุมภายนอกเท่ากับมุมภายในตรงกันข้ามบนด้านเดียวกัน ของเส้นตรงที่ตัดนั้น หรือ
- 3) ผลบวกของมุมภายในที่อยู่ด้านเดียวกันมีค่าเท่ากับ 2 มุมฉาก แสดงว่าเส้นตรง 2 เส้นนั้นขนานกัน

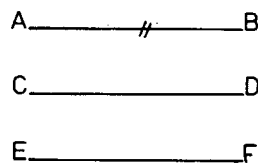
ทฤษฎีบท 14



เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งไปตัดกับเส้นตรงอีก 2 เส้น
ที่ขนานกันแล้วจะทำให้

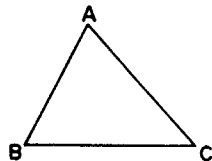
- 1) มุมแย้งเท่ากัน
- 2) มุมภายนอกเท่ากับมุมภายในตรงกันข้ามบนด้านเดียวกัน
ของเส้นตรงที่ตัดกัน
- 3) ผลบวกของมุมภายในที่อยู่ด้านเดียวกันมีค่าเท่ากับ 2 มุม
ฉาก

ทฤษฎีบท 15



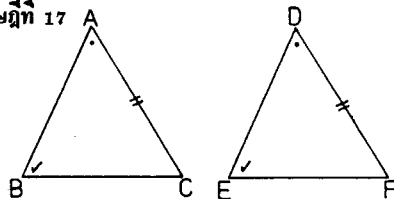
เส้นตรงทั้งหลายที่ขนานกับเส้นตรงเส้นเดียวกันย่อม
ขนานกัน

ทฤษฎีบท 16



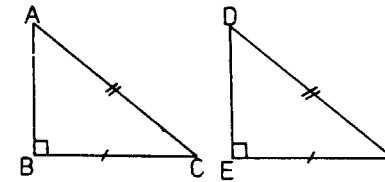
มุมทั้ง 3 ของ $\triangle$ รวมกันเท่ากับ 2 มุมฉาก

ทฤษฎีบท 17



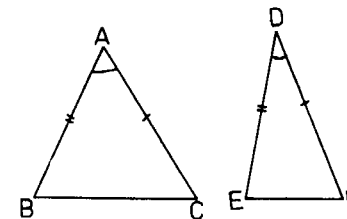
$\triangle$ 2 รูปที่มีมุม 2 มุมเท่ากัน มุมต่อมุม
และมีด้านที่สมนัยกันเท่ากัน 1 ด้าน
 $\triangle$ ทั้งสองจะเท่ากันทุกประการ

ทฤษฎีบท 18



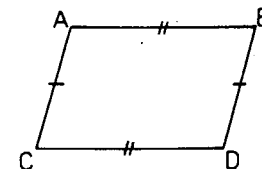
$\triangle$ มุมฉาก 2 รูปที่มีด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากัน
และ ด้านที่เหลือีก 1 ด้านเท่ากัน
 $\triangle$ ทั้ง 2 จะเท่ากันทุกประการ

ทฤษฎีบท 19



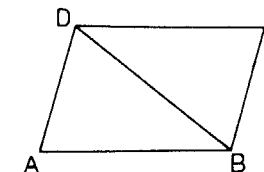
$\triangle$ 2 รูปมีด้านทั้งสองของ $\triangle$ รูปหนึ่งเท่ากับด้านทั้งสอง
ของ $\triangle$ อีกรูปหนึ่ง ด้านต่อด้าน แต่มุมประกอบด้าน
ทั้งสองนั้นของ $\triangle$ รูปหนึ่งโตกว่าของอีก $\triangle$ หนึ่ง ดังนั้น
ฐานของ $\triangle$ ที่มีมุมประกอบด้านโตกว่าจะยาวกว่าฐานของ
 $\triangle$ ที่เหลือ

ทฤษฎีบท 20



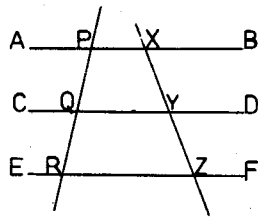
เส้นตรง 2 เส้นที่โยงปลายของเส้นตรง 2 เส้น
ที่ขนานกัน และเท่ากัน จะเท่ากันและขนานกัน

ทฤษฎีบท 21



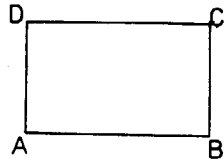
ด้านตรงกันข้ามและมุมตรงกันข้ามของสี่เหลี่ยมด้านขนาน
จะเท่ากัน และเส้นทแยงมุมจะแบ่งครึ่งสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ทฤษฎีบทที่ 22



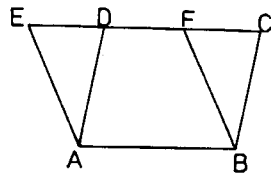
เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงที่ขนานกัน 3 เส้นหรือมากกว่า แล้วทำให้ส่วนคั่นระหว่างเส้นขนานเหล่านั้นเท่ากัน แล้ว เส้นตรงอื่นๆ ทุกเส้นเมื่อตัดเส้นขนานเหล่านั้นก็จะให้ส่วนคั่นระหว่างเส้นขนานเหล่านั้นเท่ากัน

ทฤษฎีบทที่ 23



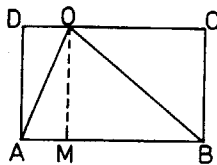
ผลคูณ ระหว่างด้านกว้างและด้านยาว ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า จะเท่ากับพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ทฤษฎีบทที่ 24



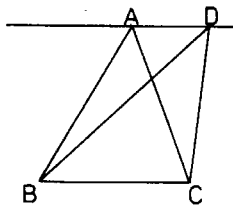
□ ด้านขนานที่ตัดอยู่บนฐานเดียวกันและอยู่ระหว่างเส้นคู่ขนานเดียวกันจะมีพื้นที่เท่ากัน

ทฤษฎีบทที่ 25



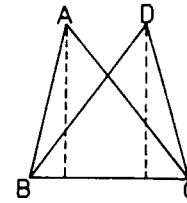
พื้นที่ของ $\triangle$ จะมีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ตั้งอยู่บนฐานเดียวกันและมีความสูงเท่ากัน

ทฤษฎีบทที่ 26



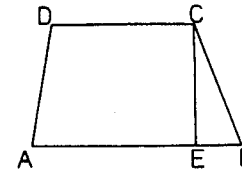
$\triangle$ ที่ตั้งอยู่บนฐานเดียวกันและมีความสูงเท่ากันจะมีพื้นที่เท่ากัน

ทฤษฎีบทที่ 27



$\triangle$ ที่มีพื้นที่เท่ากันและตั้งอยู่บนฐานเดียวกันและบนด้านเดียวกันของฐานจะมีความสูงเท่ากัน

ทฤษฎีบทที่ 28



พื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู

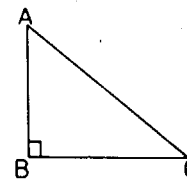
$$= \frac{1}{2} \times \text{ความสูง} \times (\text{ผลของด้านคู่ขนาน})$$

พื้นที่ของ $\square$ ใดๆ $= \frac{1}{2} \times \text{เส้นทแยงมุม} \times (\text{ผลบวกของเส้นที่ลากจากมุมยอดทั้งสองมายังเส้นทแยงมุมนั้น})$

$$\text{จากรูปพื้นที่ของ } \square ABCD = \frac{1}{2} \times DE \times (AB + CD)$$

$$\text{พื้นที่ของ } \square ABCD = \frac{1}{2} \times BD \times (CF + AE)$$

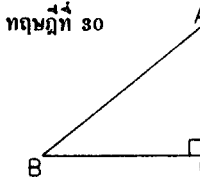
ทฤษฎีบทที่ 29



ผลบวกของกำลังสองของด้านทั้งสองของ $\triangle$ มุมฉากมีค่าเท่ากับกำลังสองของด้านที่ตรงกันข้ามกับมุมฉาก

$$\text{จากรูป } AC^2 = AB^2 + BC^2$$

ทฤษฎีบทที่ 30

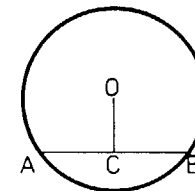


ถ้าผลบวกของกำลังสองของด้านทั้งสองของ $\triangle$

มีค่าเท่ากับกำลังสองของด้านที่เหลือแล้ว

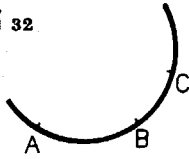
$\triangle$ นั้นคือ $\triangle$ มุมฉาก

ทฤษฎีบทที่ 31



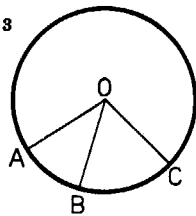
เส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางของวงกลมมาแบ่งครึ่งคอร์ดใดๆ ในวงกลมที่ไม่ใช่เส้นผ่าศูนย์กลาง เส้นตรงนั้นจะตั้งฉากกับคอร์ดนั้นด้วย

ทฤษฎีบท 32



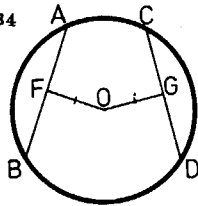
มีวงกลมเพียงวงเดียวที่สามารถผ่านจุด 3 จุดที่ไม่อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน

ทฤษฎีบท 33



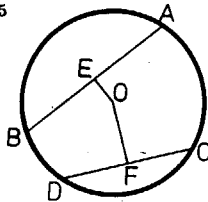
ถ้าจากจุดภายในวงกลมมีเส้นตรงมากกว่า 2 เส้นที่สามารถลากไปยังเส้นรอบวงได้และเส้นตรงเหล่านั้นยาวเท่ากันจุดจุดนั้นจะต้องเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

ทฤษฎีบท 34



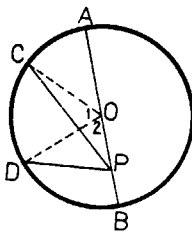
คอร์ดที่เท่ากันจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเท่ากัน

ทฤษฎีบท 35



คอร์ดที่อยู่ใกล้จุดศูนย์กลางของวงกลมมากกว่า จะยาวกว่าคอร์ดที่อยู่ไกลกว่าจากจุดศูนย์กลาง

ทฤษฎีบท 36

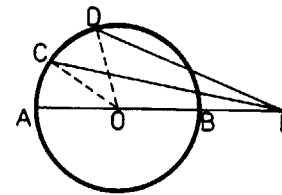


จากจุดใด ๆ ภายในวงกลม เส้นตรงที่ลากไปยังเส้นรอบวงเส้นที่ยาวที่สุดคือเส้นที่ลากผ่านจากจุดศูนย์กลางของวงกลมและเส้นที่สั้นที่สุดคือเส้นที่ต่อจากเส้นตรงที่ยาวที่สุดนั้น

และสำหรับเส้นตรงอื่นๆเส้นที่ยาวกว่าได้แก่เส้นที่รองรับมุมที่ใกล้กว่าที่จุดศูนย์กลาง

จากรูป PA ยาวที่สุด, PB สั้นที่สุด, กำหนด $\angle POC > \angle POD$ จะได้ PC ยาวกว่า PD

ทฤษฎีบท 37

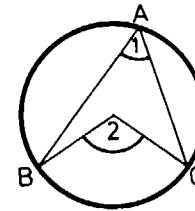


จากจุดภายนอกวงกลมใด ๆ เส้นตรงที่ลากมายังเส้นรอบวงของวงกลมเส้นที่ยาวที่สุดได้แก่เส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม และเส้นที่สั้นที่สุดก็คือเส้นที่เมื่อต่อออกไปแล้วจะผ่านจุดศูนย์กลาง และสำหรับเส้นตรงอื่นๆ

เส้นที่ยาวกว่าคือเส้นที่รองรับมุมที่ใกล้กว่า

จากรูป PA ยาวที่สุด PB สั้นที่สุด $PC > PD$

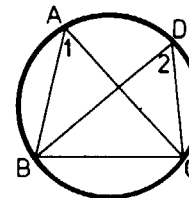
ทฤษฎีบท 38



มุมที่จุดศูนย์กลางจะเป็น 2 เท่าของมุมที่เส้นรอบวงที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

จากรูป $\angle 2 = 2 \angle 1$

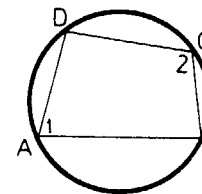
ทฤษฎีบท 39



มุมที่หลายที่อยู่ในเซกเมนต์เดียวกันของวงกลมเดียวกันย่อมมีค่าเท่ากัน

จากรูป $\angle 1 = \angle 2$

ทฤษฎีบท 40

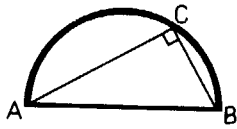


ผลบวกของมุมตรงกันข้ามของ ใด ๆ

ที่บรรจุอยู่ในวงกลมจะมีค่าเท่ากับ 2 มุมฉาก

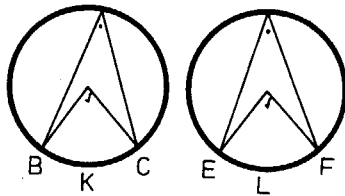
จากรูป $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

ทฤษฎีบท 41



มุมในครึ่งวงกลมจะมีค่าเท่ากับ 1 มุมฉาก

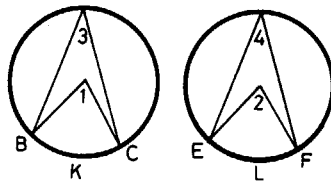
ทฤษฎีบท 42



วงกลมที่เท่ากัน ส่วนโค้งของวงกลมทั้งสองที่รองรับมุมเท่ากันที่จุดศูนย์กลางหรือที่เส้นรอบวงจะยาวเท่ากัน

$$\text{จากรูป } \widehat{BKC} = \widehat{ELF}$$

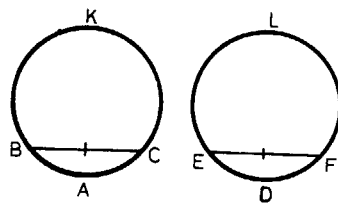
ทฤษฎีบท 43



ในวงกลมที่เท่ากัน มุมที่จุดศูนย์กลาง หรือที่เส้นรอบวงของวงกลมที่รองรับโดยส่วนโค้งของวงกลมที่เท่ากันจะมีค่าเท่ากัน

$$\text{จากรูป } \angle 1 = \angle 2; \angle 3 = \angle 4$$

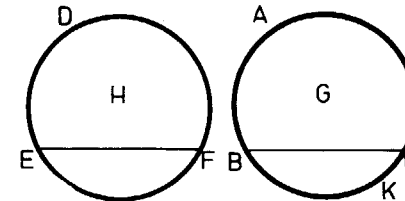
ทฤษฎีบท 44



วงกลมที่เท่ากัน, ส่วนโค้งของวงกลมที่ตัดกอร์ดที่เท่ากันจะเท่ากันโดยส่วนโค้งที่ยาวกว่าจะเท่ากัน และส่วนโค้งที่สั้นกว่าจะเท่ากัน

$$\begin{aligned} \text{จากรูป } \widehat{BAC} &= \widehat{EDF} \\ \widehat{BKC} &= \widehat{ELF} \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 45

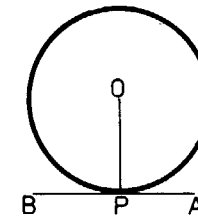


ในวงกลมที่เท่ากัน

กอร์ดที่ตัดส่วนโค้งออกเท่ากันจะเท่ากัน

$$\text{จากรูป } BC = EF$$

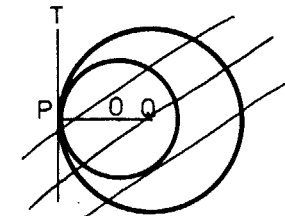
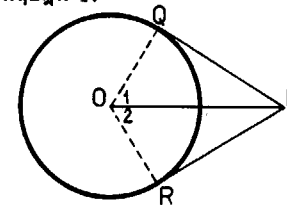
ทฤษฎีบท 46



เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลม ณ จุดสัมผัส

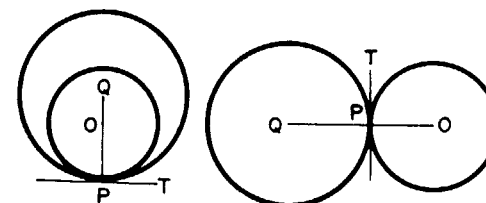
$$AB \perp OP$$

ทฤษฎีบท 47



จากจุดภายนอกวงกลมจะมีเส้นสัมผัสลากจากจุดนั้นมาสัมผัสวงกลมได้ 2 เส้น เท่ากัน

ทฤษฎีบท 48



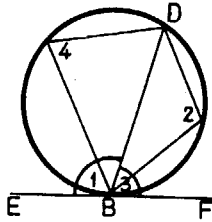
ถ้าวงกลม 2 วงสัมผัสกันและกัน

จุดสัมผัสและจุดศูนย์กลางของวงกลม

จะอยู่ในเส้นตรงเดียวกัน

จากรูป
O, P, Q, จะอยู่ในเส้นตรงเดียวกัน

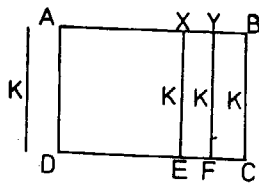
ทฤษฎีบท 49



มุมที่เกิดจากเส้นสัมผัสวงกลมทำกับคอร์ดของวงกลม
ที่จุดสัมผัสเท่ากับมุมในเขตกึ่งวงกลม

จากรูป $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$

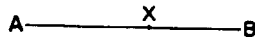
ทฤษฎีบท 50



เส้นตรง 2 เส้น เส้นหนึ่งถูกแบ่งออกเป็นช่วงย่อยต่างๆ
ผลคูณระหว่างเส้นตรงทั้งสองเส้นจะเท่ากับ
ผลบวกของผลคูณระหว่างเส้นตรงที่ไม่ถูกแบ่ง
กับช่วงย่อยของเส้นตรงที่ถูกแบ่งนั้น

จากรูป $AB \cdot K = AX \cdot K + XY \cdot K + YB \cdot K$

ทฤษฎีบท 51



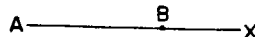
จากรูป

$AB^2 = AX^2 + XB^2 + 2 AX \cdot XB$

เส้นตรงถูกแบ่งภายใน ณ ที่จุดหนึ่ง
กำลังสองของเส้นตรงจะมีค่าเท่ากับ

ผลบวกของกำลังสองของแต่ละส่วนที่ถูกแบ่งนั้น
และ 2 เท่าของผลคูณของส่วนที่ถูกแบ่ง 2 ส่วนนั้น

ทฤษฎีบท 52



ถ้าเส้นตรงถูกแบ่งที่ภายนอก, กำลังสองของเส้นตรง
จะมีค่าเท่ากับผลบวกของกำลังสองส่วนที่ถูกแบ่ง
ทั้งสองนั้นและหักออกด้วย 2 เท่าของผลคูณของ
ส่วนที่ถูกแบ่ง 2 ส่วนนั้น

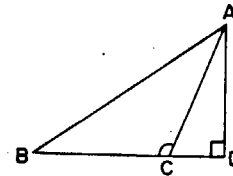
จากรูป $AB^2 = AX^2 + XB^2 - 2 AX \cdot XB$

ทฤษฎีบท 53



ผลต่างระหว่างกำลังสองของเส้นตรง 2 เส้นมีค่าเท่ากับผล
คูณระหว่างผลบวกและผลต่างของเส้นตรงทั้งสองนั้น
จากรูป $AB^2 - CD^2 = (AB + CD)(AB - CD)$

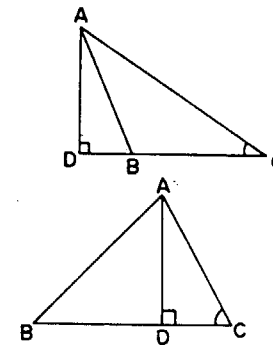
ทฤษฎีบท 54



ใน $\triangle$ มุมป้านใด ๆ กำลังสองของด้านที่อยู่ตรงกันข้าม
กับมุมป้านจะเท่ากับผลบวกของกำลังสองของด้านทั้งสอง
ที่ประกอบมุมป้านนั้นรวมกับ 2 เท่าของผลคูณระหว่างด้านใด
ด้านหนึ่งที่ประกอบมุมป้านกับเงาของอีกด้านที่เหลือ
(projection)

จากรูป $AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2 BC \cdot CD$

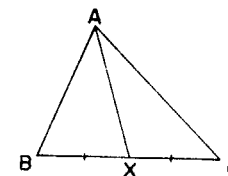
ทฤษฎีบท 55



ใน $\triangle$ ใด ๆ กำลังสองของด้านที่อยู่ตรงกันข้ามกับมุมแหลม
จะมีค่าเท่ากับผลบวกของกำลังสองของด้านทั้งสองที่ประ
กอบเป็นมุมแหลมนั้นและหักออกด้วย 2 เท่าของผลคูณ
ระหว่างด้านหนึ่งกับเงาของอีกด้านหนึ่งที่ประกอบมุม
แหลมนั้น

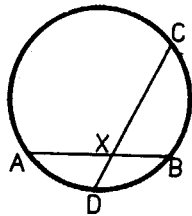
จากรูป $AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2 BC \cdot CD$

ทฤษฎีบท 56 ~ 8 Anal Geo art 4-8
CW. H. Smart



ใน $\triangle$ ใด ๆ ผลบวกของกำลังสองของด้านทั้งสองจะมีค่า
เท่ากับกำลังสองของครึ่งหนึ่งของด้านที่สามรวมกับ 2 เท่า
ของกำลังสองของเส้นมัธยฐาน ซึ่งลากมายังด้านที่สาม
จากรูป $AB^2 + AC^2 = 2BX^2 + 2AX^2$

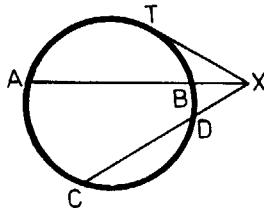
ทฤษฎีบท 57



คอร์ด 2 คอร์ดใดๆ ตัดกันภายในวงกลม
ผลคูณของส่วนตัดของคอร์ดทั้งสองย่อมเท่ากัน

จากรูป $AX \cdot XB = CX \cdot XD$

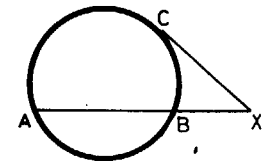
ทฤษฎีบท 58



คอร์ด 2 คอร์ดใดๆ ที่ตัดกันภายนอกวงกลมผลคูณของ
ส่วนตัดของคอร์ดทั้ง 2 ย่อมเท่ากัน
และเท่ากับกำลังสองของเส้นสัมผัสวงกลม
ที่ลากจากจุดตัดนั้น

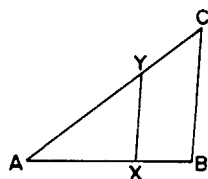
จากรูป $AX \cdot XB = CX \cdot XD = XT^2$

ทฤษฎีบท 59



จากจุดภายนอกวงกลมลากเส้นตรง 2 เส้น
เส้นหนึ่งตัดวงกลม อีกเส้นหนึ่งพบเส้นรอบวง
ถ้าผลคูณระหว่างเส้นตรงที่ตัดวงกลมกับส่วนของเส้นตรงนี้
ที่อยู่ภายนอกวงกลมเท่ากับกำลังสองของเส้นตรงที่พบเส้นรอบวงนั้นแล้ว
เส้นตรงที่พบเส้นรอบวงคือเส้นสัมผัสวงกลม จากรูป $XA \cdot XB = XC^2$

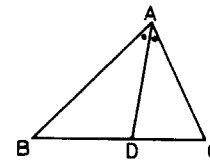
ทฤษฎีบท 60



ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งลากขนานกับด้านหนึ่งของ $\triangle$ และ
ตัดอีก 2 ด้านของ $\triangle$ ภายในหรือภายนอก $\triangle$ ก็ตาม
จะตัดด้าน 2 ด้านของ $\triangle$ นั้นเป็นอัตราส่วนกัน

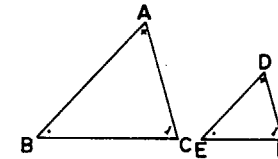
จากรูป $AX:XB = AY:YC$

ทฤษฎีบท 61



เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของ $\triangle$ ภายในหรือภายนอกก็ตาม
เมื่อลากมายังฐานจะแบ่งฐานในอัตราส่วนเดียวกับด้านอีก
2 ด้านของ $\triangle$

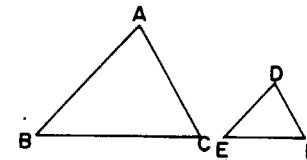
ทฤษฎีบท 62



$\triangle 2$ รูปที่มีมุมเท่ากันทุกมุมด้วยที่สมนัยกัน
จะเป็นอัตราส่วนกัน

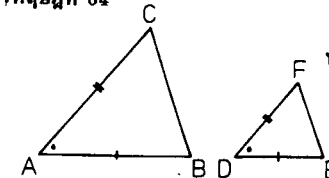
จากรูป $AB:DE = AC:DF = BC:FE$

ทฤษฎีบท 63



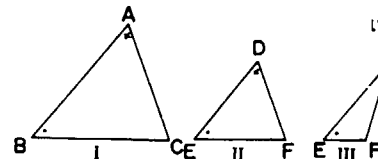
$\triangle 2$ รูปที่มีด้านที่สมนัยเป็นอัตราส่วนกัน
 $\triangle 2$ รูปนั้นจะเป็น $\triangle$ ที่มีมุมเท่ากันทุกมุม

ทฤษฎีบท 64



$\triangle 2$ รูปที่มีมุมเท่ากันทุกมุม มุมต่อมุมและด้านที่สม
นัยกัน เป็นอัตราส่วนต่อกัน $\triangle 2$ รูปจะเป็นรูปคล้ายกัน

ทฤษฎีบท 65

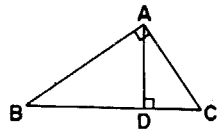


$\triangle 2$ รูปที่มีมุมที่หนึ่งเท่ากัน ด้านประกอบมุมที่สองเป็น
สัดส่วนต่อกัน $\triangle$ ทั้งสองจะมีมุมที่สามเท่ากัน ทำให้เกิด
เป็น $\triangle$ คล้ายหรือมีมุมที่สามรวมกันเป็น 2 มุมฉาก

จากรูป I, II $\angle C = \angle F$

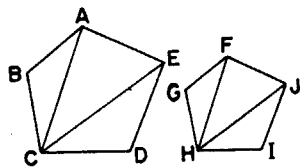
.. I, III $\angle C + \angle F = 180^\circ$

ทฤษฎีบท 66



เส้นตรงที่ลากตั้งฉากจากมุมฉากของ $\triangle$ มุมฉาก ไปยัง
ด้านตรงข้ามมุมฉากจะแบ่ง $\triangle$ ออกเป็น 2 รูป ซึ่งแต่ละ
รูปจะเป็น $\triangle$ คล้ายกันและคล้ายกับ $\triangle$ มุมฉากเดิมด้วย
จากรูป $\triangle BDA$ คล้ายกับ $\triangle ADC$ และคล้ายกับ $\triangle BAC$

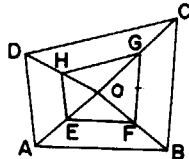
ทฤษฎีบท 67



รูปหลายเหลี่ยมคล้ายเมื่อลากเส้นตรงจากมุมยอดไปยังมุม
ยอดอื่นๆ จะได้รูป $\triangle$ ที่คล้ายกัน และเส้นตรงเหล่านั้น
จะเป็นอัตราส่วนกัน

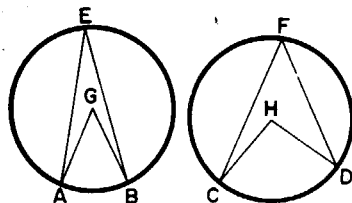
จากรูป ก) $\triangle ABC$ คล้ายกับ $\triangle FGH$
 $\triangle ACE$ คล้ายกับ $\triangle FHI$
 $\triangle CED$ คล้ายกับ $\triangle HJI$
ข) $CD:HI = CE:HJ = CA:FH$

ทฤษฎีบท 68



รูปหลายเหลี่ยมคล้าย 2 รูป วางในลักษณะที่ลากเส้นต่อ
มุมเดียวกันได้มุมต่อมุม เส้นต่อมุมเหล่านี้จะไปพบกันที่
จุด ๆ หนึ่ง

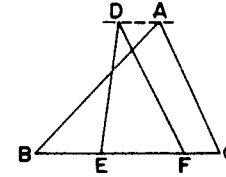
ทฤษฎีบท 69



ในวงกลมเท่ากัน มุมที่จุดศูนย์กลางหรือที่เส้นรอบวงจะ
เป็นอัตราส่วนเดียวกันกับส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับมุม
นั้น ๆ

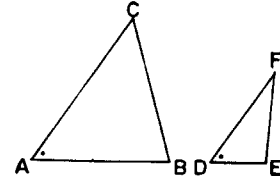
จากรูป $\angle AGB : \angle CHD = AB : CD$
 $\angle AEB : \angle CFD = AB : CD$

ทฤษฎีบท 70



อัตราส่วนของพื้นที่ของ $\triangle$ ที่มีมุมสูงเท่ากันจะเป็น
อัตราส่วนเดียวกันกับฐานของ $\triangle$ ทั้งสอง
จากรูป $\triangle ABC : \triangle DEF = BC : EF$

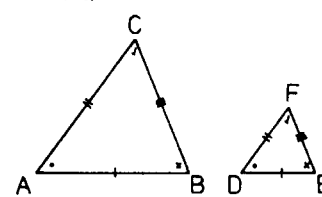
ทฤษฎีบท 71



อัตราส่วนของพื้นที่ของ $\triangle$ ที่มีมุมเท่ากัน 1 มุม จะเป็น
อัตราส่วนเดียวกับอัตราส่วนของผลคูณของด้านประกอบ
มุมเท่านั้น

จากรูป $\triangle ABC : \triangle DEF = AB \cdot AC : DE \cdot DF$

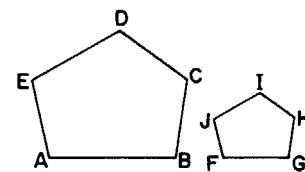
ทฤษฎีบท 72



อัตราส่วนของพื้นที่ของ $\triangle$ คล้ายจะเป็นสัดส่วนโดยตรง
กับอัตราส่วนของกำลังสองของด้านที่สมนัยกัน

จากรูป $\triangle ABC : \triangle DEF = BC^2 : EF^2$

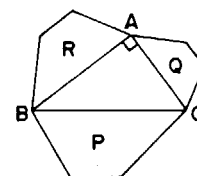
ทฤษฎีบท 73



อัตราส่วนของพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่คล้ายกันจะเป็น
สัดส่วนโดยตรงกับอัตราส่วนของกำลังสองของด้านที่
สมนัยกัน

พื้นที่ $ABCDE : \text{พื้นที่ } FGHIJ = AB^2 : FG^2$

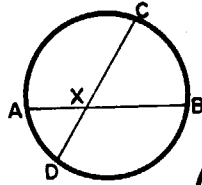
ทฤษฎีบท 74



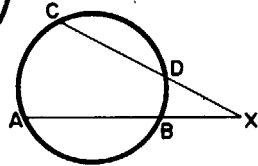
พื้นที่รูปหลายเหลี่ยมบนด้านตรงข้ามของ $\triangle$ มุมฉากจะ
เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่คล้ายกันและ
อยู่บนด้านที่ประกอบมุมฉากนั้น

จากรูป รูป R + รูป Q = รูป P

ทฤษฎีบท 75

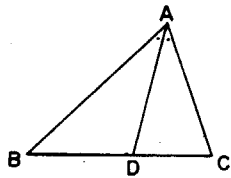


ถอร์ด 2 ถอร์ดตัดกันภายในหรือภายนอกวงกลม ผลคูณของส่วนตัดบนถอร์ดทั้งสองจะเท่ากัน



จากรูป $XA \cdot XB = XC \cdot XD$

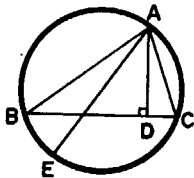
ทฤษฎีบท 76



เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของ $\triangle$ เมื่อลากตั้งฐานจะทำให้ผลคูณระหว่างด้านทั้งสองที่ประกอบเป็นมุมยอดมีค่าเท่ากับผลคูณระหว่างส่วนตัดบนฐานรวมกับกำลังสองของเส้นแบ่งครึ่งมุมนั้น

จากรูป $AB \cdot AC = BD \cdot DC + AD^2$

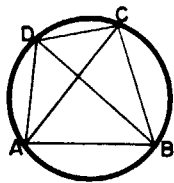
ทฤษฎีบท 77



ผลคูณระหว่างด้านทั้งสองที่ประกอบเป็นมุมยอดของ $\triangle$ จะมีค่าเท่ากับผลคูณระหว่างเส้นที่ลากตั้งฉากจากมุมยอดมายังฐานกับเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle$ นั้น

$AB \cdot AC = AE \cdot AD$

ทฤษฎีบท 78



ผลคูณระหว่างเส้นทแยงมุม 2 เส้นของรูป $\square$ ใดๆ ที่บรรจุอยู่ในวงกลมมีค่าเท่ากับผลบวกของผลคูณของด้านตรงข้ามของ $\square$ นั้น

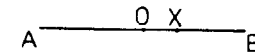
จากรูป $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$

ปี พ.ศ. ๒๕๔-๕๖ เป็นปกติ + ท.๔๙

จักรีสบนด้านของสามเหลี่ยม

SEGMENTS ของเส้นตรง

1) AB เป็นเส้นตรง มี O เป็นจุดกึ่งกลาง X เป็นจุดแบ่ง AB อย่างภายใน จะได้



$$ก) AX^2 + XB^2 = 2(AO^2 + OX^2)$$

$$\text{Proof } \because AX^2 + XB^2 = (AO + OX)^2 + (OB - OX)^2 \\ = 2(AO^2 + OX^2) \quad (\because AO = OB)$$

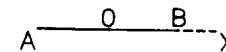
$$ข) AX^2 - XB^2 = 2AB \cdot OX$$

$$\text{Proof } \because AX^2 - XB^2 = (AX + XB)(AX - XB) \\ = AB(AO + OX - XB) \\ = 2AB \cdot OX \quad (\because AO = OB)$$

$$ค) AO^2 - OX^2 = AX \cdot XB$$

$$\text{Proof } \because AO^2 - OX^2 = (AO + OX)(AO - OX) \\ = AX \cdot XB \quad (\because AO = OB)$$

2) AB เป็นเส้นตรง มี O เป็นจุดกึ่งกลาง X เป็นจุดแบ่ง AB อย่างภายนอก จะได้



$$ก) AX^2 + XB^2 = 2(AO^2 + OX^2)$$

$$ข) AX^2 - XB^2 = 2AB \cdot OX$$

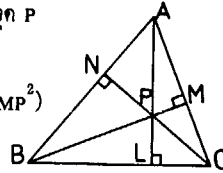
$$ค) OX^2 - AO^2 = AX \cdot XB$$

พิสูจน์เหมือนข้างต้น

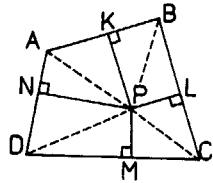
✓ Ex I Given AL, BM, CN เป็นเส้นตั้งฉากจาก 3 เส้นของ $\triangle ABC$ ตัดกันที่จุด P

Prove $AN^2 + BL^2 + CM^2 = AM^2 + CL^2 + BN^2$

Proof $AN^2 + BL^2 + CM^2 = (AP^2 - PN^2) + (BP^2 - PL^2) + (CP^2 - MP^2)$
 $= (AP^2 - MP^2) + (CP^2 - PL^2) + (BP^2 - PN^2)$
 $= AM^2 + CL^2 + BN^2$
Q.E.D.



✓ Ex II



Given P เป็นจุดใน $\square$ ใดๆ ABCD ลาก PL, PM, PN และ

PK $\perp$ BC, CD, DA และ AB ตามลำดับ

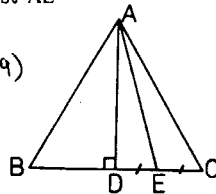
Prove $AN^2 + BK^2 + CL^2 + DM^2 = AK^2 + BL^2 + CM^2 + DN^2$

Proof $AN^2 + BK^2 + CL^2 + DM^2$
 (ท.ม. ๔๑) $= (AP^2 - PN^2) + (BP^2 - PK^2) + (CP^2 - PL^2) + (DP^2 - PM^2)$
 $= (AP^2 - KP^2) + (BP^2 - PL^2) + (CP^2 - PM^2) + (DP^2 - PN^2)$
 $= AK^2 + BL^2 + CM^2 + DN^2$
Q.E.D.

✓ Ex III Given $\triangle$ ด้านเท่า ABC มี AD $\perp$ BC, E เป็นจุดกึ่งกลาง CD โยง AE

Prove $AE^2 = 13 CE^2$

Proof $AE^2 = AD^2 + DE^2 = (AC^2 - DC^2) + DE^2$ (ท.ม. ๔๑)
 $AC = 4 CE, DC = 2 CE$
 $\therefore AE^2 = (16 CE^2 - 4 CE^2) + CE^2$
 $= 13 CE^2$
Q.E.D.



✓ Ex IV Given วงกลม O รัศมี 25 ซม. มีกอร์ด AB $\parallel$ CD ยาว 14, 30 ซม. ตามลำดับ

Find ระยะห่างของกอร์ดทั้งสอง

Const ลาก OX, OY $\perp$ CD, AB โยง OB, OD

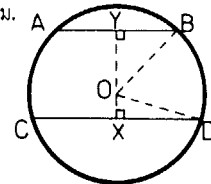
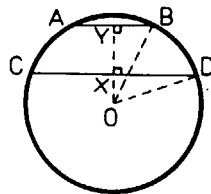
Solve $OX^2 = OD^2 - DX^2$ (ท.ม. ๔๑)

$OX = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ ซม.

$OY = \sqrt{OB^2 - BY^2} = 24$..

$\therefore$ กอร์ดทั้งสองห่างกัน = 24 + 20 หรือ 24 - 20 ซม.
 = 44 หรือ 4 ซม.

Ans.



✓ Ex V

Given ABCD เป็น $\square$ ด้านยาว มี AM, CN $\perp$ BD ที่ M, N

Prove $BM^2 + BN^2 = DM^2 + DN^2$

Proof $\because BM^2 = AB^2 - AM^2$ (1)

$BN^2 = BC^2 - CN^2$ (2)

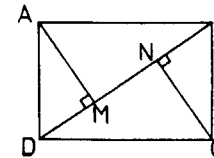
(1) + (2); $BM^2 + BN^2 = AB^2 + BC^2 - AM^2 - CN^2$ (ท.ม. ๔๑)

$= CD^2 + AD^2 - AM^2 - CN^2$

$= (DN^2 + CN^2) + (AM^2 + DM^2) - AM^2 - CN^2$

$= DN^2 + DM^2$

Q.E.D.



✓ Ex VI

Given วงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$ มีเส้นผ่า ศ.ก. ยาว d หน่วย และมี O เป็นจุด orthocentre ของ

$\triangle ABC$

Prove $AO^2 + BC^2 = BO^2 + AC^2 = CO^2 + AB^2 = d^2$

Const ให้ CD เป็นเส้นผ่า ศ.ก. โยง AD, BD

Proof AO $\parallel$ BD, AD $\parallel$ BY

$\therefore$ ADBO เป็น $\square$ ด้านขนาน AO = BD

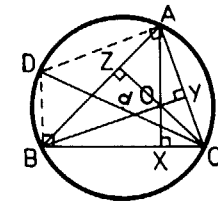
$\angle DBC = 90^\circ$ (ท.ม. 41)

$\therefore BD^2 + BC^2 = CD^2 = d^2$ (ท.ม. ๔๑)

$\therefore AO^2 + BC^2 = d^2$

$\therefore AO^2 + BC^2 = BO^2 + AC^2 = CO^2 + AB^2 = d^2$ (ทำนองเดียวกัน) **Q.E.D.**

N.B. ถ้าให้ว่า $AO^2 + BC^2 = BO^2 + AC^2 = CO^2 + AB^2$ จะพิสูจน์ได้ว่า O เป็น Orthocentre



✓ Ex VII

Given วงกลม 2 วงสัมผัสกันภายนอกที่ C ลาก BB' และ

DD' $\perp$ กันที่จุด C ลาก OO' พบเส้นรอบวงที่ A, A'

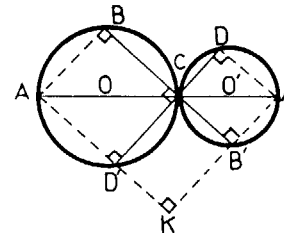
Prove $A'A^2 = BB'^2 + DD'^2$

Const ลาก AD', A'B' พบกันที่ K โยง AB, DA'

Proof $A'A^2 = AK^2 + A'K^2$ (ท.ม. ๔๑)

$= BB'^2 + DD'^2$ (AK $\parallel$ B'B, A'K $\parallel$ D'D)

Q.E.D.



✓ Ex VIII

Given $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หนึ่งมุมที่ C ต่อ BC ถึง D โดย AD

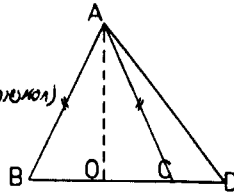
Prove $AB^2 = AD^2 - BD \cdot DC$

Const ลาก $AO \perp BC$

Proof จากเรื่อง Segments ของเส้นตรงข้อ 2 ก. ได้ว่า (สม. 54)

$$\begin{aligned} BD \cdot DC &= OD^2 - BO^2 \\ \therefore AD^2 - BD \cdot DC &= AD^2 - OD^2 + BO^2 \\ &= (AO^2 + OD^2) - OD^2 + BO^2 \\ &= AO^2 \\ &= AB^2 \end{aligned}$$

Q.E.D.



/ Ex IX

Given AB เป็นเส้นตรงยาว 8 ซม.

Find จุด X บน AB ที่ทำให้ $AX^2 + XB^2 = 50$ ซม.²

Solve ให้ O เป็นจุดกึ่งกลาง AB จึงได้ว่า $AO = 4$ ซม.

สมมติ X เป็นจุดบน AB

ตาม segments ของเส้นตรงข้อ 1 ก. ได้ว่า (สม. 54)

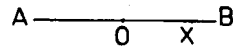
$$AX^2 + XB^2 = 2(OX^2 + AO^2)$$

$$\text{แทนค่า, } 50 = 2(OX^2 + 16)$$

$$\therefore OX = 3 \text{ ซม.}$$

$$\therefore X \text{ อยู่ห่างจาก } A = 4 + 3 = 7 \text{ ซม.}$$

Ans.



Ex X

Given $\triangle ABC$ มี $BX = 2XC$, $AY \perp BC$

Prove $AB^2 + 4AC^2 = 2BX^2 + 5AX^2 - 4XY \cdot XC$

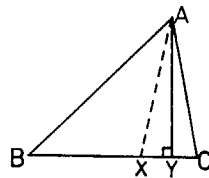
Const โยง AX

$$\begin{aligned} \text{Proof } AB^2 &= BX^2 + AX^2 + 2BX \cdot XY \quad (\text{ท. 54}), \text{ ก. ข. บ. 3} \\ &= BX^2 + AX^2 + 4XC \cdot XY \quad (BX = 2XC) \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4(AC^2) &= 4(XC^2 + AX^2 - 2XC \cdot XY) \quad (\text{ท. 55}), \text{ ก. ข. บ. 3} \\ &= 4XC^2 + 4AX^2 - 8XC \cdot XY \quad (BX = 4XC) \dots (2) \end{aligned}$$

$$(1) + (2), AB^2 + 4AC^2 = 2BX^2 + 5AX^2 - 4XC \cdot XY$$

Q.E.D.



✓ Ex XI

Given $\triangle PMN$ เป็น $\triangle$ หนึ่งมุมที่ P มี $PM = PN$, $MS \perp PN$

Prove $MN^2 = PN \cdot NS + PM \cdot NS$

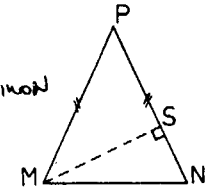
Proof $MN^2 = PM^2 + PN^2 - 2PN \cdot PS$ (ท. 55), $\triangle PMN$ หนึ่งมุม

$$= 2PN(PN - PS) \quad (\because PM = PN)$$

$$= 2PN \cdot NS$$

$$= PM \cdot NS + PN \cdot NS$$

Q.E.D.



Ex XII

Given $\square ABCD$ มี $AB \parallel CD$ มีด้านทั้งสี่และเส้นทแยงมุมยาวคงแสงในรูป

Prove $p^2 + q^2 = b^2 + d^2 + 2ac$

Const ลาก $AM, BN \perp CD$ ให้ $DM = x, CN = y$

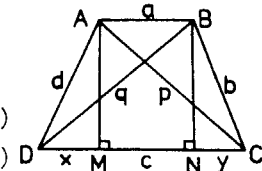
Proof $c - x - y = a$

$$\text{ท. 55 } \left\{ \begin{array}{l} \text{ใน } \triangle ACD, \quad p^2 = c^2 + d^2 - 2cx \quad \dots (1) \\ \text{ใน } \triangle BDC, \quad q^2 = b^2 + c^2 - 2cy \quad \dots (2) \end{array} \right.$$

$$(1) + (2), p^2 + q^2 = b^2 + d^2 + 2c(c - x - y)$$

$$= b^2 + d^2 + 2ac$$

Q.E.D.



Ex XIII

Given X เป็นจุดอยู่บน BC ของ $\triangle ABC$ ทำให้ $mBX = nCX$

Prove $mAB^2 + nAC^2 = mBX^2 + nCX^2 + (m+n)AX^2$

Const ลาก $AD \perp BC$, โยง AX

$$(\text{ท. 54}) \triangle ABX, m(AB^2) = m(AX^2 + BX^2 + 2BX \cdot XD) \dots (1)$$

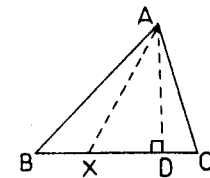
$$(\text{ท. 55}) \triangle ACX, n(AC^2) = n(AX^2 + CX^2 - 2CX \cdot XD) \dots (2)$$

$$mAB^2 + nAC^2 = mBX^2 + nCX^2 + (m+n)AX^2$$

$$+ 2mBX \cdot XD - 2nCX \cdot XD$$

$$= mBX^2 + nCX^2 + (m+n)AX^2$$

Q.E.D.



Ex XIV

Given ABCD เป็น □ ไท ๆ BM, DN ⊥ AC

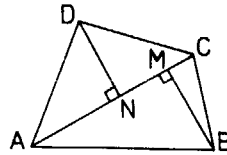
Prove $(AB^2 + CD^2) - (AD^2 + BC^2) = 2 AC \cdot MN$

Proof $\triangle ABC, AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 AC \cdot MC \dots (1)$

$\triangle ADC, CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2 AC \cdot AN \dots (2)$

$$(1) + (2), (AB^2 + CD^2) - (AD^2 + BC^2) = 2 AC (AC - MC - AN) \\ = 2 AC \cdot MN$$

Q.E.D.



Ex XV

Given □ จักรวาล ABPQ, ACXY อยู่บนด้านของ $\triangle ABC$, ไชง AP, AX, QY

Prove $BC^2 + QY^2 = AP^2 + AX^2$

Const BM, QN ⊥ AC, AY ที่ต่อออกไป

Proof $\angle MAB = \angle QAN$ (ต่าง = $90^\circ - \angle BAN$)

$$\triangle BAM \cong \triangle QAN$$

$$(\angle MAB = \angle QAN, AB = AQ, \angle BMA = \angle QNA)$$

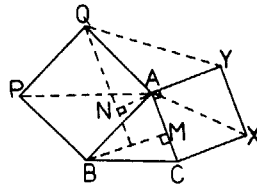
$$AM = AN$$

$$\triangle ABC, BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AC \cdot AM \dots (1) \text{ (ท.ม. 55)}$$

$$\triangle AQY, QY^2 = AQ^2 + AY^2 - 2 AY \cdot AN \dots (2) \text{ (ท.ม. 54)}$$

$$(1) + (2), BC^2 + QY^2 = 2 AB^2 + 2 AC^2 \quad (AM = AN, AC = AY, AB = AQ) \\ = AP^2 + AX^2 \quad (2 AB^2 = AB^2 + BP^2, 2 AC^2 = AC^2 + CX^2)$$

Q.E.D.



Ex XVI

Given P, Q, R, S เป็นจุดกึ่งกลางด้านทั้งสี่ □ ABCD ไชง PR, QS

Prove $AC^2 + BD^2 = 2 (PR^2 + SQ^2)$

Const ไชง PS, SR, RQ, QP

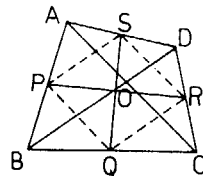
Proof PQRS เป็น □ ด้านขนาน

$$4 (SR^2 + QR^2) = 4 (2 OR^2 + 2 SO^2) \\ = 2 (PR^2 + SQ^2) \quad (\because 2 OR = PR, 2 SO = SQ)$$

$$= AC^2 + BD^2 \quad (AC = 2 SR, BD = 2 QR)$$

$$\therefore AC^2 + BD^2 = 2 (PR^2 + SQ^2)$$

Q.E.D.



จักรวาล

จักรวาล

Ex XVII

Given $\triangle ABC$, DBC เป็น $\triangle$ ด้านเท่า D เป็นจุด ค.ก. ของวงกลมที่ผ่าน B, C P เป็นจุดอยู่บนเส้นรอบวง

Prove $PA^2 = PB^2 + PC^2$

Const ไชง AD ตัด BC ที่ X ไชง PX, PD

Proof $\triangle PAD, PA^2 + PD^2 = 2 AX^2 + 2 PX^2$ (ท.ม. 56)

$$PA^2 + AB^2 = 2 (AB^2 - BX^2) + 2 PX^2 \text{ (ท.ม. 29)}$$

$$(AB = BD = PD)$$

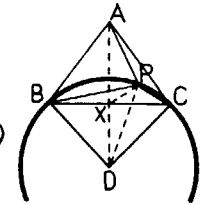
$$PA^2 = AB^2 - 2 BX^2 + 2 PX^2$$

$$= 4 BX^2 - 2 BX^2 + 2 PX^2 \quad (AB = 2 BX)$$

$$= 2 BX^2 + 2 PX^2$$

$$= PB^2 + PC^2 \text{ (ท.ม. 56)}$$

Q.E.D.



Ex XVIII

Given $\triangle ABC$ มี AB = 17 ซม., AC = 13 ซม., BC = 24 ซม.,

ถ้า L, K อยู่บน BC ทำให้ BL = LK = KC

Find AL และ AK

Solve ไชง AL, AK

$$\triangle ABK, AB^2 + AK^2 = 2 AL^2 + 2 BL^2 \text{ (ท.ม. 56)}$$

$$2 AL^2 - AK^2 = AB^2 - 2 BL^2 = 161$$

$$4 AL^2 - 2 AK^2 = 322 \dots (1)$$

$$\triangle ACL, AL^2 + AC^2 = 2 AK^2 + 2 LK^2 \text{ (ท.ม. 56)}$$

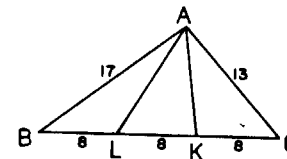
$$2 AK^2 - AL^2 = AC^2 - 2 LK^2 = 41$$

$$2 AK^2 - AL^2 = 41 \dots (2)$$

$$(1) - (2), 3 AL^2 = 363$$

$$AL = 11 \text{ ซม.}$$

$$\text{แทนค่า AL ใน (2) } AK = 9 \text{ ซม. } \} \text{ Ans.}$$



Ex XIX

Given AB, PQ เป็นคอร์ดขนานกัน

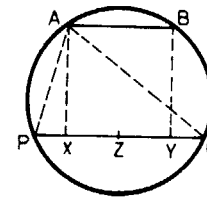
Prove $AB \cdot PQ = AQ^2 - AP^2$

Const ลาก AX, AX ⊥ PQ ที่ Z เป็นจุดกึ่งกลาง PQ

$\therefore Z$ เป็นจุดกึ่งกลาง XY ด้วย

Proof $\triangle APQ, AQ^2 - AP^2 = 2 PQ \cdot XZ$ (ผล ท.ม. 56)

$$= AB \cdot PQ \quad (2 XZ = XY = BY) \quad \text{Q.E.D.}$$



EXERCISES

1. $\triangle ABC$ มี $AB = 2 AC$ จุด M อยู่กลาง AB จงพิสูจน์ว่า $BC^2 = AC^2 + 2 CM^2$
2. $\triangle ABC$ มีจุด P อยู่ภายใน $PL, PM, PN \perp AB, BC, CA$ ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $BL^2 - CL^2 = BP^2 - AC^2$
3. $\triangle ABC$ มี O เป็นจุด Orthocentre S เป็นจุด ศ.ก. วงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC, SX \perp BC$ จงพิสูจน์ว่า $AO^2 = 4 SX^2$
4. วงกลมวงหนึ่งมีรัศมี = 13 ซม. AB เป็นคอร์ดยาว 10 ซม. O เป็นจุด ศ.ก. ของวงกลม $OP \perp AB$ ตัด AB ที่ M พบเส้นรอบวง ที่ P จงหาความยาวของ PM .
5. $\triangle ABC$ มี M เป็นจุดกึ่งกลาง AC, L เป็นจุดกึ่งกลาง BM กำหนด $AB = 21'', AC = 26'', AL = 16''$ จงหาความยาว BM และ BC
6. ตัณฑ์ ABC มี P, Q อยู่บน BC ทำให้ $BP = PQ = QC$ จงพิสูจน์ว่า $9 AP^2 = 7 AB^2$
7. D เป็นจุดกึ่งกลาง AC ของ $\triangle ABC$ จุด E อยู่กึ่งกลาง BD จงพิสูจน์ว่า $3 AB^2 + BC^2 = 4 AE^2 + 3 BD^2$
8. จักร์ $ABCD$ มี P, Q อยู่บน AC ทำให้ $AP = PQ = QC, QR \perp BC$ จงพิสูจน์ว่า
 - ก) $QR^2 = \frac{1}{9} AB^2$
 - ข) $BP^2 = \frac{5}{9} AB^2$
 - ค) $BP^2 + QR^2 = BR^2 + PQ^2$
9. จักร์ $PQMN$ ทอดกัน NM ถึง S ทำให้ $NS = PM, NK \perp PS$ จงพิสูจน์ว่า $PS^2 = 9NK^2$
10. L, K อยู่บน BC ของ $\triangle ABC$ ทำให้ $BL = LK = KC$ จงพิสูจน์ว่า
 - ก) $AB^2 + AC^2 = AL^2 + AK^2 + 4 LK^2$
 - ข) $2 AB^2 + AC^2 = 3 AL^2 + 2 BL^2 + CL^2$
 - ค) $AK^2 = \frac{1}{3} AB^2 + \frac{2}{3} AC^2 - \frac{2}{9} BC^2$
11. AB เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ของวงกลม DE เป็นคอร์ด ตัด $AP, BQ \perp DE$ ที่ตัดออกไปทั้งสองข้าง จงพิสูจน์ว่า $PD^2 + DQ^2 = PE^2 + EQ^2$
12. จักร์ $ABCD$ มี E, F, G, H อยู่บน AB, BC, CD, DA ตามลำดับทำให้ $AE = BF = CG = DH$ จงพิสูจน์ว่า $FH^2 = 2(AE^2 + BE^2)$
13. $\triangle ABC$ บรรจุอยู่ในวงกลม มี BX เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม ABC จงพิสูจน์ว่า $BX^2 = 4 AX^2$

14. G เป็นจุด Centroid ของ $\triangle ABC$ จงพิสูจน์ว่า
 - ก) $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$
 - ข) $AB^2 + AC^2 = BG^2 + CG^2 + 4 AG^2$ และเมื่อ P เป็นจุดใดๆ ใน $\triangle$
 - ค) $AP^2 + BP^2 + CP^2 = 3 PG^2 + AG^2 + BG^2 + CG^2$
15. $\square ABCD$ มีด้านทั้งสี่ยาว a, b, c, d และมีเส้นทแยงมุมยาว x, y จงพิสูจน์ว่า $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + x^2 + y^2)$ เมื่อ O เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านตรงข้ามของ $\square$
16. $\square$ ใด ๆ $ABCD$ มี P เป็นจุดใดๆ ใน $\square$ จงพิสูจน์ว่า $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 + 4 OP^2$ เมื่อ O เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านตรงข้ามของ $\square$
17. O เป็นจุด ศ.ก. วงกลมแนบนอก $\triangle ABC, G$ เป็นจุด Centroid ของ $\triangle$ จงพิสูจน์ว่า $OG^2 = r^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$
18. ถ้า AA', BB' เป็นเส้นมัธยฐานของ $\triangle ABC$ จงพิสูจน์ว่า $AA'^2 - BB'^2 = \frac{3}{4}(AC^2 - BC^2)$
19. $\triangle ABC$ มีเส้นแบ่งครึ่งจาก BC พบ AC ที่ P, AB ที่ Q จงพิสูจน์ว่า $OP \cdot OQ = OA^2$ เมื่อ O เป็นจุด ศ.ก. วงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$
20. $\triangle XYZ, \angle X = 1$ มุมฉาก $PQ, PR \perp XY, XZ$ ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $PY \cdot PZ = XY \cdot XQ - XZ \cdot XR - PX^2$
21. $\triangle ABC$ มี $\angle A = 1$ มุมฉาก บน AB, AC มี $\square$ จักร์ $ABDE$ และ $ACFG$ จงพิสูจน์ว่า
 - 1) DA, AF เป็นเส้นตรงเดียวกัน
 - 2) $DF^2 = 2 BC^2 + 4 BC \cdot AM$ เมื่อ M เป็นจุดปลายเส้นทแยงจาก A ไป BC
22. $\triangle ABE$ มี $AB = AE, C, D$ เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABE, AC, AD$ ตัด BE ที่ F, G จงพิสูจน์ว่า $AF^2 - AG^2 = FG \cdot GE - BF \cdot FG$
23. H เป็นจุด Orthocentre ของ $\triangle ABC$ มี R เป็นรัศมีวงกลม ABC จงพิสูจน์ว่า $HA^2 + HB^2 + HC^2 = 12 R^2 - (AB^2 + BC^2 + CA^2)$
24. ใน $\square ABCD$ ถ้า $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$ จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมทั้งสองตัดกันเป็นมุมฉาก
25. วงกลมวงหนึ่งถูกคอร์ดแบ่งเป็น 2 ส่วนโดยส่วนสูงของ segment ใหญ่ : segment เล็ก = 3 : 1 จงหาอัตราส่วนระหว่างเส้นผ่า ศ.ก. ของวงกลมนั้นกับคอร์ดเส้นนั้น

26. วงกลมวงหนึ่งมีกอร์คเส้นหนึ่งยาว = รัศมี, จงพิสูจน์ว่าส่วนของ segment ใหญ่ : ส่วนสูงของ segment เล็ก = $\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$
27. AB เป็นเส้นตรงที่ตก C แบ่งอย่างภายในโดย $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$ จงพิสูจน์ว่า AC ยาว $\frac{am}{m+n}$, CB ยาว $\frac{an}{m+n}$ กำหนด AB ยาว a
28. $\triangle ABC$ ท่อ BA, CA ไปที่ X, Y ให้ $AX = 4''$, $AY = 2''$ และ $XY \parallel BC$ จงหาค่า CY กำหนด $AB = 6''$
29. เส้นตรง $AB \parallel CD$ ขนานกัน ท่อ AC, BD ตัดกันที่ O กำหนด $AC = 3'$, $BD = 4'$, $CO = 5'$ จงหา OB เป็น ฟุต และ นิ้ว
30. $\triangle ABC$ มี $AB = 4''$, $BC = 6''$, $CA = 5''$ ท่อ BA ถึง X ให้ $AX = 7.5''$ และท่อ CA ถึง Y ทำให้ C, X, Y, B concyclic จงหาความยาว AY และ XY
31. $\triangle ABC$ มี $\angle A$ เป็นมุมบ้าน O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบ $\triangle$ ถ้าครึ่งวงกลมที่มี OA เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางตัด BC ที่ D จงพิสูจน์ว่า $AD^2 = BD \cdot DC$
32. วงกลมวงหนึ่งมีรัศมี r กอร์ค AB อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลาง = d, x เป็นจุดกึ่งกลาง AB จงพิสูจน์ว่า $AX \cdot XB = r^2 - d^2$
33. วงกลมวงหนึ่งมีรัศมี 11" กอร์ค AB ห่างจากจุดศูนย์กลาง 7", X เป็นจุดกลาง AB จงหาว่า $AX \cdot XB$
34. $\triangle ABC$ มี $AB = 6''$, $BC = 8''$, $CA = 7''$ วงกลมวงหนึ่งสัมผัสจุดกึ่งกลาง BC และผ่านจุด A โดยตัด AB, AC ที่ E, F ตามลำดับ จงหาความยาว AE และ AF
35. เส้นตรง XY, AB ขนานกัน อยู่ห่างกัน $1\frac{1}{2}''$, AB ยาว 2" มีวงกลมวงหนึ่งสัมผัส XY และผ่านจุด A และ B จงหารัศมีของวงกลม
36. $\square ABCD$ มีวงกลมบรรจุอยู่ภายในโดยวงกลมสัมผัสด้าน AB, BC, CD, DA ที่ P, Q, R, S ตามลำดับ $PR \perp SQ$ จงพิสูจน์ว่า ถ้าเส้นทแยงมุม AC, BD ตัดกันที่ O จะได้ $AO \cdot OC = BO \cdot OD$
37. วงกลม 2 วงตัดกันที่ A, B มี QR เป็นเส้นสัมผัสร่วมทางตรงสัมผัสวงกลมทั้งสองที่ Q, R บน QR มี P เป็นจุดใด ๆ ท่อ PA ตัดวงกลมที่ X และ Y จงพิสูจน์ว่า $PR^2 - PQ^2 = AP \cdot XY$ และถ้า P เป็นจุดกึ่งกลาง QR จงพิสูจน์ว่าตำแหน่งของ X และ Y อยู่ที่ A และ B
38. จากรูปจุด A, B และวงกลม fixed APQ เคลื่อนที่ได้ จงพิสูจน์ว่าวงกลม PQB ตัด AB ที่จุด Fixed จุดหนึ่ง
39. $\square ABCD$ แนบในวงกลมท่อ DC, AB พบกันที่ E ถ้า M, N เป็นจุดกลาง AE, DE ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $AM \cdot EB = DN \cdot EC$

40. $\triangle ABC$ มี $\angle A = 90^\circ$ ท่อ AC ถึงจุด D ให้ $CD = BC$ จงพิสูจน์ $BD^2 = 2 BC \cdot AD$
41. วงกลม 2 วงตัดกันที่ A และ B ลาก PQ ผ่าน B พบวงกลมทั้งสองที่ P, Q M เป็นจุดกลาง PQ โยง AM ตัดวงกลมที่ X, Y จงพิสูจน์ว่า 1) $MX = MY$ 2) $PX^2 + XQ^2 + QY^2 + YP^2 = PQ^2 + XY^2$
42. $\triangle PQR$ แนบในวงกลม TP, TR สัมผัสวงกลมที่ P, R TA $\parallel$ PR พบ QR ที่ต่อออกไปที่ A จงพิสูจน์ว่า Q, P, T, A concyclic และถ้า TQ, PR ตัดกันที่ B จงพิสูจน์ว่า AP สัมผัสวงกลม PBQ
43. A, B เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม 2 วงที่มีรัศมี r_1, r_2 ถ้า N อยู่บน AB โดย $AN^2 - BN^2 = r_1^2 - r_2^2$ และ P เป็นจุดใด ๆ บนเส้น $\perp AB$ ที่ผ่านจุด N จงพิสูจน์ว่า เส้นสัมผัสจาก P ไปยังวงกลมทั้งสองยาวเท่ากัน
44. วงกลมมีรัศมี 4" กอร์ค AP ยาว 7" AB เป็นเส้นผ่า ศ.ก. $PN \perp AB$ เส้นสัมผัสวงกลมที่ P พบ AB ที่ต่อออกไปที่ T จงหาว่า $\angle PAB$ ความยาว PN และ PT
45. กอร์ค AB, CD ของวงกลมวงหนึ่ง ตัดกันเป็นมุมฉากที่ O โยง CA, BD เส้น $ROS \perp CA$ ที่ R และพบ BD ที่ S จงพิสูจน์ว่า 1) $\angle SOB = \angle SBO$ 2) $BS = SD$
46. AB, XY เป็นกอร์คของวงกลมวงหนึ่งตัดกันที่ P กำหนด $AP = 5.1''$, $BP = 3.4''$, $PY = 6.8''$ พ.ท. $\triangle PAX = 4.5 \text{ in}^2$ จงหา พ.ท. $\triangle XPB$ และ $\triangle BPY$
47. ABCD เป็น $\square$ ด้านขนาน L, M เป็นจุดปลายเส้น $\perp$ ที่ลากจาก A, C ไปยัง BD และ X, Y เป็นจุดปลายเส้น $\perp$ ที่ลากจาก B, D ไปยัง AC จงพิสูจน์ว่า LXMY เป็น $\square$ ด้านขนาน
48. วงกลมมี O เป็นจุดศูนย์กลาง AB, CD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางที่ตัดกันที่ P อยู่บนเส้นรอบวงระหว่าง AC จงพิสูจน์ว่า $PB^2 - PA^2 = 4 \triangle PDC$
49. $\triangle ABC$ มี $\angle C = 1$ มุมฉาก, C เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี AC เขียนวงกลมคั่นส่วนของ AB ที่ D, ED สัมผัสวงกลมที่ D พบส่วนต่อของ CB ที่ E จงพิสูจน์ว่า EBD เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว
50. O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมมี AB เป็นกอร์ค M เป็นจุดกึ่งกลาง AB T เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมที่มี OM เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง จา T ลากเส้นสัมผัสวงกลมวงในพบเส้นรอบวงของวงกลมวงนอกที่ E จงพิสูจน์ว่า $AE^2 + BE^2 = 4 ET^2$
51. D เป็นจุดบนฐาน BC ของ $\triangle ABC$ ทำให้ $BD = 2 DC$ จงพิสูจน์ว่า $AB^2 + 2 AC^2 = 6 CD^2 + 3 AD^2$
52. X, Y เป็นจุดบนฐาน BC ของ $\triangle ABC$ ทำให้ $BX = XY = YC$ จงพิสูจน์ $AX^2 + AY^2 + 4 XY^2 = AB^2 + AC^2$
53. $\triangle ABC$ มี $BE \perp AC$ ที่ E, $CF \perp AB$ ที่ F จงพิสูจน์ $BC^2 = AB \cdot BF + AC \cdot CE$

54. AB เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ของวงกลมมี O เป็นจุด ศ.ก. ต่อ AB ออกไปถึงจุด C ทำให้ $BC = BO$ D เป็นจุดใดๆ บนเส้นรอบวง จงพิสูจน์ว่า $CD^2 + 2AD^2 = AC^2$

55. $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่วมี BC เป็นฐาน DE // BC พบ AB, AC ที่ D, E ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $BE^2 = CE^2 + BC \cdot DE$

56. วงกลม 2 วงรัศมี a, b มีจุดศูนย์กลางห่างกัน c จงหาความยาวของเส้นสัมผัสร่วม เมื่อ $c > (a + b)$ และเมื่อ $c < (a + b)$ ถ้าผลต่างของเส้นสัมผัสร่วมทั้ง 2 กรณีเท่ากับ 21 จงพิสูจน์ว่า $c^2 = \frac{a^2 + b^2 + 12 + a^2 b^2}{12}$

57. ถ้า S_n เป็นด้านของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมที่กำหนด ถ้า S_{2n} เป็นด้านของรูป 2n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมที่กำหนด จงพิสูจน์

$$S_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_n^2}}$$

โลไซ

Locus (พหูพจน์ = Loci) เป็นภาษา Latin แปลว่าตำแหน่งแห่งที่ (Location)

Locus ของจุด หมายถึงการเคลื่อนที่ของจุดที่เป็นไปตามเงื่อนไขหรือตามกฎเกณฑ์ที่แน่นอน

Loci ที่สำคัญ

Locus 1. ทางเดินของจุดซึ่งอยู่ห่างจากจุดหนึ่งเท่าที่กำหนดให้เป็นเส้นรอบวงของวงกลมที่มีจุดนั้นเป็นจุดศูนย์กลาง มีระยะห่างที่กำหนดให้เป็นรัศมี (Hall, 90)

Locus 2. ทางเดินของจุดซึ่งเส้นสัมผัสจากจุดนั้นมายังวงกลมที่กำหนดยาวคงที่ เป็นเส้นรอบวงของวงกลมอีกวงหนึ่ง ซึ่งร่วมจุดศูนย์กลางกับวงกลมที่กำหนด (Hall, Ex p. 94)

Locus 3. ทางเดินของจุดซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงเส้นหนึ่งเท่าที่กำหนดให้เป็นเส้นตรง 2 เส้นขนานกับเส้นตรงเส้นนั้นห่างจากเส้นตรงเส้นนั้นเท่ากัระยะที่กำหนดให้ (Hall, 90)

Locus 4. ทางเดินของจุดซึ่งอยู่ห่างจากจุด 2 จุดเป็นระยะเท่ากันเป็นเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับเส้นตรงที่เชื่อมจุด 2 จุดนั้น (Hall, 91)

Locus 5. ทางเดินของจุดซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรง 2 เส้นที่ตัดกันเป็นระยะเท่ากัน เป็นเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมซึ่งเส้นตรง 2 เส้นนั้นกระทำต่อกัน (Hall, 92)

Locus 6. ทางเดินของจุดซึ่งเส้นสัมผัสจากจุดนั้นไปยังวงกลมที่กำหนดทำมุมต่อกันเท่ากับมุมที่กำหนดให้ หรือวงกลมที่กำหนดให้รองรับมุมที่จุดนั้นเท่ากับมุมที่กำหนดให้ เป็นเส้นรอบวงของวงกลมที่ร่วมจุดศูนย์กลางกับวงกลมที่กำหนดให้

Locus 7. ทางเดินของจุดยอดมุมของสามเหลี่ยม ที่มีฐานคงที่ มุมยอดคงที่ เป็นเส้นรอบวงของวงกลมที่ฐานนั้นเป็นคอร์ด

Locus 8. ทางเดินของจุดกึ่งกลางของคอร์ดซึ่งผ่านจุดคงที่จุดหนึ่งภายในวงกลม เป็นเส้นรอบวงของวงกลมที่มีเส้นต่อจุดคงที่นั้นกับจุดศูนย์กลางของวงกลม เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง

Locus 9. ทางเดินของจุดกึ่งกลางของคอร์ดที่ยาวคงที่เป็นเส้นรอบวงของวงกลมที่ร่วมจุดศูนย์กลางกับวงกลมเดิม

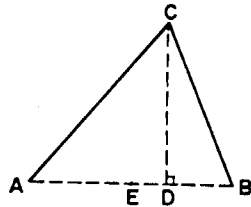
Locus 10. ทางเดินของจุดซึ่งผลบวกของกำลังสองของระยะทางจากจุดนั้นมายังจุด 2 จุดที่กำหนดให้มีค่าคงที่ เป็นเส้นรอบวงของวงกลมที่มีจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุด 2 จุดนั้นเป็นจุดศูนย์กลาง

Locus 11. ทางเดินของจุดซึ่งอัตราส่วนของระยะทางจากจุดนั้นมายังจุด 2 จุดที่กำหนดให้มีค่าคงที่ เป็นเส้นรอบวงของวงกลม

* วงกลมวงนี้มีชื่อเฉพาะว่า "Apollonian circle" หรือวงกลม Apollonius

Locus 12 ทางเดินของจุดซึ่งผลต่างของกำลังสองของระยะทางจากจุดนั้นมายังจุด 2 จุดที่กำหนดให้มีค่าคงที่ เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรงที่เชื่อมจุด 2 จุดนั้น

Ex I (Locus 12)



Given จุด A, B ตรึง C เป็นจุดที่เคลื่อนไป ทำให้ $CA^2 - CB^2 = \text{constant}$

Find Locus ของจุด C

Const โยง AB แบ่งครึ่ง AB ที่จุด E ลาก $CD \perp AB$ ที่จุด D

Proof $\therefore CA^2 - CB^2 = 2 \cdot AB \cdot ED$

แต่ $CA^2 - CB^2 = \text{constant}$

$\therefore 2 \cdot AB \cdot ED = \text{constant}$

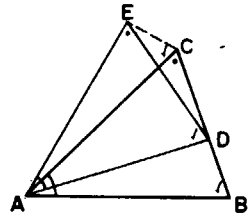
$ED = \text{constant}$ ($\because AB \text{ constant}$) แต่จุด E ตรึง $\therefore$ จุด D ตรึงด้วย

$\therefore$ Locus ของจุด C เป็นเส้นตรง $\perp$ AB ที่จุด D

Q.E.D.

* จุด D จะอยู่ที่ใดบน AB ขึ้นอยู่กับค่า constant ถ้าทราบค่า constant ก็หาจุด D ได้

Ex II



Given $\triangle ABC$ มี D เป็นจุดที่เคลื่อนที่บน BC, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

Find Locus ของจุด E

Const โยง CE

Proof $\therefore \angle AED = \angle ACD$; จุด A, D, C, E concyclic

$\therefore \angle ECA = \angle EDA = \angle ABC = \text{constant}$

และจุด C ตรึง

$\therefore$ Locus ของจุด E เป็นเส้นตรงผ่านจุด C ทำมุม

กับ BC $= \angle B + \angle C$ หรือเป็นเส้นตรงสัมผัสวง

กลม ABC ที่จุด C

Q.E.D.

โลไซ,

Ex III (Locus 1)

Given O เป็นจุดศ.ก. ของวงกลม จุด A ตรึง จุด B เคลื่อนที่ไปบนเส้นรอบวง C เป็นจุดกึ่งกลาง AB

Find Locus ของจุด C

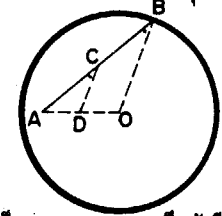
Const โยง AO, แบ่งครึ่ง AO ที่ D โยง CD, BO

Proof C, D เป็นจุดกึ่งกลาง AB, AO ตามลำดับ

$$CD = \frac{1}{2} BO = \text{constant}$$

จุด D ตรึง

$\therefore$ Locus ของจุด C เป็นเส้นรอบวงของวงกลม มี D เป็นจุดศ.ก. และ CD เป็นรัศมี **Q.E.D.**



Ex IV

Given $\angle BAC$ ตรึง จุด D อยู่ระหว่าง $\angle BAC$ ลาก DE, DF $\perp$ AB, AC ที่ E, F ตามลำดับ ทำให้ $DE + DF = \text{constant}$

Find Locus ของจุด D

Const ต่อ ED ถึงจุด P ให้ $DP = DF$ ลาก $PX \perp DP$ พบ AC ที่ X ต่อ XD พบ AB ที่ Y

Proof $\therefore EP = ED + DP = ED + DF = \text{constant}$

$\therefore PX \parallel AB$ ($\angle XPE + \angle PEA = 2$ มุมฉาก)

$\therefore$ จุด X ตรึง

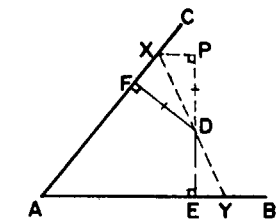
$\triangle DPX \cong \triangle DFX$ (ค.จ.ค.) $\therefore \angle DXP = \angle DXF$

แต่ $\angle DXP = \angle DYA$ (มุมแย้ง) $\therefore \angle DYA = \angle DXF$

นั่นคือ $AY = AX$ $\therefore$ จุด Y ตรึงด้วย

$\therefore$ Locus ของจุด D เป็นเส้นตรง XY

Q.E.D.



Ex V (Locus 11)

Given วงกลม P, Q สัมผัสกันภายนอกที่จุด O เส้นตรง ABCD $\parallel$ PQ ตัดเส้นรอบวงที่จุด A, B, C, D

ต่อ PB, QC พบกันที่ X ต่อ AP, DQ พบกันที่ Y

Find Locus ของจุด X, Y

Proof $\therefore BC \parallel PQ$; $XB:BP = XC:CQ$

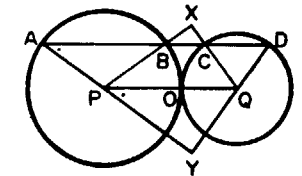
$$XP:BP = XQ:CQ \text{ (Componendo)}$$

$$XP:XQ = BP:CQ \text{ (Alternando)}$$

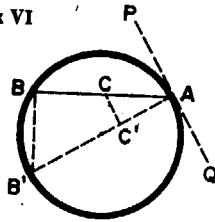
$$= PO:OQ$$

$$= \text{constant}$$

$\therefore$ Locus ของจุด X เป็นเส้นรอบวงของวงกลม (Locus 11) และ Locus ของจุด Y ก็ทำได้ในทำนองเดียวกัน **Q.E.D.**



Ex VI

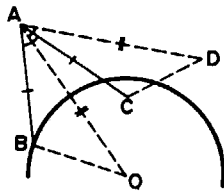


Given A เป็นจุดที่วิ่งบนเส้นรอบวง กอรัล AB เคลื่อนที่ได้
C เป็น จุดบน AB ทำให้ $AB \cdot AC = \text{constant}$
Find Locus ของจุด C
Const ลาก PQ สัมผัสวงกลมที่ A และให้จุด B เคลื่อนมาที่
จุด B' จุด C เคลื่อนมาที่จุด C' โดยให้ AB' เป็นเส้น
ผ่าศ.ก. โยง BB' และ CC'

Proof $AB \cdot AC = AB' \cdot AC'$; $\therefore$ จุด B, C, C', B' concyclic (ท.ป. 75)
 $\therefore \angle ACC' = \angle AB'B$
แต่ $\angle AB'B = \angle BAP$; จะได้ $\angle ACC' = \angle BAP \therefore CC' \parallel PQ$
 $\therefore$ จุด A ตรึง เส้นสัมผัส PQ ย่อมตรึงด้วย จุด C' ตรึง
 $\therefore$ Locus ของจุด C เป็นเส้นตรง $\parallel PQ$ และผ่านจุด C'

Q.E.D.

Ex VII (Locus 1)

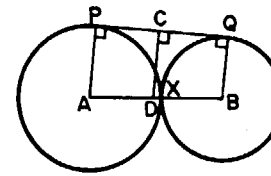


Given A เป็นจุดที่วิ่งภายนอกวงกลมจุด ศ.ก. O B เป็นจุด
ที่เคลื่อนที่ไปบนเส้นรอบวงของวงกลม ที่จุด A ทำ
 $\angle BAC = k$ และ $AC = AB$
Find Locus ของจุด C
Const ลาก AO และทำ $\angle OAD = k$ ให้ $AD = AO$
Proof

$\triangle ACD \cong \triangle ABO$ ($AC = AB, AD = AO, \angle CAD = \angle BAO$, ค.ม.ค.)
 $\therefore CD = BO = \text{รัศมีวงกลม} = \text{constant}$
และ $\therefore$ จุด D ตรึง ($\angle OAD = k = \text{constant}$ และ $AD = AO$)
 $\therefore$ Locus ของจุด C เป็นเส้นรอบวงของวงกลมมี D เป็นจุด ศ.ก.
รัศมี = รัศมีวงกลมที่กำหนดให้

Q.E.D.

Ex VIII (Locus 1)



Given X เป็นจุดที่เคลื่อนที่ไปบนเส้นตรง AB ที่ตรึงแน่น
วงกลมจุด ศ.ก. A รัศมี AX และวงกลมจุด ศ.ก. B
รัศมี BX มี PQ เป็นเส้นสัมผัสร่วม
C เป็นจุดกึ่งกลาง PQ

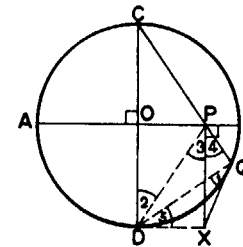
Find Locus ของจุด C

Const ลาก AP, BQ ที่ C ลาก $CD \perp PQ$ พบ AB ที่ D

Proof $AP \parallel BQ \therefore \square ABQP$ เป็น $\square$ คางหมู
C เป็นจุดกึ่งกลาง PQ และ $CD \parallel BQ \therefore D$ เป็นจุดกึ่งกลาง AB ด้วย
 $\square$ คางหมู ABQP มี CD เป็นเส้นต่อจุดกึ่งกลางด้านที่ไม่ขนานกัน
 $\therefore CD = \frac{1}{2} (AP + BQ) = \frac{1}{2} (AX + BX) = \frac{1}{2} AB$
 $= \text{constant}$ และจุด D ตรึงด้วย
 $\therefore$ Locus ของจุด C เป็นเส้นรอบวงของวงกลมมี AB เป็น เส้นผ่า ศ.ก.

Q.E.D.

Ex IX



Given เส้นผ่าศูนย์กลาง AB, CD ทั้งฉากกันที่จุด O
เส้นพหาควที่ผ่านจุด C พบเส้นรอบวงที่ Q ตัด AB ที่ P
เส้นสัมผัสวงกลมที่ Q พบเส้นตั้งฉากกับ AB ที่ P ที่จุด X

Find Locus ของจุด X

Const ลาก DX, DQ และ DP

Proof XQ สัมผัสวงกลมที่ Q $\therefore \angle 1 = \angle C$

จาก $\triangle POC \cong \triangle POD \therefore \angle C = \angle 2$
 $PX \parallel OD \therefore \angle 2 = \angle 3$
นั่นคือ $\angle 1 = \angle 3$ และจุด D, X, Q, P concyclic $\therefore \angle 4 = \angle 5$

แต่ $\angle 4 = \angle C$ ($PX \parallel CD$) $\therefore \angle 5 = \angle C$ จาก $\angle 5 = \angle C$ จะได้ว่า DX เป็นเส้นสัมผัส
 $\therefore$ Locus ของจุด X เป็นเส้นตรงสัมผัสวงกลมที่จุด D

Q.E.D.

Ex X

Given จุด A, B, C ทิ้งแน่นและอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
BD, CE ทั้งฉากกับเส้นตรงใด ๆ ที่ลากผ่าน A ที่จุด
D, E ตามลำดับ CD และ BE ตัดกันที่ R

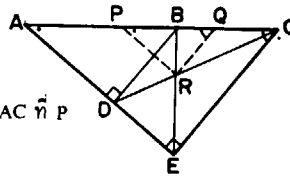
Find Locus ของจุด R

Const ลาก RQ//BD พบบ AC ที่ Q และ RP//AE พบบ AC ที่ P

Proof $\frac{BQ}{QC} = \frac{BR}{RE} = \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC} = \text{constant} \therefore$ จุด Q ทิ้ง
 $\frac{BP}{PA} = \frac{BR}{RE} = \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC} = \text{constant} \therefore$ จุด P ทิ้ง

และ $\angle PRQ = 1$ มุมฉาก

$\therefore$ Locus ของจุด R เป็นเส้นรอบวงของวงกลมมี PQ เป็นเส้นผ่า ศก. Q.E.D.



Ex XI

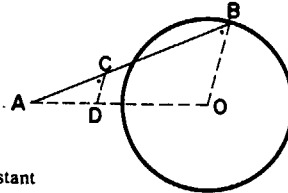
Given A เป็นจุดทึ่ภายนอกวงกลมจุด ศ.ก. O B เป็นจุดที่เคลื่อนที่ไปบนเส้นรอบวง C เป็นจุดบน AB แบ่ง AB ออกเป็นอัตราส่วน m:n

Find Locus ของจุด C

Const ลาก AO, OB จาก C ลาก CD//OB พบบ AO ที่ D

Proof $\frac{AD}{DO} = \frac{AC}{CB} = \frac{m}{n} = \text{constant} \therefore$ จุด D ทิ้ง
 $\frac{CD}{OB} = \frac{AC}{AB} = \frac{m}{m+n} \therefore CD = \frac{m}{m+n} \cdot OB = \text{constant}$

$\therefore$ Locus ของจุด C เป็นเส้นรอบวงของวงกลมมี D เป็นจุด ศ.ก. รัศมี = CD Q.E.D.
(ถ้าจุด A อยู่ภายในวงกลมก็หา Locus ได้ในทำนองเดียวกัน)



Ex XII

Given O เป็นจุด ศ.ก. ของวงกลมจุด A, B ทิ้ง และ อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกับจุด O
เส้นผ่า ศ.ก. CD เคลื่อนที่ได้อ่ DA, BC พบบกันที่ X

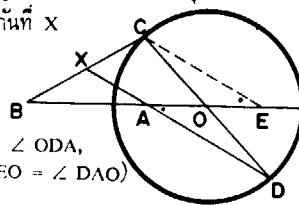
Find Locus ของจุด X

Const ลาก CE//DX พบบ BO ที่ E

Proof $\triangle CEO \cong \triangle DAO$ ($CO = OD, \angle ECO = \angle ODA, \angle CEO = \angle DAO$)
 $\therefore EO = OA$ หรือ $AE = 2AO$

จาก AX//CE $\therefore \frac{BX}{XC} = \frac{BA}{AE} = \frac{BA}{2AO} = \text{constant}$

จากนี้พิสูจน์ต่อตาม Ex XI ก็จะได้ Locus ของจุด X เป็น เส้นรอบวงของวงกลม Q.E.D.



Ex XIII

Given $\angle BAC$ ทิ้ง E, D เป็นจุดที่เคลื่อนที่ไ้บน AB, AC ตามลำดับ ทำให้ BE = CD, X เป็นจุดกึ่งกลาง ED

Find Locus ของจุด X

Const แบ่งครึ่ง $\angle A$ ให้เส้นแบ่งครึ่งมุมพบบ ED ที่ R จาก B, C ลากเส้นขนานกับ AR พบบส่วนของ ED ที่ P, Q ตามลำดับ แบ่งครึ่ง BC ที่ Y, โยง XY

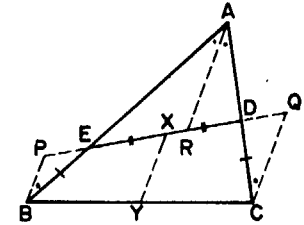
Proof จาก $\triangle CDQ \sim \triangle ADR$, จะได้ $\frac{DQ}{DC} = \frac{DR}{DA}$
ในทำนองเดียวกัน $\frac{PE}{EB} = \frac{ER}{EA}$
 $\therefore AR$ แบ่งครึ่ง $\angle A \therefore \frac{DR}{DA} = \frac{ER}{EA}$
 $\therefore \frac{DQ}{DC} = \frac{EP}{EB}$ แต่ $DC = EB \therefore DQ = EP$

และ $\therefore EX = XD$ จะได้ X เป็นจุดกึ่งกลาง PQ BP//CQ, Y เป็นจุดกึ่งกลาง BC

$\therefore XY // CQ // AR$ (เส้นต่อจุดกึ่งกลางด้านที่ไม่ขนานกันของ $\square$ กางหม ย่อม // ด้านคู่ขนาน)

$\therefore$ Locus ของจุด X เป็นเส้นตรง // เส้นแบ่งครึ่ง $\angle A$ และผ่านจุดกึ่งกลางของ BC

Q.E.D.



Ex XIV

Given วงกลม 2 วงขนาดไม่คงที่ สัมผัสกันภายนอกที่จุด C และสัมผัสเส้นตรง AB ที่ทิ้งแน่นที่จุด A, B ที่ทิ้งแน่นด้วย, PQ เป็นเส้นสัมผัสร่วม มี X เป็นจุดกึ่งกลาง

Find Locus ของจุด X

Const ลากเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด C พบบ AB, PQ ที่ D, Y ตามลำดับ

Proof พิสูจน์ให้ได้ว่าจุด X ทั้จุด Y

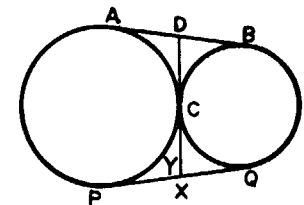
$$CX = \frac{PQ}{2}, DC = \frac{AB}{2}$$

$$DX = DC + CX = \frac{AB}{2} + \frac{PQ}{2} = \frac{AB}{2} + \frac{AB}{2} = AB = \text{constant} \quad (PQ = AB)$$

และ D เป็นจุดทึ่ (D เป็นจุดกึ่งกลาง AB)

$\therefore$ Locus ของจุด X เป็นเส้นรอบวงของวงกลม มี D เป็นจุด ศ.ก. รัศมี = AB

Q.E.D.

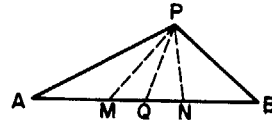


Ex XIX

Given เส้นตรง AB ตรึงแน่น P เป็นจุดที่ทำให้ $AP^2 + 2BP^2 = AB^2$

Find Locus ของจุด P

Const แบ่ง AB ออกเป็น 3 ส่วนเท่า ๆ กันที่จุด M, N และ
ให้ Q เป็นจุดกึ่งกลาง AB โยง PM, PQ, PN



Proof

$$AP^2 + 2BP^2 = AB^2 \text{ (given)}$$

$$AP^2 + BP^2 = AB^2 - BP^2 \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{แต่ } AP^2 + BP^2 = 2AQ^2 + 2PQ^2 \text{ (PQ เป็นเส้นมัธยฐานของ } \triangle ABP)$$

$$\text{แทนค่าใน (1); } 2AQ^2 + 2PQ^2 = AB^2 - BP^2$$

$$2\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + 2PQ^2 = AB^2 - BP^2 \left(AQ = \frac{AB}{2}\right)$$

$$2PQ^2 = \frac{AB^2}{2} - BP^2 \dots\dots\dots(2)$$

$$PM^2 + PN^2 = 2MQ^2 + 2PQ^2 \text{ (PQ เป็นเส้นมัธยฐานของ } \triangle PMN)$$

$$2PQ^2 = PM^2 + PN^2 - 2MQ^2$$

แทนค่า $2PQ^2$ ใน (2);

$$PM^2 + PN^2 - 2MQ^2 = \frac{AB^2}{2} - BP^2$$

$$PM^2 + PN^2 - 2\left(\frac{AB}{6}\right)^2 = \frac{AB^2}{2} - BP^2 \left(MQ = \frac{AB}{6}\right)$$

$$PN^2 = \frac{5AB^2}{9} - (BP^2 + PM^2)$$

$$\text{แต่ } BP^2 + PM^2 = 2MN^2 + 2PN^2 \text{ (PN เป็นเส้นมัธยฐานของ } \triangle PBM)$$

$$\therefore PN^2 = \frac{5AB^2}{9} - (2MN^2 + 2PN^2)$$

$$3PN^2 = \frac{5AB^2}{9} - 2MN^2$$

$$= \frac{5AB^2}{9} - 2\left(\frac{AB}{3}\right)^2 = \frac{AB^2}{3}$$

$$PN^2 = \frac{AB^2}{9}$$

$$PN = \frac{AB}{3} = \text{constant และจุด N ตรึง}$$

$\therefore$ Locus ของจุด P เป็นเส้นรอบวงของวงกลมมี N เป็นจุดศูนย์กลางมี NP เป็นรัศมี

Hall 94, 211

Q.E.D.

EXERCISES

1. P เป็นจุดที่เคลื่อนที่ไปบนเส้นตรง O เป็นจุดตรึง จงหา Locus ของจุด Q ซึ่งแบ่ง OP ออกเป็นอัตราส่วน m:n (Hall Ex 9 p. 94)

2. ฐาน AB ของ $\triangle ABC$ ตรึง, BC ขวากที่ จงหา Locus ของจุดกึ่งกลาง AC

3. P เป็นจุดที่เคลื่อนที่ไปบนเส้นตรง, A เป็นจุดตรึงภายนอกเส้นตรงถ้า $AQ = AP$ และ $\angle PAQ$ คงที่ จงหา Locus ของจุด Q

4. D เป็นจุดที่เคลื่อนที่อยู่ระหว่าง $\angle ABC$ ลาก $DX, DY \perp AB, BC$ ที่ X, Y ตามลำดับ จงหา Locus ของจุด D ที่ทำให้ $DX - DY = \text{constant}$

5. A, B เป็นจุดตรึงบนเส้นรอบวงของกลม คอร์ด AP, BQ เคลื่อนที่โต้แย้งกัน X เป็นจุดบน PQ แบ่ง PQ ออกเป็นอัตราส่วนที่ คงที่ จงหา Locus ของจุด X

6. X เป็นจุดตรึงบนแกน OA ของ $\angle AOB$, Y เป็นจุดที่เคลื่อนที่ไปบนแกน OB บน XY สร้าง $\triangle$ หน้าจั่ว XYZ ให้ XY เป็นฐานมีมุมที่ฐาน = $\angle O$ จงหา Locus ของจุด Z

7. $\square$ จักรสี่เหลี่ยม ABCD มีจุด A ตรึง จุด B เคลื่อนที่ไปตามเส้นรอบวงของวงกลม จงหา Locus ของจุด C และ D

8. $\triangle ABC$ มีจุด A ตรึง, D เป็นจุดกึ่งกลางฐาน BC ที่ยาวคงที่ C, D อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมที่ตรึงตัว จงหา Locus ของจุด B

9. $\square$ จักรสี่เหลี่ยม ABCD มี X, Y เป็นจุดที่เคลื่อนที่ไปบนด้าน AB, BC ตามลำดับทำให้ $BX = CY$ จงหา Locus ของจุดตัดของ AY กับ DX

10. จุด D เคลื่อนที่บนเส้นรอบวงของวงกลมมี A เป็นจุด ศ.ก. B เป็นจุดตรึงภายในหรือภายนอกวงกลม ABCD เป็น $\square$ ด้านขนาน จงหา Locus ของจุด C

11. เส้นตรง AB, CD ตรึงแน่น, X เป็นจุดบน AB, Y เป็นจุดบน CD จงหา Locus ของจุดตัดของเส้นแบ่งครึ่ง $\angle BXY$ และ $\angle DYX$

12. $\angle XOY$ มี A, C เป็นจุดที่เคลื่อนที่บนแกน DX, DY ตามลำดับ B เป็นจุดระหว่างแกน DX และ DY ถ้า ABCD เป็น $\square$ ด้านขนานและมีเส้นรอบรูปยาวคงที่ จงหา Locus ของจุด B

13. คอร์ด AB เคลื่อนที่โต้แย้งผ่านจุด C ที่ตรึงแน่นภายในวงกลมจาก C ลากเส้นตั้งฉากกับ AB พบเส้นรอบวงของวงกลมที่มี AB เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ที่จุด D จงหา Locus ของจุด D

14. $\angle XOY = 1$ มุมฉาก, A เป็นจุดตรึงบน OX, B เป็นจุดที่เคลื่อนที่ไปบน OY บน AB สร้าง $\square$ จักรสี่เหลี่ยม ABCD จงหา Locus ของจุด C และ D

15. $\triangle$ ด้านเท่า ABC มีจุด A ตรึง จุด B เคลื่อนที่ไปบนเส้นตรงที่ตรึงแน่น จงหา Locus ของจุด C

16. $\triangle ABC$ แนบในวงกลม P เป็นจุดที่เคลื่อนที่ไปบนส่วนโค้งน้อย AC ลาก $PD \perp AC$ ที่ D, $PE \perp AB$ ที่ E จงหา Locus ของจุด ศ.ก. ของวงกลม PDE

17. จุด P อยู่ระหว่าง $\angle AOB$ ที่ตรึงแน่น ลาก $PX \perp OA$ ที่ X, $PY \perp OB$ ที่ Y ถ้า XY ขวากที่ จงหา Locus ของจุด P

18. A เป็นจุดครึ่งบนเส้นรอบวงของวงกลม คอร์ด BC เคลื่อนที่ได้แค่ว่าวงที่ จงหา Locus ของจุด Orthocentre ของ $\triangle ABC$
19. $\square$ จักรสี่เหลี่ยม ABCD ทြึงแน่น AEFG เป็น $\square$ จักรสี่เหลี่ยมหนึ่งทีเคลื่อนที่ได้แค่ว่าขนาดคงที่ ลาก $AX \perp BE$ ที่ X, ค่อก XA พบ DG ที่ Y จงหา Locus ของจุด Y
20. $\triangle ABC$ มี $DE \parallel BC$ ตัด AB, AC ที่ D, E ตามลำดับ ลาก BE, CD ตัดกันที่ X จงหา Locus ของจุด X
21. จุด A, B, C อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน จงหา Locus ของจุดซึ่ง AB, BC รองรับมุมเท่ากันที่จุดนั้น
22. $\triangle ABC$ มีฐาน BC ทြึง $\angle A$ คงที่ D, E เป็นจุดกึ่งกลาง AB, AC ตามลำดับ O เป็นจุดกึ่งกลาง DE จงหา Locus ของจุด O
23. จงหา Locus ของจุดซึ่งเมื่อลากเส้นสัมผัสจากจุดนั้นมายังวงกลม 2 วงที่กำหนดให้จะได้เส้นสัมผัสยาวเท่ากัน
24. จุด O อยู่นภายใน $\triangle ABC$ เส้นแบ่งทြึง $\angle AOB, \angle AOC$ พบ AB, AC ที่จุด X, Y ตามลำดับทำให้ $XY \parallel BC$ จงหา Locus ของจุด O
25. A, B เป็นจุดครึ่งบนเส้นรอบวงของวงกลม จุด C เคลื่อนที่ได้บนเส้นรอบวง ถ้า X เป็นจุดบน BC ทำให้ $BX \cdot XC = AX^2$ จงหา Locus ของจุด X
26. A เป็นจุดครึ่งบนเส้นรอบวง B เป็นจุดทีเคลื่อนที่ได้บนเส้นรอบวง ถ้า C เป็นจุดบน AB ที่ออกไป จงหา Locus ของจุด C เมื่อ $AB \cdot AC = \text{constant}$ และหา Locus ของจุด C เมื่อ $AC \cdot BC = \text{constant}$
27. $\triangle ABC$ มี $AB = AC$, D เป็นจุดภายใน $\triangle$ ลาก DP, DQ, DR ตั้งฉากกับ AB, BC, CA ที่จุด P, Q, R ตามลำดับ ถ้า $DQ^2 = DP \cdot DR$ จงหา Locus ของจุด D
28. A เป็นจุดครึ่งบนนอกวงกลม B เป็นจุดทีเคลื่อนที่ได้บนเส้นรอบวง ถ้า C เป็นจุดบน AB ทำให้ $AC \cdot AB = \text{constant}$ จงหา Locus ของจุด C
29. วงกลม 2 วงตัดกันที่จุด A, B คอร์ด CD และ EF เคลื่อนที่ได้บนวงกลมทั้งสองวงละ คอร์ด ทำให้ $CD = EF = AB$ และ $CD \parallel EF$ ด้วย ถ้า P, Q เป็นจุดกึ่งกลาง CD, EF จงหา Locus ของจุดกึ่งกลางของ PQ
30. จงหา Locus ของจุดซึ่งวงกลม 2 วงที่กำหนดให้รองรับมุมเท่ากันที่จุดนั้น
31. $\triangle ABC$ มีจุด A ทြึง จุด B เคลื่อนที่ได้บนเส้นรอบวงของวงกลมที่กำหนดให้ จงหา Locus ของจุด C ถ้ามุมทั้งสามของ $\triangle ABC$ มีขนาดคงที่
32. A, B, C และ D เป็นจุดครึ่งบนเส้นรอบวงของวงกลม P เป็นจุดทีเคลื่อนที่อยู่ในวงกลม

- คือ CP, DP พบเส้นรอบวงที่จุด Q, R ตามลำดับ จงหา Locus ของจุดตัดอีกจุดหนึ่งของวงกลม PQB และ วงกลม PRA
33. วงกลมขนาดคงที่เคลื่อนที่ผ่านจุดยอดมุมที่กำหนดให้ตัดแกนของมุมที่จุด A, B จงหา Locus ของจุดปลายทั้งสองของเส้นผ่า ศ.ก. ที่ลาก // คอร์ด AB
34. จุด A, B, C ทြึงและไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน จงหา Locus ของจุด D ที่ทำให้ $AD^2 + BD^2 = CD^2$
35. วงกลมวงหนึ่งเคลื่อนที่อยูระหว่างมุม O ที่กำหนดให้สัมผัสแกนของมุมที่จุด B และ D A เป็นจุดครึ่งบน OB, AE สัมผัสวงกลม ที่จุด E จงพิสูจน์ว่า DE ผ่านจุดครึ่งรูปหนึ่ง
36. จุด P ทြึง เส้นทแยงที่ลากจาก P ตัดแกนของมุม O ซึ่งทြึงที่จุด A และ B ถ้า A', B' เป็นจุดบน OA, OB ตามลำดับ ทำให้ $OA' : OA = OB' : OB = \text{constant}$ จงพิสูจน์ว่า A'B' ผ่านจุดครึ่งรูปหนึ่ง
37. จุด O, A, B ทြึงและอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน เส้นตรง OPQ เคลื่อนที่ได้รอบจุด O ตัดเส้นขนาน 2 เส้นซึ่งทြึงแน่นที่จุด P และ Q ค่อก AP, BQ พบกันที่จุด X จงหา Locus ของจุด X
38. จุด A, B อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันกับ O ซึ่งเป็นจุด ศ.ก. ของวงกลม เส้นผ่า ศ.ก. PQ เคลื่อนที่ได้ จงหา Locus ของจุดตัดอีกจุดหนึ่งของวงกลม APO และวงกลม BQO
39. A เป็นจุดครึ่งบนเส้นรอบวงของวงกลมจุด ศ.ก. O จุด C เป็นจุด ศ.ก. ของวงกลมใด ๆ ที่ผ่านจุด O และ A และตัดเส้นรอบวงของวงกลม O ที่จุด D เส้นสัมผัสวงกลม C ที่จุด O และ D ตัดกันที่จุด M จงหา Locus ของจุด M และจงพิสูจน์ว่า MC สัมผัสวงกลมอีกวงหนึ่งซึ่งทြึงแน่นและมีจุด ศ.ก. ที่จุด O
40. $\triangle APQ$ มีจุด A ทြึง จุด P เคลื่อนที่อยูบนเส้นตรงทြึงแน่น AP ตัดเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งซึ่งทြึงแน่นและ // เส้นตรงเส้นแรกที่จุด R ถ้า $PQ = AR$ และ $\angle APQ$ คงที่ จงหา Locus ของจุด Q
41. $\triangle ABC$ มีฐาน BC ทြึง, $\angle A$ คงที่ เส้นแบ่งทြึงมุมทั้งสามพบเส้นรอบวงของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle ABC$ ที่จุด D, E และ F จงหา Locus ของจุด Orthocentre ของ $\triangle DEF$
42. จุด A, B ทြึง O เป็นจุด ศ.ก. ของวงกลมใด ๆ ที่ผ่านจุด A และ B ตัดเส้นทแยงที่ลากผ่านจุด A และทြึงแน่นที่จุด C จงหา Locus ของจุด Centroid ของ $\triangle ACO$ และจุดกึ่งกลางของรัศมี OC
43. เส้นตรง OA, OB ทြึงแน่น C, D เป็นจุดทีเคลื่อนที่บน OA, OB ตามลำดับ ทำให้ $AC : BD = \text{constant}$ ถ้า E เป็นจุดบน CD ทำให้ $CE : ED = \text{constant}$ จงหา Locus ของจุด E
44. วงกลม 2 วงมีจุด ศ.ก. ร่วมกัน A เป็นจุดครึ่งบนเส้นรอบวงของวงกลมวงใหญ่ BC เป็นคอร์ดทีเคลื่อนที่ได้ของวงกลมวงใหญ่และสัมผัสวงกลมวงเล็กด้วย จงหา Locus ของจุด Orthocentre ของ $\triangle ABC$

45. AB เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ที่ตั้งฉากของวงกลมที่มี O เป็นจุด ศ.ก. C เป็นจุดใด ๆ บนเส้นรอบวง เส้นสัมผัสวงกลมที่จุด C พบส่วนของ AB ที่จุด D จงหา Locus ของจุด In-centre และ Ex-centre ของ $\triangle CDO$
46. กำหนดให้จุดกึ่งกลางฐานของ $\triangle$ ตั้ง จุดปลายเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดปลายทั้งสองข้างของฐานไปยังด้านตรงข้ามตั้ง จงหา Locus ของจุดยอดและจุด Orthocentre ของ $\triangle$ นี้
47. $\triangle$ ทั้งหมดที่มีมุมทั้งสามเท่ากันทุกมุมมีจุด Orthocentre ร่วมกันและตั้งฉากกัน มีจุดยอดมุมที่เท่ากันมุมหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นหนึ่งแล้ว จงหา Locus ของจุดยอดมุมอีก 2 จุดที่เหลือ
48. กำหนดให้ทิศทางของฐาน, จุดกึ่งกลางฐาน, จุด Orthocentre ของ $\triangle$ ตั้ง จงพิสูจน์ว่าวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle$ นี้ผ่านจุดตั้งฉาก 2 จุดและจงหา Locus ของจุด Centroid ของ $\triangle$ นี้
49. $\triangle ABC$ มีฐาน BC ตั้ง $\angle A$ คงที่ ต่อเส้นแบ่งครึ่ง $\angle A$ ออกไปถึงจุด D ให้ $2AD = AB + AC$ จงหา Locus ของจุด D
50. วงกลมใด ๆ ที่ผ่านจุดตั้ง A และ D ตัดเส้นตรง 2 เส้นที่ผ่านจุด A และตั้งฉากกับด้าน BC และ C จงหา Locus ของจุด Orthocentre ของ $\triangle ABC$
51. วงกลมใด ๆ ที่มีจุด ศ.ก. อยู่บนฐาน BC ของ $\triangle$ หน้าจั่ว ABC และผ่านจุด A ตัด AB, AC ที่ P, Q ตามลำดับ จงหา Locus ของจุดกึ่งกลางของ PQ
52. X เป็นจุดตั้งบนเส้นสัมผัส AB จุด C, D เคลื่อนที่ไปบน AB ทำให้ $CX = XD$ จงหา Locus ของจุดตัดของเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด C และ D
53. จุด C และ D เคลื่อนที่ไปบนเส้นตรงโดยมีระยะห่างจากจุด ศ.ก. วงกลมหนึ่งเท่ากัน CE, DF เป็นเส้นสัมผัสที่จุด X จงหา Locus ของ
1. จุด X 2. จุด In-centre และจุด Orthocentre ของ $\triangle EFX$
 3. จุด Circumcentre ของ $\triangle PEF$ เมื่อ P เป็นจุดตั้งที่กำหนดให้
54. ABCD เป็น $\square$ ด้านไม่เท่า จงหา Locus ของจุด E ที่ทำให้ $\triangle ABE + \triangle CDE = \triangle BCE + \triangle DAE$
55. P เป็นจุดตั้งภายในวงกลม คอร์ด AB, CD เคลื่อนที่ได้และตั้งฉากกันที่จุด P จงหา Locus ของจุด Centroid ของ $\triangle ABC$ และ $\triangle ABD$
56. กำหนดให้จุด Orthocentre จุดกึ่งกลางฐานของ $\triangle$ ตั้งและกำหนดทิศทางของฐานของ $\triangle$ คงที่ด้วย จงหา Locus ของจุด ศ.ก. ของ nine-point circle

การสร้าง

วิธีการทั่วไปในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการสร้าง

โจทย์การสร้างบางประเภทเป็นการนำเอาสิ่งที่เรารู้ไปแล้วมาประยุกต์ใช้โดยตรงและวิธีการสร้างจะเห็นได้อย่างชัดเจน ตัวอย่างเช่นการสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่ง

ถ้าวิธีการสร้างของโจทย์ข้อนี้ยุ่งยากขึ้นไปอีกแต่เราวิธีวิธีการหลักก็อาจจะแก้โจทย์ข้อนี้ได้ โดยเริ่มจากสิ่งที่เรารู้ว่าจะเริ่มอย่างไรแล้วทำตามวิธีหลักเป็นขั้น ๆ จนกระทั่งบรรลุเป้าหมาย วิธีการเช่นนี้เรียกว่า Synthetic Method (วิธีสังเคราะห์)

แต่อย่างไรก็ตามวิธีการเช่นนี้ก็ยังไม่อาจแก้ไขปัญหาลงตัวอย่างได้ เมื่อโจทย์นั้นเป็นโจทย์ที่ไม่อาจเห็นได้ชัดเจนเพราะไม่รู้จะเริ่มต้นอย่างไรและการจะมาลองว่าจะเริ่มอย่างไรก็เริ่มไปไม่ได้ (เพราะอาจเป็นไปได้หลายอย่าง)

แต่เรายังคงรู้ว่าปัญหาคืออะไรและรูปอะไรที่เราต้องการเมื่อทำเสร็จแล้ว การนำเอารูปที่เรา รู้คร่าว ๆ นั้นมาช่วยในการแก้โจทย์จึงเป็นการช่วยได้มาก โดยการศึกษารูปนั้นอย่างระมัดระวังและถี่ถ้วน ก็อาจจะค้นพบวิธีการได้ ขบวนการเช่นนี้เรียกว่า Analytic Method (วิธีวิเคราะห์) ประกอบด้วยวิธีการเป็นขั้น ๆ ดังนี้

Analysis (วิเคราะห์) สมมติว่าเราทำโจทย์เสร็จแล้ว จากรูปที่ต้องการอย่างคร่าว ๆ สังเกตดูว่าส่วนที่กำหนดให้และส่วนที่ยังไม่ทราบนั้นมีความเกี่ยวข้องกันอย่างไร จนกว่าจะค้นพบความสัมพันธ์ที่จะนำมาใช้ในการสร้างได้

Construction (สร้าง) ดำเนินการสร้างรูปจริง ๆ โดยใช้สิ่งที่ได้รับจากการวิเคราะห์

Proof (พิสูจน์) แสดงให้เห็นว่ารูปที่ได้เป็นไปตามเงื่อนไขของโจทย์อย่างไร

Discussion (พิจารณา) พิจารณาโจทย์ว่าอาจจะกำหนดสิ่งอื่นมาให้สร้างแบบเดียวกันได้อย่างไรบ้าง วิธีการสร้างมีอย่างอื่นอีกหรือไม่ และอื่น ๆ

บทสร้างที่ควรทราบเป็นพื้นฐาน

1. การแบ่งครึ่งมุม, เส้นตรง, ส่วนโค้งที่กำหนดให้
2. การสร้างเส้นตรงให้ตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้
3. การสร้างมุมให้เท่ากับมุมที่กำหนดให้
4. การสร้างมุม 30° , 45° และ 60°
5. การสร้างรูปสามเหลี่ยม, รูปสี่เหลี่ยมจากข้อมูลอย่างง่าย ๆ เช่นกำหนดด้านทั้งสามให้

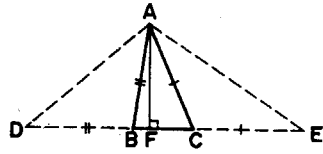
จงสร้าง $\triangle$ หรือกำหนดด้านทั้งสี่ให้และมุม 1 มุมจงสร้าง $\square$

6. การแบ่งเส้นตรงออกเป็นหลาย ๆ ส่วนเท่า ๆ กัน
7. การสร้างรูปสามเหลี่ยม, รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส, รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าให้มีพื้นที่เท่ากับพื้นที่รูปหลายเหลี่ยมที่กำหนดให้
8. การสร้างเส้นสัมผัสวง, เส้นสัมผัสร่วมทั้งทางตรงและทางอ้อม
9. การสร้างวงกลมล้อมรอบ $\triangle$, แนบใน $\triangle$ และ แนบนอก $\triangle$
10. การสร้าง Segment ให้มีมุมใน Segment เท่ากับมุมที่กำหนดให้
11. การสร้าง $\square$ จตุรัส ให้มีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ $\square$ ผืนผ้า
12. การแบ่งเส้นตรงอย่างภายในและภายนอกออกเป็นอัตราส่วนที่กำหนดให้
13. การหาสัดส่วนกึ่งกลางของเส้นตรง 2 เส้นที่กำหนดให้ และการหาสัดส่วนกึ่งกลางของเส้นตรง 3 เส้นที่กำหนดให้
14. การสร้างรูป 5 เหลี่ยม, 6 เหลี่ยม, 8 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า
15. การสร้าง Locus ของจุดโดยมีเงื่อนไขต่าง ๆ กัน (ดูเรื่อง Locus ประกอบ)

สัญลักษณ์ที่ใช้ในเรื่องการสร้าง

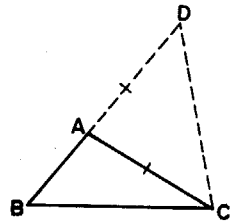
$A, B, C, \dots$	$\angle A, \angle B, \angle C, \dots$
a, b, c	= ด้านตรงข้าม $\angle A, \angle B, \angle C$
h_a, h_b, h_c	= ส่วนสูงที่ลากจาก $\angle A, \angle B, \angle C$
m_a, m_b, m_c	= เส้นมัธยฐานที่ลากจาก $\angle A, \angle B, \angle C$
l_a, l_b, l_c	= เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของ $\angle A, \angle B, \angle C$
l'_a, l'_b, l'_c	= เส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกของ $\angle A, \angle B, \angle C$
$2S$	= $a + b + c$
R	= รัศมีวงกลมล้อมรอบ $\triangle$
r	= รัศมีวงกลมแนบใน $\triangle$
r_a, r_b, r_c	= รัศมีวงกลมแนบนอก $\triangle$ ตรงข้าม $\angle A, \angle B, \angle C$
Ana	= Analysis

Ex I จงสร้าง $\triangle$ กำหนด 2 S, A, h_a



Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ ต่อ CB ถึง D ให้ $BD = BA$ ต่อ BC ถึง E ให้ $CE = CA$ $\therefore DE = 2S$ ลาก $AF \perp BC$ ที่ F $\therefore AF$ ทราบ $\angle BAD = \frac{1}{2}B$, $\angle CAE = \frac{1}{2}C$ $\therefore \angle DAE = \frac{1}{2}B + A + \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}(A+B+C) + \frac{1}{2}A = 90^\circ + \frac{1}{2}A$ $\therefore$ หา $\angle DAE$ ได้เพราะทราบ A นั่นคือ $\triangle ADE$ สามารถสร้างได้โดยลาก $DE = 2S$ จากนั้นหา Locus ของจุด A ทำให้ $\angle DAE = 90^\circ + \frac{1}{2}A$ (Locus 7) และหา Locus ของจุดที่อยู่ห่างจาก $DE = h_a$ (Locus 3) Locus ทั้งสองตัดกันที่จุดไหนจุดนั้นคือจุด A ที่ต้องการ จากนั้นหาจุด B ได้โดยที่จุด A ทำ $\angle DAB = \angle D$ ให้ AB พบ DE ที่ B จุด C ก็หาในทำนองเดียวกัน

Ex II จงสร้าง $\triangle$ กำหนด a, A, $b+c$

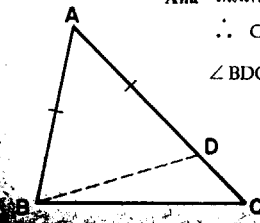


Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ ต่อ BA ถึง D ให้ $AD = AC$ $\therefore BD = b+c$, $\angle D = \frac{1}{2}A$, $BC = a$ $\therefore \triangle BCD$ สามารถสร้างได้โดยหา Locus ของจุด D ที่ทำให้ $\angle BDC = \frac{1}{2}A$ (Locus 7) จากนั้นใช้ B เป็นจุด ศ.ก. รัศมี $b+c$ ตัด Locus ที่ได้ที่จุด D เมื่อได้ $\triangle BCD$ ก็หาจุด A ได้โดยที่จุด C ทำ $\angle DCA = \angle D$, CA ตัด BD ที่จุด A

Ex III จงสร้าง $\triangle$ กำหนด b, c, $B-C$

Ana จากรูปใน Ex II $\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = C + \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(A+B+C) - \frac{1}{2}(B-C) = 90^\circ - \frac{1}{2}(B-C)$ $\therefore$ สามารถสร้าง $\triangle ABC$ ได้โดย ลาก $BD = b+c$ หา Locus ของจุด C ที่ทำให้ $\angle BCD = 90^\circ - \frac{1}{2}(B-C)$ จะได้ Locus เป็นเส้นรอบวง (Locus 7) ต่อมาหาจุด A บน BD ทำให้ $AB = c$ ให้ A เป็นจุด ศ.ก. รัศมี b ตัดเส้นรอบวงที่จุด C โดย AC, CB จะได้ $\triangle ABC$ ตามต้องการ

Ex IV จงสร้าง $\triangle$ กำหนด a, A, $b-c$

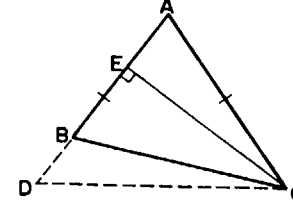


Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ตามต้องการ หาจุด D บน AC ทำให้ $AD = AB$ $\therefore CD = b-c$, $\angle ADB = \angle ABD = \frac{1}{2}(180^\circ - A) = 90^\circ - \frac{1}{2}A$, $\angle BDC = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}A) = 90^\circ + \frac{1}{2}A$ $\therefore \triangle BCD$ สามารถสร้างได้เพราะทราบ $BC = a$, $CD = b-c$, $\angle BDC = 90^\circ + \frac{1}{2}A$ จากนั้นที่จุด B ทำ $\angle DBA = 180^\circ - \angle BDC$ ให้ BA พบส่วนต่อของ CD ที่ A จะได้ $\triangle ABC$ ตามต้องการ

Ex V จงสร้าง $\triangle$ กำหนด $b-c$, a, $B-C$

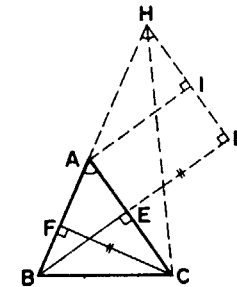
Ana จากรูปใน Ex IV $\angle CBD = \angle ABC - \angle ABD = B - \frac{1}{2}(180^\circ - A) = B + \frac{1}{2}A - 90^\circ = \frac{1}{2}(A+B+C) - 90^\circ + \frac{1}{2}(B-C) = \frac{1}{2}(B-C)$, $CD = b-c$, $BC = a$ $\therefore \triangle BCD$ สามารถสร้างได้ จากนั้นก็สร้าง $\triangle ABC$ ได้ตามต้องการ

Ex VI จงสร้าง $\triangle$ กำหนด a, $b-c$, h_c



Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ตามต้องการ ต่อ AB ถึงจุด D ให้ $AD = AC$ $\therefore BD = b-c$, $BC = a$, $CE = h_c$ $\therefore \triangle BDC$ สามารถสร้างได้ จากนั้นหาจุด A โดยที่จุด C ทำ $\angle DCA = \angle D$ พบส่วนต่อของ DB ที่จุด A

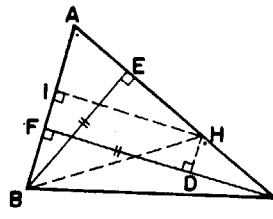
Ex VII จงสร้าง $\triangle$ กำหนด a, A, h_b+h_c



Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ ต่อ BE ถึงจุด D ให้ $ED = CF$ จาก D ลาก $DH \parallel AC$ พบ BA ที่ต่อออกไปที่ H ลาก $AI \parallel BD$ พบ DH ที่จุด I $\therefore \angle D = 90^\circ$, $BD = BE+ED = BE+CF = h_b+h_c$, $\angle BHD = A$ $\therefore \triangle BDH$ สามารถสร้างได้ ซึ่งจะทำให้ทราบ BH, $\square AEDI$ เป็น $\square$ ผืนผ้า $\therefore AI = ED = CF$, $\triangle AHI \cong \triangle ACF$ ($AI = CF$, $\angle AIH = \angle CFA = 90^\circ$, $\angle AHI = A$) จะได้ $AH = AC$ $\therefore BH = BA+AH = BA+AC = b+c$ จากนั้นก็สร้าง $\triangle ABC$ ได้ เพราะทราบ a, A, $b+c$ (BH) ตามวิธีสร้างจาก Ex II

หรือจะสร้าง $\triangle ABC$ โดยตรงก็ได้ดังนี้คือ $\angle DHC = \angle ACH$ (มุมแย้ง) แต่ $\angle ACH = \angle AHC$ ($AH = AC$) $\therefore \angle DHC = \angle AHC$ นั่นคือ CH แบ่งครึ่ง $\angle BHD$ $\therefore$ หาจุด C ได้โดยเมื่อสร้าง $\triangle BDH$ ได้แล้วแบ่งครึ่ง $\angle BHD$ แล้วให้ B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี a ตัดเส้นแบ่งครึ่ง $\angle BHD$ ที่จุด C ต่อไปหาจุด A โดยทำ $\angle HCA = \angle CHB$ ให้ CA พบ BH ที่จุด A หรือจะลากเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉาก CH พบ BH ที่จุด A ก็ได้

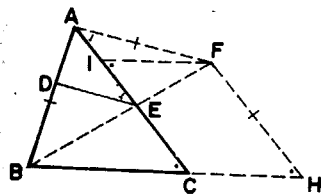
Ex VIII จงสร้าง $\triangle$ กำหนด $a, A, h_c - h_b$



Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ หาจุด D บน CF ทำให้ $FD = BE$ ลาก $DH \parallel AB$ พบ AC ที่ H ลาก $HI \parallel CF$ พบ AB ที่จุด I $\therefore CD = h_c - h_b, \angle CDH = 90^\circ, \angle CHD = A \therefore \triangle CDH$ สามารถสร้างได้ ทำให้หา CH ได้ $\square DHIF$ เป็น $\square$ ผืนผ้า $\therefore HI = FD = BE$ จาก $\triangle AIH \cong \triangle ABE$ ($HI = BE, A$ มุมร่วม, $\angle AIH = \angle AEB = 90^\circ$) จะได้ $AH = AB \therefore CH = CA - HA = CA - AB = b - c$ ซึ่งเรารู้ว่า CH แล้ว $\therefore$ สามารถสร้าง $\triangle ABC$ ได้เพราะทราบ $a, A, b - c$ ได้วิธีสร้างจาก Ex IV

หรือจะสร้าง $\triangle ABC$ โดยตรงเลยก็ได้ทั้งนี้คือ $\angle DHB = \angle HBA$ (มุมแย้ง) แต่ $\angle HBA = \angle BHA$ ($AH = AB$) $\therefore \angle DHB = \angle BHA$ หรือ BH แบ่งครึ่ง $\angle DHA \therefore$ หาจุด B ได้โดยแบ่งครึ่งมุมภายนอกของ $\angle DHC$ (เมื่อสร้าง $\triangle CDH$ ได้แล้ว) แล้วใช้ C เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี $= a$ ตัดเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกของ $\angle DHC$ ที่จุด B จากนั้นหาจุด A ทำนองเดียวกันใน Ex VII

Ex IX จงหาจุด D, E บนด้าน AB, AC ของ $\triangle ABC$ ทำให้ $BD = DE = EC$

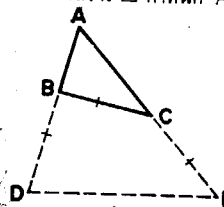


Ana สมมติได้จุด D, E ตามต้องการ ลาก $AF \parallel DE$ พบ ส่วนต่อของ BE ที่จุด F ลาก $FH \parallel AC$ พบ ส่วนต่อของ BC ที่จุด H จากเรื่องจุดศูนย์กลางรัศมี จะได้ $BA = AF = FH \therefore AF, FH$ ทราบ เพราะทราบ AB ต่อไป

คือหาจุด F โดยให้ C เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี $= AB$ ตัด AC ที่จุด I แล้วให้ A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี $= AB$ ตัดเส้นตรงที่ลากจากจุด I $\parallel BC$ ที่ F ลาก $FH \parallel AC$ พบส่วน

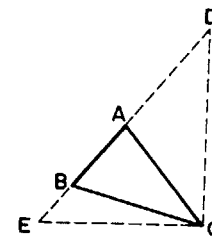
ต่อของ BC ที่ H ลาก BF ตัด AC ที่จุด E ลาก $ED \parallel AF$ พบ AB ที่จุด D จะได้จุด D, E ตามต้องการ

Ex X จงสร้าง $\triangle$ กำหนด $A, a+b, a+c$



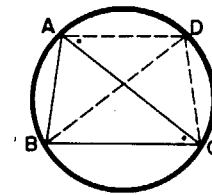
Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ ต่อ AB ถึง D ให้ $BD = BC$ ต่อ AC ถึง E ให้ $CE = CB \therefore AD = a+c, AE = a+b$ นั่นคือ $\triangle ADE$ สามารถสร้างได้เพราะทราบ A, AD, AE ต่อมาคือหาจุด B, C บน AD, AE ตามลำดับแล้วทำให้ $DB = BC = CE$ ซึ่งหาได้โดยวิธีสร้างจาก Ex IX ก็จะได้ $\triangle ABC$ ตามต้องการ

Ex XI จงสร้าง $\triangle$ กำหนด $a, A, (b+c) : (b-c) = p : q$



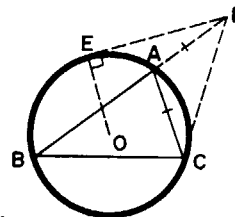
Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ ต่อ AB ออกไปทั้งสองข้างถึงจุด D, E ทำให้ $AD = AE = AC \therefore BD = b+c, BE = b-c$ นั่นคือ $BD : BE = p : q, \angle D = \frac{1}{2}A, \angle E = 90^\circ - \frac{1}{2}A$ เราทราบ BC และ A $\therefore$ หา Locus ของจุด D และ E ได้ (Locus 7) ขณะนี้เราได้วงกลม 2 วง (Locus ของจุด D และ E) ตัดกันที่จุด B และ C ต่อไปคือการลากเส้นผ่านจุด B พบเส้นรอบวงทั้งสองที่จุด D และ E แล้วทำให้ $BD : BE = p : q$ ซึ่งก็สามารถหาเส้นตรง DBE ได้จากวิธีสร้างตาม Ex III ของบทต่อไปเมื่อได้เส้นตรง DBE แล้วก็หาจุด A ได้เพราะจุด A จะเป็นจุดกึ่งกลาง DE

Ex XII จงสร้าง $\triangle$ กำหนด $R, b+c, B-C$



Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ วงกลม ABC สร้างได้เพราะทราบ R จาก A ลากคอร์ด $AD \parallel BC$ โยง BD, CD จะพิสูจน์ได้ว่า $AC = BD$ และ $\angle CBD = \angle ACB \therefore \angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = \angle ABC - \angle ACB = B - C, AB + BD = AB + AC = b+c$ จาก $\triangle ABD$ เราทราบ AD ($\therefore$ ทราบ R และ $\angle ABD = B - C$), $AB + BD = b+c$ และ $\angle ABD = B - C \therefore$ สามารถสร้าง $\triangle ABD$ ได้ตามวิธีสร้างจาก Ex II จากนั้นหาจุด C ได้โดยลากคอร์ด $BC \parallel AD$ โยง AC ก็จะได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ

Ex XIII จงสร้าง $\triangle$ กำหนด $R, a, b(b+c)$

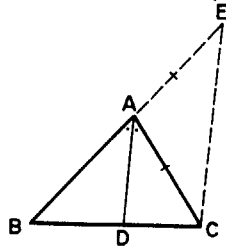


Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ วงกลม ABC สร้างได้เพราะทราบ R, BC ทราบทำให้ทราบ A ด้วย ต่อ BA ออกไปถึง D ให้ $AD = AC$ จะได้ $\angle BDC = \frac{1}{2}A \therefore$ Locus จุด D ได้ (Locus 7) จากจุด D ลาก DE สัมผัสวงกลมที่ E จาก ทบ. 58 $DE^2 = DA \cdot DB = DA(DA + AB) = b(b+c) \therefore DE^2$ ทราบทำให้ทราบ DE นั่นคือสามารถหา Locus ของจุดที่เส้นสัมผัสจากจุดนั้นมายังวงกลม ABC ยาว $= DE$ ได้ (Locus 2) Locus ทั้งสองตัดกันที่จุดไหน จุดนั้นคือจุด D ที่ต้องการ เพราะเป็นจุดที่สอดคล้องตามเงื่อนไขทั้งสอง (เงื่อนไขข้อแรก $\angle BDC = \frac{1}{2}A$ เงื่อนไขข้อที่สองคือเส้นสัมผัส $DE = \sqrt{b(b+c)}$) โยง BD ตัดเส้นรอบวงที่จุด A ลาก AC จะได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ

Ex XIV จงสร้าง $\triangle$ กำหนด R, A, $b^2 + c^2$

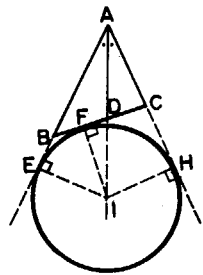
Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ วงกลม ABC สร้างได้เพราะทราบ R, A ทราบ ทำให้ทราบ BC และเราเลือกค่าแห่งของ BC ตรงไหนก็ได้ สมมติให้ $b^2 + c^2 = k$ $\therefore$ BC ตรง $\therefore$ หา Locus ของจุด A ที่ทำให้ $AB^2 + AC^2 = k$ ได้ (Locus 10) Locus ของจุด A ที่วงกลม ABC ที่จุดไหนจุดนั้นคือจุด A ที่ต้องการ

Ex XV จงสร้าง $\triangle$ กำหนด b, c, t_a



Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการมี AD แบ่งครึ่ง $\angle BAC$ ต่อ BA ออกไปถึงจุด E ให้ $AE = AC$ จะพิสูจน์ได้ว่า $AD \parallel CE$ $\therefore \frac{CE}{AD} = \frac{BE}{BA}$ หรือ $\frac{CE}{t_a} = \frac{b+c}{c}$ $\therefore$ สามารถหา CE ได้จากบทสร้างเรื่องการหาสัดส่วนที่สี่ จากนั้นก็สร้าง $\triangle ACE$ ได้ เพราะทราบ CE, $AE = AC = b$ เมื่อสร้าง $\triangle ACE$ ได้ก็หาจุด B ได้โดยต่อ EA ออกไปถึง B ให้ $AB = c$ โยง BC ก็จะได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ

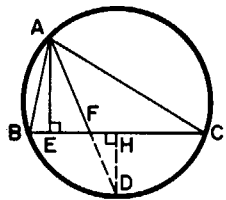
Ex XVI จงสร้าง $\triangle$ กำหนด 2S, A, t_a



Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ตามต้องการมี AD แบ่งครึ่ง A ถ้าให้ I เป็นจุด ศ.ก. วงกลมแนบนอก $\triangle ABC$ สัมผัส AB, BC, CA ที่จุด E, F, H ตามลำดับ เราทราบว่าจุด I ต้องอยู่บนเส้น AD ที่ต่อออกไป และทราบว่า $AE = AH$ แต่จาก $BE = BF$ และ $CH = CF$ ทำให้พิสูจน์ได้ว่า $AE + AH = a + b + c = 2S$ $\therefore AE = AH = S$ เราทราบจุด A นั่นคือหาจุด E, H บนแขนของ A ได้ ซึ่งจะนำไปสู่การหาจุด I ได้ จากนั้นก็สร้างวงกลม I รัศมี IE ได้ เราทราบว่า AI ย่อมแบ่งครึ่ง A $\therefore$ หาจุด D บน AI ได้เพราะทราบ t_a เส้นสัมผัส

DF ก็หาได้ต่อ DF ออกไปตัด AE, AH ที่ B, C ก็จะได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ

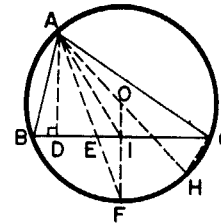
Ex XVII จงสร้าง $\triangle$ กำหนด A, a, $h_a : t_a$



Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการมี $AE = h_a$, $AF = t_a$ เราทราบ BC และ A $\therefore$ สร้างวงกลม ABC ได้ ต่อ AF พบเส้นรอบวงที่จุด D ย่อมได้จุด D เป็นจุดกึ่งกลางส่วนโค้งน้อย BC $\therefore$ จุด D หาได้, จาก D ถ้าลาก $DH \perp BC$ ที่ H ย่อมได้ H เป็นจุดกึ่งกลาง BC $\therefore$ จุด H หาได้เพราะทราบ BC จาก $\triangle DHF \sim \triangle AEF$ จะได้ $DF : DH = AF : AE = t_a : h_a$ เราทราบ DH และ $t_a : h_a$ $\therefore$ หา DF ได้จาก

บทสร้างเรื่องการหาสัดส่วนที่สี่ จากนั้นต่อ DF พบเส้นรอบวงที่จุด A ก็จะได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ

Ex XVIII จงสร้าง $\triangle$ กำหนด h_a , t_a หรือ t_a , B-C หรือ B-C, h_a



Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการมี $AD = h_a$, $AE = t_a$ ให้ O เป็นจุด ศ.ก. วงกลม ABC ต่อ AE, AO พบเส้นรอบวงที่จุด F, H ตามลำดับ จาก $\triangle ABD$, $\triangle AHC$ มี $\angle ABD = \angle AHC$, $\angle ADB = \angle ACH = 90^\circ$ $\therefore \angle BAD = \angle CAH = 90^\circ - B$, $\angle DAH = A - 2(90^\circ - B) = A + 2B - 180^\circ = (A + B + C) - 180^\circ - B - C = B - C$ และ เพราะ AE แบ่งครึ่ง A $\therefore$ AE แบ่งครึ่ง $\angle DAH$ ด้วย นั่นคือ $\angle DAE = \frac{1}{2}(B - C)$

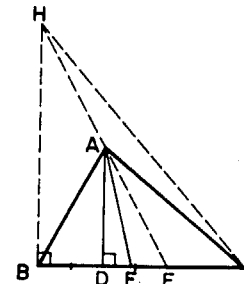
จาก $\triangle$ มุมฉาก ADE เราทราบว่า $AD = h_a$, $AE = t_a$, $\angle DAE = \frac{1}{2}(B - C)$ $\therefore$ ถ้าเราทราบเพียง 2 ใน 3 อย่าง (h_a , t_a , B-C) ก็สร้างได้สร้าง $\triangle ADE$ ได้ จากนั้นเลือกจุด F บน AE ที่ต่อออกไป ลาก FI ตั้งฉากกับส่วนของ DE ที่จุด I ลาก AO ทำ $\angle OAE = \angle EFI$ พบส่วนต่อของ FI ที่จุด O ใช้ O เป็นจุด ศ.ก. รัศมี OA หรือ OF เขียนวงกลม ต่อ DE ออกไปทั้งสองข้างพบเส้นรอบวงที่จุด B และ C ก็จะได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ สำหรับ $\triangle ABC$ นี้สามารถสร้างได้นับไม่ถ้วนรูป เพราะเราเลือกจุดใดบน AE ที่ต่อออกไปเป็นจุด F ก็ได้

Ex XIX จงสร้าง $\triangle$ กำหนด h_a , t_a , m_a

Ana จากรูปใน Ex XVIII เราได้ AD, AE, AI = h_a , t_a , m_a ตามลำดับ

$\therefore$ $\triangle$ มุมฉาก ADE และ ADI สามารถสร้างได้ จุด F เกิดจากเส้นตั้งฉาก DI ที่จุด I พบส่วนต่อของ AE $\therefore$ จุด F หาได้ จากนั้นก็ดำเนินการสร้างตาม Ex XVIII ก็จะได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ

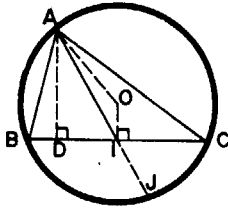
Ex XX จงสร้าง $\triangle$ กำหนด a, h_a , t_a



Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการมี $AD = h_a$, $AE = t_a$ ให้ F เป็นจุดบน BC ทำให้ $DF = DB$ ลาก $BH \perp BC$ พบส่วนต่อของ FA ที่จุด H โยง HC; $\triangle$ มุมฉาก BCH สามารถสร้างได้เพราะทราบ BC = a, $BH = 2AD = 2h_a$, $\angle FAC = \angle AFB - \angle ACB = \angle ABC - \angle ACB = B - C$ $\therefore \angle HAC = 180^\circ - (B - C)$ แต่จาก $\triangle ADE$ ซึ่งสามารถสร้างได้ ($\therefore$ ทราบ $AD = h_a$, $AE = t_a$) เราทราบว่า $\angle DAE = \frac{1}{2}(B - C)$ (จาก Ex XVIII) $\therefore (B - C)$ หาได้นั่นคือ $\angle HAC$ หาได้ด้วย $\therefore$ หา Locus ของจุด A ที่ทำ

ให้ $\angle HAC = 180^\circ - (B - C)$ ได้ (Locus 7) และเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ BH จะตัด Locus ที่จุด A ที่ต้องการ

Ex XXI จงสร้าง $\triangle$ กำหนด $a, m_a, B-C$

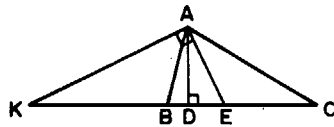


Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการมี $AI = m_a$ ให้ O เป็นจุด ค.ก. วงกลม ABC , $AD = h_a$ จาก Ex XVIII เราทราบว่า $\angle DAO = B-C$ แต่ $AD \parallel OI \therefore \angle AOI = 180^\circ - (B-C)$ และ $AI = m_a$ นั่นคือหา Locus ของจุด O ได้ (Locus 7) ต่อ AI พบเส้นรอบวงที่จุด J จาก ทบ. 57 $AI \cdot IJ = BI \cdot IC$ หรือ $m_a \cdot IJ = \frac{a^2}{4}$

$\therefore$ หา IJ ได้จากบทสร้างเรื่องการหาส่วนทวีที่สาม เมื่อได้ AJ แล้ว

เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AJ จะตัด Locus ของจุด O ที่ได้ที่จุด O ที่ต้องการ ใช้ O เป็นจุด ค.ก. รัศมี OA เขียนวงกลมตัดเส้นตั้งฉากกับ OI ที่จุด I ที่จุด B และ C ของ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ

Ex XXII จงสร้าง $\triangle$ กำหนด $t_a', B-C, b:c$ Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการมี $AK = t_a'$ ให้

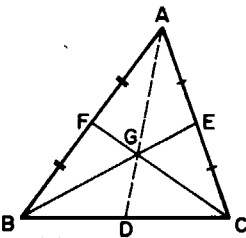


$AD = h_a$, $AE = t_a' \therefore \angle KAE = 90^\circ$, $\angle EKA = \angle DAE$ (ต่างบวกกับ $\angle AED$ แล้วได้ 90°) แต่จาก Ex XVIII เราได้ว่า $\angle DAE = \frac{1}{2}(B-C) \therefore \angle EKA = \frac{1}{2}(B-C)$ ด้วย นั่นคือ $\triangle$ มุมฉาก AEK สร้างได้

เพราะทราบ $AK = t_a'$, $\angle KAE = 90^\circ$, $\angle AKE = \frac{1}{2}(B-C)$ ต่อไปคือการหาจุด B และ C , สมมติ $b:c = p:q$ จาก ทบ. 61 $CE:EB = p:q$ และ $CK:KB = p:q \therefore (CE+EB):EB = (p+q):q \dots (1)$, $(CK-KB):KB = (p-q):q \dots (2)$, $CE:(CE+EB) = p:(p+q) \dots (3)$, $CK:(CK-KB) = p:(p-q) \dots (4)$ จาก $(1) \div (2)$ $KB:BE = (p+q):(p-q)$ จาก $(4) \div (3)$ $KC:CE = (p+q):(p-q)$ นั่นคือจุด B และ C แบ่ง KE อย่างภายในและภายนอกตามลำดับออกเป็นอัตราส่วน $(p+q):(p-q)$ เราทราบ p และ $q \therefore$ หาจุด B และ C ได้

จาก $\triangle$ มุมฉาก AEK จะเห็นว่าถ้าทราบข้อมูล $t_a', t_a', h_a, B-C$ เพียง 2 ใน 4 อย่างก็สามารถหาอีก 2 อย่างที่เหลือได้

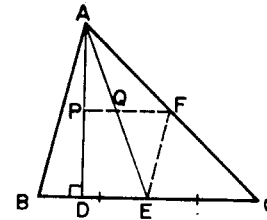
Ex XXIII จงสร้าง $\triangle$ กำหนด a, m_b, m_c, b^2-c^2



Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการมี $BE = m_b$, $CF = m_c$ ให้ $AD = m_a$, G เป็นจุด Centroid สมมติ $m_b:m_c = p:q$, $BG:CG = \frac{2}{3}BE:\frac{2}{3}CF = BE:CF = m_b:m_c = p:q$ และ BC ทราบ $\therefore$ Locus ของจุด G เป็นเส้นรอบวงของวงกลม Apollonius (Locus 11) Locus ของจุด A ที่ทำให้ b^2-c^2 มีค่าคงที่หาได้ (Locus 12) D เป็นจุดกึ่งกลาง $BC \therefore$ จุด D หาได้ ถ้าให้ G เป็นจุดใด ๆ บนเส้นรอบวงของวงกลม Apollonius ต่อ DG ที่

จุด A ให้ $AG = 2GD$ เราสามารถหา Locus ของจุด A ได้ (ใช้เรื่องสัดส่วนเข้าช่วยเช่นเดียวกับ Ex III และ Ex XI ในเรื่อง Loci) จะได้ Locus เป็นเส้นรอบวง Locus ของจุด A ทั้ง 2 กรณีจะตัดกันที่จุด A ของ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ

Ex XXIV จงสร้าง $\triangle$ กำหนด h_a, m_a, A



Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ มี $AD = h_a$, $AE = m_a \therefore \triangle$ มุมฉาก ADE สร้างได้ ถ้าให้ F เป็นจุดกึ่งกลาง AC จะได้ว่า $EF \parallel AB \therefore \angle AFE = 180^\circ - A$ แต่เราทราบ $A \therefore \angle AFE$ ทราบนั่นคือหา Locus จุด F ได้ (Locus 7) ให้ P, Q เป็นจุดกึ่งกลาง AD, AE ตามลำดับ เราทราบว่าถ้าต่อ PQ ออกไปจะต้องพบ AC ที่จุด F แต่ PQ ทราบ $\therefore$ หาจุด F ได้โดยต่อ PQ ออกไปพบ Locus ที่ได้ที่จุด F ต่อ AF, DE พบ

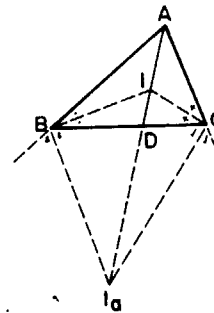
กันที่จุด C ลาก $AB \parallel EF$ พบ DE ที่จุด B ก็จะได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ

Ex XXV จงสร้าง $\triangle$ กำหนด h_a, h_b, h_c

Ana เราทราบว่า $ah_a = bh_b = ch_c = 2 \triangle$, หากเรารู้ค่า h_a, h_b จะได้ $a:h_b = b:h_a = c:m$, เมื่อ $m = h_a h_b : h_c \therefore$ หา m ได้จากบทสร้างเรื่องการหาส่วนทวีที่สาม $\triangle ABC$ ที่ต้องการจะคล้ายกับ $\triangle DEF$ ซึ่งมี $EF = h_b$, $FD = h_a$, $DE = m$ ให้ DK เป็นส่วนสูงของ $\triangle DEF$ ต่อ DK ถึงจุด L ให้ $DL = h_a$ เส้นที่ลากผ่านจุด L และขนานกับ EF จะพบ DE, DF ที่จุด B, C ของ $\triangle ABC$ ที่ต้องการโดยมีจุด A หนักกับจุด D ของ $\triangle DEF$

สำหรับการวิเคราะห์ที่มาและการพิสูจน์จะทิ้งไว้ให้ผู้เรียนคิดเอง

Ex XXVI จงสร้าง $\triangle$ กำหนด $a, t_a, b+c$



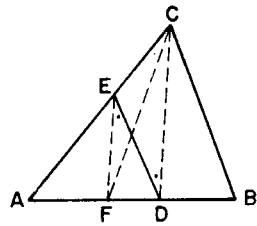
Ana สมมติได้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการมี $AD = t_a$ ให้ I เป็นจุด In-centre I_a เป็นจุด Ex-center ตรงข้าม A จาก ทบ. 61 $AI:ID = b:CD = c:BD = (b+c):(CD+BD) = (b+c):a$ แต่ $AI:ID = AI_a:DI_a$ นั่นคือ I และ I_a แบ่ง AD อย่างภายในและภายนอกออกเป็นอัตราส่วน $(b+c):a$ เราทราบ $AD, (b+c), a \therefore$ หาจุด I และ I_a ได้, วงกลม $BICI_a$ หาได้เพราะมี II_a เป็นเส้นผ่า ค.ก. จุด D ทราบ คอร์ด BC ทราบความยาว $= a \therefore$ งานสร้างต่อมาคือลากคอร์ดผ่านจุด D และให้ยาว $= a$ ซึ่งจะสร้างได้โดยใช้ Locus 8 และ Locus 9

EXERCISES

1. a, c, h_b
3. $a, m_a, b:c$
5. $a, t_a, b:c$
7. $b + c, a, B$
9. $b + c, B - C, h_c$
11. $b + c, a, h_b$
13. $b - c, a, C$
15. $b - c, A, B$
17. $b - c, B - C, h_b$
19. $h_c - h_b, B, C$
21. $h_c - h_b, b - c, B - C,$
23. $a:b:c, R$
25. $A, a:c, h_c$
27. $A, a:b, 2S$
29. $A, t_a, b:c$
31. $A, h_a, 2S$
33. $a, r, b + c$
35. $A, a - b, a - c$
37. $R, A, a - b$
39. R, m_b, C
41. $R, a, b + c$
43. $R, A, b:c$
45. $R, b - c, h_c - h_b$
47. $R, a, B - C$
49. $R, b - c, B - C$
51. $b, c, a:h_a$
53. $R, h_a, B - C$
2. a, h_a, m_a
4. $a, h_a, b:c$
6. $2S, h_a, B$
8. $b + c, A, B$
10. $b + c, h_c, B$
12. $b + c, B - C, a$
14. $b - c, h_b, C$
16. $b - c, B - C, a$
18. $b - c, h_b, A$
20. $h_c - h_b, b, c$
22. $h_c - h_b, b + c, A$
24. $B - C, a:(b + c), m_a + m_b$
26. $a:b, b:c, t_a + t_b - t_c$
28. $A, B, h_a - h_b$
30. $b^2:c^2, 2S, A = 90^\circ$
32. $A, r, 2S$
34. A, r, r_a
36. $A, a + b, a - c$
38. $R, A, 2S$
40. $R, b, B - C$
42. R, a, h_b
44. $R, b + c, h_b + h_c$
46. $R, A, h_b - h_c$
48. $R, b, a:h_a$
50. $a, A, b(b + c)$
52. A, h_a, t_a
54. R, h_a, t_a

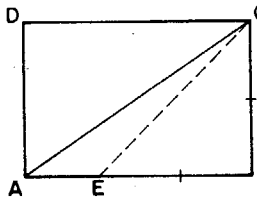
55. $R, t_a, B - C$
57. $h_a, t_a, b:c$
59. $h_a, B - C, b:c$
61. $h_a, t_a, b:c$
63. h_a, t_a, bc
65. m_b, m_c, h_a
67. m_b, m_c, h_b
69. b, c, m_b
71. $A, b + c, m_c$
73. $a:b, b:c, m_a + m_b + m_c$
75. $B, b + c, r$
77. h_a, m_a, h_b
79. $m_a, t_a, B - C$
56. $R, m_a, B - C$
58. $t_a, B - C, b:c$
60. $t_a, m_b, b:c$
62. A, a, bc
64. m_b, m_c, b
66. A, m_b, m_c
68. A, a, m_b
70. $a, h_a, m_b:m_c$
72. $a, m_a, b + c$
74. $a, t_a, b - c$
76. h_b, h_c, m_a
78. R, r, a

Ex I จงลากเส้นจากจุดที่กำหนดให้บนด้านของ $\triangle$ แบ่ง พ.ท. $\triangle$ ออกเป็นอัตราส่วน $m:n$



Ana สมมติ D เป็นจุดที่กำหนด DE เป็นเส้นที่ต้องการ ให้ F เป็นจุดที่แบ่ง AB ออกเป็นอัตราส่วน $m:n$ $\therefore \triangle ADE = \triangle AFC$ หัก $\triangle AEF$ ออกทั้งสองข้าง ย่อมได้ $\triangle EFD = \triangle EFC$ แต่ $\triangle$ ทั้งสองมีฐาน EF ร่วมกัน $\therefore EF \parallel CD$ เราหา CD และจุด F ได้ $\therefore$ จุด E หาได้

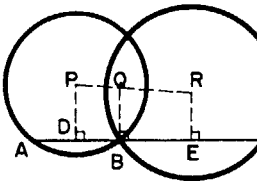
Ex II จงสร้าง $\square$ ผืนผ้า กำหนดเส้นทแยงมุม 1 เส้นและผลต่างของด้านประกอบมุมฉาก



Ana สมมติ ABCD เป็น $\square$ ผืนผ้าที่ต้องการ ให้ E เป็นจุดบน AB ทำให้ $BE = BC$ $\therefore AE =$ ผลต่างของด้านประกอบมุมฉาก $\angle BEC = 45^\circ$ $\therefore \angle AEC = 135^\circ$ จาก $\triangle AEC$ เราทราบ AC, AE และ $\angle AEC$ $\therefore$ สร้าง $\triangle AEC$ ได้ จากนั้นที่จุด C ทำ $\angle ECB = 45^\circ$ CB พย AE ที่ตัดกันที่จุด B เมื่อสร้าง $\triangle ABC$ ได้ก็สามารถสร้าง $\square$ ผืนผ้า ABCD ได้ตามต้องการ

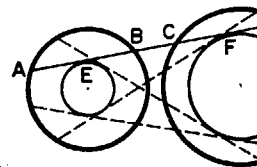
* ถ้ากำหนดผลบวกด้านประกอบมุมฉากให้ก็วิเคราะห์การสร้างได้ในทำนองเดียวกัน

Ex III จงลากเส้นตรงผ่านจุดตัดจุดหนึ่งทั้งวงกลม 2 วงตัดกัน เพื่อให้กอร์ดได้เป็นอัตราส่วน $m:n$



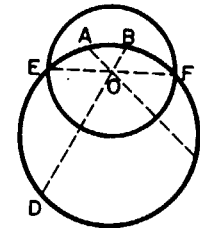
Ana สมมติ ABC เป็นเส้นตรงที่ต้องการ ให้ P, R เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม D, E เป็นจุดกึ่งกลาง AB, BC ตามลำดับ BQ $\perp AC$ พย PR ที่ Q, $\frac{AB}{BC} = \frac{2 \cdot DB}{2 \cdot BE} = \frac{m}{n}$, $\angle PDB = \angle REC = 90^\circ$ มุมฉาก $\therefore PD \parallel QB \parallel RE$ นั่นคือ $\frac{PQ}{QR} = \frac{DB}{BE} = \frac{m}{n}$ หรือ Q แบ่ง PR ออกเป็น $m:n$ PR ทราบ $\therefore$ จุด Q หาได้ จุด B ทราบ $\therefore$ หา AC ได้โดยลาก $AC \perp QB$ ที่ B จะได้ AC ตามต้องการ

Ex IV จงลากเส้นตรงทั้งวงกลม 2 วงที่กำหนดให้ ให้ได้คอร์ดของแต่ละวงยาวเท่ากันและยาวเท่าที่กำหนดให้ (m)



Ana สมมติ ABCD เป็นเส้นตรงที่ต้องการ $AB = CD = m$ ให้ E, F เป็นจุดกึ่งกลาง AB, CD ตามลำดับ Locus ของจุด E, F เป็นวงกลม (Locus 9) และสามารถหาได้ $\therefore$ ทราบ AB, CD ค่อยไปสร้างเส้นสัมผัสร่วมทางตรงหรือทางอ้อมก็จะได้เส้นตรงที่ต้องการ

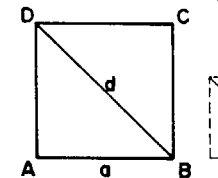
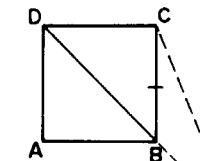
Ex V กำหนดจุด 2 จุดภายในวงกลม จงสร้างวงกลมให้ผ่านจุด 2 จุดนี้และแบ่งครึ่งเส้นรอบวงของวงกลมที่กำหนดด้วย



Ana ให้ A, B เป็นจุดที่กำหนดภายในวงกลมจุดศูนย์กลาง O มีรัศมี $= r$ สมมติสร้างวงกลมที่ต้องการได้และตัดวงกลมที่กำหนดที่ E, F $\therefore EF$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง คือ AO, BO พยเส้นรอบวงของวงกลมที่ต้องการที่ C, D จาก ทบ. 57 จะได้ $AO \cdot OC = EO \cdot OF = r^2$ เราทราบ AO และ r $\therefore$ สามารถหา OC ได้ตามบทสร้างเรื่องการหาสัดส่วนตัวที่สาม เมื่อทราบ OC ก็หาตำแหน่งของจุด C ได้ และหาตำแหน่งของ D ในทำนองเดียวกัน, $AO \cdot OC = BO \cdot OD = r^2$ $\therefore$ จุด A, B, C, D concyclic สามารถสร้างวงกลมผ่านได้ และวง

กลมวงนี้คือวงกลมที่ต้องการนั่นเอง

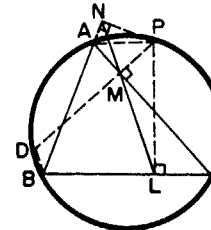
Ex VI จงสร้าง $\square$ จักรัศ กำหนดผลบวกของด้าน 1 ด้านกับเส้นทแยงมุม 1 เส้น



Ana (i) สมมติได้ ABCD เป็น $\square$ จักรัศที่ต้องการ คือ DB ถึงจุด E ให้ $BE = BC$ $\therefore DE$ ทราบเพราะโจทย์กำหนดให้ $\angle E = 22\frac{1}{2}^\circ$, $\angle CDE = 45^\circ$ $\therefore$ สามารถสร้าง $\triangle CDE$ ได้ ซึ่งจะนำไปสู่การสร้าง $\square$ ABCD ที่ต้องการ

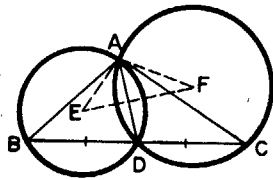
Ana (ii) สมมติได้ ABCD เป็น $\square$ จักรัศที่ต้องการ มีด้านยาว a เส้นทแยงมุมยาว d $\therefore$ โจทย์กำหนด $a + d$ ให้ สร้าง $\square$ จักรัศอีกรูปหนึ่งขนาดเท่าใดก็ได้ให้มีด้านยาว a' เส้นทแยงมุมยาว d' จาก ทบ. เรื่องสามเหลี่ยมคล้ายจะได้ว่า $\frac{a}{a'} = \frac{d}{d'}$ จาก $\frac{a}{a'} = \frac{a+d}{a'+d'}$ เราทราบ $a', a+d, a'+d'$ $\therefore$ หา a ได้ตามบทสร้างเรื่องการหาสัดส่วนตัวที่สาม

Ex VII จงหาจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle$ ที่กำหนด ซึ่ง Simson's line ที่เกิดจากจุดนี้ มีทิศทางตามที่กำหนดให้



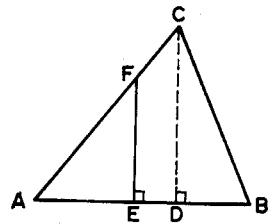
Ana สมมติได้ P เป็นจุดที่ต้องการ NML เป็น Simson's line ซึ่งทราบทิศทาง คือ PM พยเส้นรอบวงที่ D ของ BD และ AP จาก $\square$ AMPN concyclic เราได้ $\angle ANM = \angle APM$ แต่ $\angle APM = \angle ABD$ $\therefore \angle ANM = \angle ABD$ นั่นคือ $BD \parallel NL$ หรือ BD มีทิศทางตามที่กำหนดนั่นเอง $\therefore$ หาจุด D ได้ จาก D ลาก $DM \perp AC$ และต่อ DM พยเส้นรอบวงที่ P ก็จะได้อีกที่ต้องการ

Ex VIII จงสร้าง $\triangle ABC$ กำหนดเส้นมัธยฐาน AD, รัศมีวงกลม ABD และ ADC



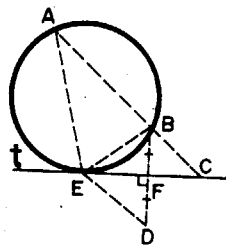
Ana สมมติให้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ ให้ E, F เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม ABD และ ADC ตามลำดับ เราทราบว่าจุด E, F จะต้องอยู่บนเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AD ซึ่งสามารถหาเส้นนี้ได้ (Locus 4) AE, AF ทราบ $\therefore$ หาจุด E, F ได้ นั่นคือสร้างวงกลมได้ ขั้นตอนก็คือลากเส้นผ่านจุด D พบเส้นรอบวงที่ B, C ทำให้ $BD = DC$ ด้วย ซึ่งเราสามารถสร้างเส้น BC ได้โดยวิธีสร้างตาม Ex III (โดยให้ $m:n = 1:1$)

Ex IX จงลากเส้นตั้งฉากกับด้านของ $\triangle$ แบ่ง พ.ท. $\triangle$ ออกเป็นอัตราส่วน $m:n$



Ana สมมติ EF เป็นเส้นที่ต้องการ ลาก $CD \perp AB$ ที่ D เราได้ว่า $\frac{BCFE}{\triangle AEF} = \frac{m}{n} \therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle AEF} = \frac{m+n}{n}$ แต่จาก ทบ. 71 จะได้ $\frac{\triangle ABC}{\triangle AEF} = \frac{AB \cdot AC}{AE \cdot AF} \therefore \frac{AB \cdot AC}{AE \cdot AF} = \frac{m+n}{n}$ จาก $\triangle ACD \sim \triangle AEF$ จะได้ $\frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AE} \therefore \frac{AB \cdot AD}{AE \cdot AE} = \frac{m+n}{n}$
 $\therefore AE = \sqrt{\frac{n}{m+n}} AB \cdot AD$ ทุกเทอมทางขวาทราบค่าหมด $\therefore AE$ หาได้

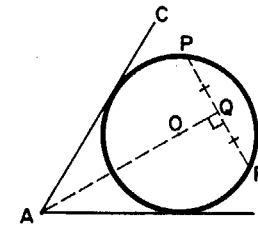
Ex X จงสร้างวงกลมผ่านจุด 2 จุดที่กำหนดให้ และสัมผัสเส้นตรงที่กำหนดให้ด้วย



Ana สมมติสร้างวงกลมผ่านจุด A, B ที่กำหนดให้ และสัมผัสเส้นตรง t ที่กำหนดให้ได้ ให้วงกลมสัมผัสเส้นตรงที่จุด E ต่อ AB พบเส้น t ที่จุด C $\therefore$ จุด C หาได้นั่นคือ $\angle ACE$ ทราบ ลาก $BF \perp$ เส้นตรง t ที่ F ต่อ BF ถึงจุด D ให้ $FD = BF$ $\therefore$ จุด D หาได้โดย AE, EB, $ED \angle AED = \angle AEB + \angle BEF + \angle FED = \angle AEB + \angle BEF + \angle BEF = \angle AEB + \angle EAB + \angle BEF = \angle EBC + \angle BEF = 180^\circ - \angle ACE \therefore \angle AED$ ทราบ $\therefore$ หาจุด E ได้ (Locus 7)

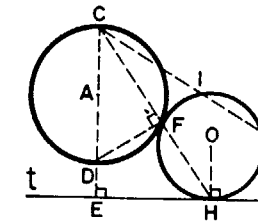
หรือจะหา CE ได้โดยหาสัดส่วนที่สามระหว่าง CB และ CA $\therefore$ จาก ทบ. 59 จะได้ $CE^2 = CB \cdot CA$

Ex XI จงสร้างวงกลมสัมผัสเส้นตรง 2 เส้นที่กำหนดให้และผ่านจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้



Ana ให้ AB, AC เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้ P เป็นจุดที่กำหนดให้ สมมติได้ O เป็นจุด ศ.ก. วงกลมที่ต้องการ โยง AO จะได้ AO แบ่งครึ่ง $\angle A$ $\therefore$ หาแนวทางของ AO ได้เพราะทราบ $\angle A$ จาก P ลาก $PQ \perp AO$ ที่ตัดออกไปที่จุด Q $\therefore$ จุด Q หาได้ ต่อ PQ พบเส้นรอบวงที่จุด R จะได้ว่า $QR = PQ$ $\therefore$ จุด R หาได้ ขณะนี้เราทราบจุด P, R งานสร้างต่อไปคือสร้างวงกลมให้ผ่านจุด P, R และสัมผัส AB ซึ่งสร้างได้โดยวิธีสร้างตาม Ex X จากนั้นก็พิสูจน์ได้ว่าวงกลมวงนี้สัมผัส AC ด้วยก็จะได้ว่าวงกลมที่ต้องการ

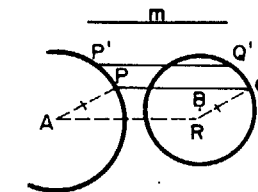
Ex XII จงสร้างวงกลมสัมผัสเส้นตรงและวงกลมที่กำหนดให้ และผ่านจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้ด้วย



Ana สมมติได้วงกลมที่ต้องการมีจุด ศ.ก. O สัมผัสวงกลม A และเส้นตรง t ที่กำหนดให้ที่จุด E, H ตามลำดับและผ่านจุด B ที่กำหนดให้ลากเส้นผ่าน ศ.ก. CD และให้ตัดออกไป $\perp$ เส้นตรง t ได้ด้วยสมมติให้ตั้งฉากที่จุด E $\therefore$ จุด E หาได้ เราทราบว่า CF และ FH ต่อเป็นเส้นตรงเดียวกัน (พิสูจน์ได้) และ $\angle DEH = \angle DFH = 90^\circ \therefore D, E, H, F$ concyclic จาก ทบ. 75 จะได้ $DC \cdot CE = CF \cdot CH$ โยง CB ตัดเส้นรอบวงกลม O ที่จุด I จะได้ $CF \cdot CH = CI \cdot CB \therefore CD \cdot CE = CI \cdot CB$ เราทราบ CD, CE, CB $\therefore$ หา CI ทำให้หาจุด I บน BC ได้ ขณะนี้เราทราบจุด B, I งานสร้างต่อไปคือสร้างวงกลมผ่านจุด B, I และสัมผัสเส้นตรง t ด้วยโดยใช้วิธีสร้างตาม Ex X จากนั้นก็พิสูจน์ได้ว่าวงกลม O สัมผัสวงกลม A ด้วย

N.B. วงกลม O สามารถสร้างได้ถึง 4 วง จงพิจารณาหาอีก 3 วงที่เหลือ

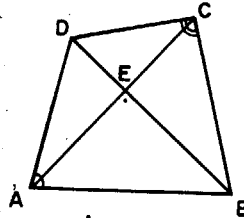
Ex XIII จงหาจุด P, Q บนเส้นรอบวงของวงกลม A, B ตามลำดับทำให้ $PQ = m$ และขนานกับเส้นตรง m ที่กำหนดให้



Ana สมมติได้จุด P, Q ที่ต้องการ ลาก AR $\perp PQ$ และ $\parallel PQ$ $\therefore$ หา AR ได้เพราะทราบทิศทาง ($\parallel$ เส้นตรง m) และขนาด (ยาว = เส้นตรง m) โยง AP, RQ เรื่อยมทราบค่า AP = RQ และขนานกัน แต่ทิศทางของ RQ ไม่ทราบ ทราบเพียงขนาดว่า ยาว = AP = รัศมีวงกลม A $\therefore$ หาจุด Q ได้โดยใช้ R เป็นจุด ศ.ก. รัศมี = รัศมีวงกลม A ตัดเส้นรอบวง วงกลม B ที่จุด Q จากนั้นก็ลากรัศมี AP $\parallel$ RQ ก็จะได้จุด P และ Q ที่ต้องการ

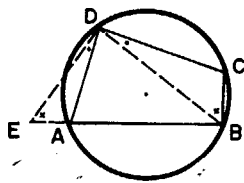
ถ้าวงกลม B อยู่ภายในวงกลม A จะได้เห็น PQ 4 เส้น แต่จากรูปในตัวอย่างจะได้ PQ เพียง

Ex XIV จงสร้าง $\square ABCD$ กำหนด AC, BD และ $\angle A, \angle C, \angle AEB$ เมื่อ E เป็นจุดตัดของ AC และ BD



Ana สมมติได้ $\square ABCD$ ที่ต้องการ เราทราบ $BD, \angle A, \angle C$
 $\therefore$ หา Locus ของจุด A และ C ได้ (Locus 7) คือไปคือการหาจุด A, C บนเส้นรอบวงทั้งสองเส้นจุด โดยเราทราบทั้งขนาดและทิศทางของ AC ซึ่งจะเห็นว่าเข้าเงื่อนไขตาม Ex XIII พอดี $\therefore$ หาจุด A, C ได้โดยวิธีสร้างจาก Ex XIII ก็จะได้ $\square ABCD$ ที่ต้องการ

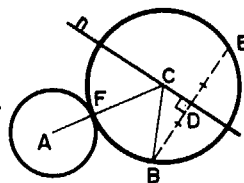
Ex XV กำหนด AB, BC, CD, DA จงสร้าง $\square ABCD$ และให้ $\square ABCD$ concyclic ด้วย



Ana สมมติได้ $\square ABCD$ ที่ต้องการ ให้ $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ โยง BD ที่จุด D ทำ $\angle ADE = \angle BDC$ DE พบ BA ที่ตัดออกไปที่จุด E จาก $\triangle ADE \sim \triangle BDC$ ($\angle ADE = \angle BDC$ $\angle DAE = \angle C$) $AE:BC = DA:CD$ หรือ $AE:b = d:c$
 $\therefore$ หา AE ได้จากบทสร้างเรื่องการหาสัดส่วนที่สี่ ขณนั้นเราทราบจุด E, A และ B จาก $\triangle ADE \sim \triangle BDC$ $ED:DB =$

$DA:CD = d:c$ $\therefore$ หา Locus ของจุด D ได้ (Locus 11) แต่เราทราบว่า $DA = d$ และจุด A ทราบ $\therefore$ หาจุด D ได้โดยใช้ A เป็นจุด ศ.ก. รัศมี $= d$ ตัด Locus ของจุด D ที่ทำให้ที่จุด D ที่ต้องการ เมื่อได้ $\triangle ADE$ ก็จะได้ $\angle E$ จากนั้นหา BC ได้ เพราะทราบว่า $\angle DBC = \angle E$ และ $BC = b$ โยง CD ก็จะได้ $\square ABCD$ ที่ต้องการ

Ex XVI จงหาจุด C บนเส้นตรง n ทำให้ $AC - CB = k$ เมื่อกำหนดเส้นตรง n , จุด A และ B ให้

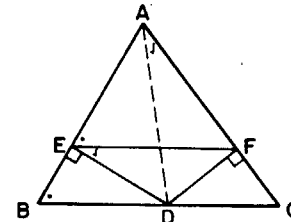


Ana สมมติได้จุด C ที่ต้องการ ถ้าให้ C เป็นจุด ศ.ก. รัศมี $= CB$ เขียนวงกลมตัด CA ที่ F จะได้ $AF = k$ และวงกลม A รัศมี $= k$ นี้เราสร้างได้เพราะทราบ k และจุด A จะเห็นว่าวงกลมทั้งสองสัมผัสกันภายนอกที่จุด F แต่ขณะนั้นเราทราบเพียงวงกลม A วงกลม C ยังไม่ทราบ ลากจอร์ต $BE \perp$ เส้นตรง n ที่จุด D จะได้ว่า

$DE = BD$ แต่เราหา BD ได้ $\therefore$ หาจุด E ได้ขณะนั้นเราทราบจุด B, E และวงกลม A จุด C ที่เราต้องการจะต้องเป็นจุด ศ.ก. ของวงกลมที่ผ่านจุด B, E และสัมผัสภายนอกกับวงกลม A $\therefore$ งานสร้างต่อไปคือการสร้างวงกลมให้ผ่านจุด B, E และสัมผัสภายนอกกับวงกลม A ซึ่งวิธีสร้างนี้จะทำได้จากตัวอย่างที่ 3 เรื่องการสร้างในหนังสือแบบเรียนเรขาคณิตชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายของกระทรวงศึกษาธิการ

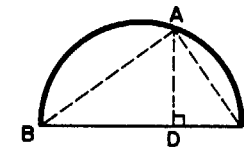
ถ้ากำหนด $AC + CB = k$ ก็สามารถหาจุด C ได้ แต่วิธีสร้างจะทิ้งไว้ให้ผู้่านวิเคราะห์หาเอง

Ex XVII จงหาจุด D บนฐาน BC ของ $\triangle ABC$ ซึ่งเมื่อลาก $DE, DF \perp AB, AC$ ที่ E, F ตามลำดับแล้ว ทำให้ $EF \parallel BC$



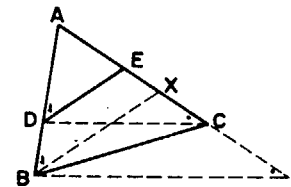
Ana สมมติได้จุด D ที่ต้องการ $EF \parallel BC \therefore \angle AEF = \angle B$ $\angle DEF = 90^\circ - \angle AEF = 90^\circ - \angle B$ $\square AEDF$ concyclic $\therefore \angle CAD = \angle DEF = 90^\circ - \angle B$ แต่เราทราบ $\angle B \therefore \angle CAD$ ทราบ

Ex XVIII จงแบ่งเส้นตรง BC อย่างภายในและภายนอกออกเป็นอัตราส่วน $p^2:q^2$



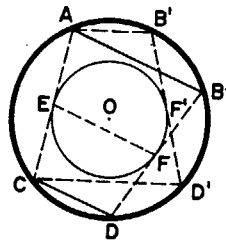
Ana สมมติ D เป็นจุดที่ต้องการ ลาก $DA \perp BC$ พบเส้นรอบวงของวงกลมที่มี BC เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ที่ A จะได้ $AB^2 = BD \cdot BC$ และ $AC^2 = DC \cdot BC \therefore AB^2:AC^2 = BD:DC$ นั่นคือ $AB^2:AC^2 = p^2:q^2$, $AB:AC = p:q$ ฉะนั้นจุด A เป็นจุดบนเส้นรอบวง และทำให้ $AB:AC = p:q$ $\therefore$ หาจุด A ได้โดยหา Locus ของจุด A ที่ทำให้ $\angle BAC = 90^\circ$ (เป็นเส้นรอบวงของวงกลมมี BC เป็นเส้นผ่า ศ.ก.) ตัดกับ Locus ของจุด A ที่ทำให้ $AB:AC = p:q$ (Locus 11) ที่จุด A ลาก $AD \perp BC$ ที่ D จะได้จุด D ตามต้องการ (เมื่อแบ่งแบบภายในได้ก็แบ่งแบบภายนอกได้ตามบทสร้าง)

Ex XIX จงหาจุด D, E บน AB, AC ของ $\triangle ABC$ ที่ทำให้ $AD = DE = EC$



Ana สมมติได้จุด D, E ตามต้องการ จะได้ $\triangle DAE, \triangle ECD$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว ลาก $BX \parallel DE$ พบ AC ที่ X และลาก $BY \parallel DC$ พบ AC ที่ตัดออกไปที่ Y จาก $\triangle ABX \sim \triangle ADE \therefore AB = BX$ จาก $\triangle BXY \sim \triangle DEC \therefore BX = XY$ จาก $AB = BX = XY$ นั่นคือ $\triangle ABY$ สามารถสร้างได้ (ใช้ B เป็นจุด ศ.ก. รัศมี BA ตัด AC ที่ X ต่อ XC ถึง Y ให้ $XY = BX$) จาก C ลาก $CD \parallel BY$ พบ AB ที่ D จาก D ลาก $DE \parallel BX$ พบ AC ที่ E ก็จะได้จุด D, E ที่ต้องการ

Ex XX จากจุด A,C บนเส้นรอบวงของวงกลม จงลากคอร์ด AB// คอร์ด CD และให้ $AB+CD=m$

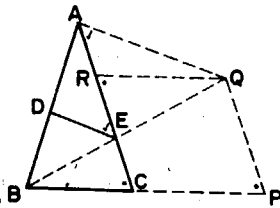


Ana สมมติได้คอร์ด AB, CD ตามต้องการ ให้ E, F เป็นจุดกึ่งกลาง AC, BD เราสามารถพิสูจน์ว่า $AC = BD$ นั่นคือให้ว่า $OE = OF$ และ $\angle OEC = \angle OFD = 90^\circ$ มุมฉาก $\therefore$ วงกลมที่มี O เป็นจุดศก. รัศมี OE สัมผัส AC, BD ที่ E, F ตามลำดับ $EF = \frac{1}{2}(AB+CD) = \frac{1}{2}m$ ($\therefore$ เป็นเส้นต่อจุดกึ่งกลางค่านที่ไม่ขนานกันของ $\square$ คางหมู) $\therefore$ EF ทราบจุด E หาได้ ($\therefore$ เป็นจุดกึ่งกลาง AC ซึ่งจุด A, C ทราบ) วงกลมวงไหนหาได้ ($\therefore$ มี O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี = OE) $\therefore$ สามารถหา

จุด F ได้ คอร์ด BD สัมผัสวงกลมวงไหนที่ F $\therefore$ BD สร้างได้ ก็จะได้ AB, CD ตามต้องการ ลำดับการสร้างที่ถูกต้องมีดังต่อไปนี้

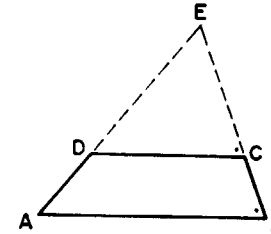
1. โยง AC แบ่งครึ่ง AC ที่ E
2. ให้ O เป็นจุด ศก. รัศมี OE เขียนวงกลม
3. ให้ E เป็นจุด ศก. รัศมี $\frac{1}{2}m$ เขียนส่วนโค้งกึ่งวงกลมในข้อ 2 ที่ F (หรือ F')
4. ลากคอร์ด BD สัมผัสวงกลมที่ F (หรือ คอร์ด B'D' สัมผัสวงกลมที่ F')
5. โยง AB และ CD (หรือ AB' และ CD')

Ex XXI จงหาจุด D,E บนด้าน AB, AC ของ $\triangle ABC$ ทำให้ $BD:DE:EC = m:n:k$



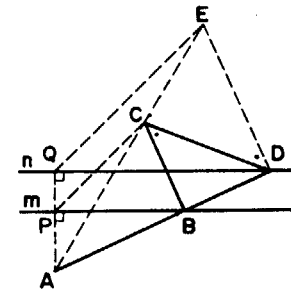
Ana สมมติได้ DE ตามต้องการ จาก A ลาก AQ//DE พบ ส่วนต่อของ BE ที่ Q จาก Q ลาก QP//AC พบส่วนต่อของ BC ที่ P จะเห็นว่า $\square ABPQ \sim \square DBCE \therefore BA:AQ:QP = BD:DE:EC = m:n:k$ แต่เราทราบ BA $\therefore$ หา AQ, QP ได้จากบทสร้างเรื่องการหาส่วนตรีโกณ (เวลาหาถึงสัดส่วนมาที่ละคู่โดยมี BA ร่วม อยู่เสมอ $\therefore$ เราทราบ BA) ต่อมาคือการหาจุด Q โดยให้ C เป็นจุด ศก. รัศมี = QP ตัก AC ที่ R จาก R ลากเส้น // BC ให้ A เป็นจุด ศก. รัศมี = AQ ตักเส้น ศก. ที่ลากจาก R และ // BC ที่ Q จาก Q ลากเส้น // AC พบส่วนต่อของ BC ที่ P แล้วใช้เรื่องจุดศูนย์กลางหา $\square DBCE$ ที่ต้องการ

Ex XXII จงสร้าง $\square$ คางหมู กำหนดค่านที่ไม่ขนานกัน มุมระหว่าง 2 ด้านนี้ และอัตราส่วนด้านที่ขนานกัน $= m:n$



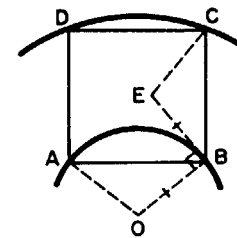
Ana สมมติได้ $\square ABCD$ ที่ต้องการ คือ AD, BC พบกันที่ E $\therefore \angle E$ ทราบ $\frac{EC}{EB} = \frac{ED}{EA} = \frac{DC}{AB} = \frac{m}{n} \therefore \frac{EC}{EB-EC} = \frac{ED}{EA-ED} = \frac{m}{n-m}$ หรือ $\frac{EC}{CB} = \frac{ED}{DA} = \frac{m}{n-m} \therefore$ หา EC และ ED ได้เพราะทราบ CB และ DA นั่นคือ $\triangle EDC$ สามารถสร้างได้ จากนั้นก็สร้าง $\square ABCD$ ได้ตามต้องการ

Ex XXIII กำหนดให้เส้นตรง m, n ขนานกัน จุด A และ C จงลากเส้นจากจุด A ตักเส้น m, n ที่ B, D ทำให้ $\angle BCD = \angle K$ ที่กำหนดให้



Ana สมมติได้เส้น ABD ที่ต้องการ จาก D ลาก DE//BC พบ ส่วนต่อของ AC ที่ E จาก A ลากเส้น $\perp$ m, n ที่ P, Q $\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BD} = \frac{AP}{PQ}$ เราทราบ AC, AP และ PQ $\therefore$ สามารถหา CE ได้ต่อมาก็หาจุด D บนเส้น n ที่ทำให้ $\angle CDE = \angle K$ ซึ่งหาได้โดยสร้าง Segment บน CE ให้มีมุมใน Segment $= \angle K$ (Locus 7) เส้นรอบวงตัดเส้น n ที่ไหนจุดนั้นคือจุด D ที่ต้องการ N.B. ถ้าลาก PC, QE จะได้ $PC//QE \therefore$ จะหาจุด E โดยวิธีนี้ก็ได้

Ex XXIV จงสร้าง $\square$ จักรัศ

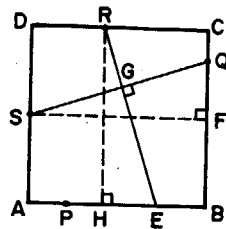


วงที่จุด A, D ตามลำดับก็จะได้ $\square$ จักรัศ ABCD ที่ต้องการ

ให้มีจุดศูนย์กลางตั้งอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม 2 วงที่ร่วมจุด ศก. กัน วงละ 2 จุด

Ana สมมติ ABCD เป็น $\square$ จักรัศที่ต้องการ O เป็นจุด ศก. วงกลมทั้งสอง โยง OB ลาก BE $\perp$ OB ให้ BE = OB โยง AO, CE เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\triangle BCE \cong \triangle ABO$ (ค.ม.ค.) $\therefore CE = AO$ OB หาได้ (เลือกตำแหน่งไหนก็ได้) BE หาได้เพราะทราบทั้งขนาดและทิศทาง ($\perp$ OB) จุด C หาได้เพราะทราบ $EC = OB$ เมื่อได้จุด B และ C ก็หาจุด A, D ได้โดยลากเส้น $\perp$ BC ที่จุด B, C พบเส้นรอบวงที่จุด A, D ตามลำดับก็จะได้ $\square$ จักรัศ ABCD ที่ต้องการ

Ex XXV กำหนดจุด 4 จุด ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน จงสร้าง ☐ จักรวาล ให้มีด้านทั้งสี่ผ่านจุด



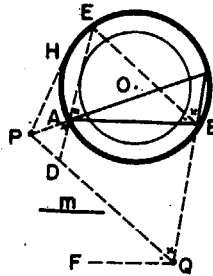
4 จุดนี้ กันละจุด

Ans สมมติให้ ABCD เป็น □ จัตุรัสที่ต้องการ จุด P, Q, R, S เป็นจุดที่กำหนดให้ จาก R ลากเส้น $\perp$ SQ ที่ G และต่อเลยไปพบ AB ที่ E เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $RE = SQ$ โดยลาก $RH, SF \perp AB, BC$ ที่ H, F ตามลำดับ

$\angle AER = \angle BQS$ (E, B, Q, G concyclic) $\therefore \triangle EHR \cong \triangle FQS$ (ม.ก.ม.) นั่นคือ $RE = SQ$ เมื่อลากจุด E ได้แล้วโยง PE

จาก Q, S ลากเส้น $\perp$ PE ที่ B, A ตามลำดับ ต่อ BQ, AS พบเส้นที่ลากผ่าน R และขนานกับ AB ที่ C, D ตามลำดับ ก็จะได้ $\square ABCD$ ที่ต้องการ

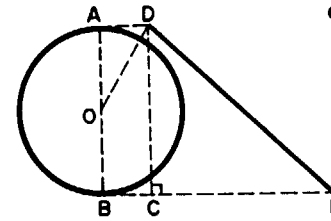
Ex XXVI จงสร้างสามเหลี่ยมแนบในวงกลมที่กำหนดให้ ให้ด้าน 2 ด้านผ่านจุด 2 จุดที่กำหนดให้
ด้านละจุดและด้านที่สามขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้ด้วย



Ans สมมติให้ $\triangle ABC$ ที่ต้องการ P และ Q เป็นจุดที่กาหนดให้ CA , CB ผ่านจุด P, Q ตามลำดับ และ m เป็นเส้นตรงที่กาหนดให้ ลาก $QF \parallel$ เส้นตรง m ไข่ง $PQ \therefore \angle PQF$ ทราบ ให้ D เป็นจุดบน PQ ที่กาให้ A, D, Q, C concyclic จาก ทบ. 58 $PD \cdot PQ = PA \cdot PC$ ถ้าให้ PH เป็นเส้นสัมผัส จาก ทบ. 58 $PH^2 = PA \cdot PC \therefore PD \cdot PQ = PH^2$ เราทราบ $PQ, PH \therefore$ หา PD ได้ นั่นคือหาจุด D บน PQ ได้ ต่อ DA พบเส้นรอบวงที่ E ไข่ง BE จาก A, D, Q, C concyclic จะได้ $\angle CQP$

$\angle PAD$ แต่ $\angle PAD = \angle CAE = \angle CBE \therefore \angle CQP = \angle CBE$ และ $\angle CBA = \angle CQF$ (QF//
 เส้นตรง m // AB) นั่นคือ $\angle EBA = \angle PQF$ แต่ $\angle PQF$ ทราบ $\therefore$ งานสร้างก็คล้ายเส้นทาบจาก DAE
 แล้วทำให้คือรัศมี AE ของรับบนเส้นรอบวง $= \angle PQF$ ซึ่งเราสามารถหาเส้น DAE ได้ (โดยลากจากรัศมี
 XY, XZ โดยไม่ต้องคำนึงถึงเรื่องขนาด แต่ให้ $\angle ZXY = \angle PQF$ แบ่งครึ่ง YZ ที่ R ใช้ O เป็นจุด
 ต.ก. รัศมี OR เขียนวงกลมจากนั้นลากเส้นจากจุด D สัมผัสวงกลมที่สร้างใหม่ขึ้นที่จุดวงกลมเดิมที่ A, E ก็
 จะได้เส้น DAE ที่ต้องการ) ต่อ PA พบเส้นรอบวงที่ C ลาก CQ ตัดเส้นรอบวงที่ B ก็จะได้ $\triangle ABC$ ที่
 ต้องการ

Ex XXVII จงสร้าง ☐ จัตุรัสใหม่พื้นที่เท่ากับพื้นที่วงกลมที่กำหนดให้



Const 1. ลากเส้นผ่า ศ.ก. AB

2. ลาก AD ตัดวงกลมและทำให้ $\angle DOA = 30^\circ$ (O เป็นจุด ศ.ก. ของวงกลม)
3. ลาก BE ตัดวงกลมให้ $BE = 3r$
4. ลาก $DC \perp BE$ ที่ C
5. โยง DE

Proof $AD = \frac{AO \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{r \cdot \sqrt{3}}{3}$, $CD = 2r$

$$CE = BE - BC = BE - AD = 3r - \frac{r\sqrt{3}}{3} = r \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

จาก $\triangle$ มุมฉาก CDE; $DE^2 = CD^2 + CE^2$ (ทบ. 29)

$$= 4r^2 + r^2 \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}\right)r^2$$

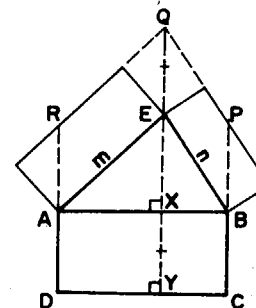
$$DE = \left(\sqrt{\frac{40}{3}} - 2\sqrt{3} \right) r$$

จากการคำนวณค่าของ $\sqrt{\frac{40}{3}} 2\sqrt{3} = 3.14153$ ค่า $\pi = 3.14159$ ค่าที่ได้ต่างกันน้อยมาก

จนถึงว่าเท่ากันได้ $\therefore DE = \pi r$ จากนั้นก็สร้าง $\square$ จักรวัดให้มี พ.ท. = $\square$ ผืนผ้า ที่ประกอบด้วย DE (πr) และ $AO(r)$ ก็จะได้ $\square$ จักรวัดมี พ.ท. = $DE \cdot AO = \pi r \cdot r = \pi r^2 =$ พ.ท. วงกลมที่กำหนดถาม
 ต้องการ Q.E.D.

Q.E.D.

Ex XXVIII กำหนด $\square$ ผืนน้ำ ABCD เส้นตรง m และ n จงสร้าง $\square$ ผืนน้ำอีก 2 รูปให้ พ.ท. รวมกัน
= พ.ท. $\square$ ABCD โดยมี m และ n เป็นด้านหนึ่งของแต่ละรูป



Const 1. ๒๓ AB ตัด $\triangle ABE$ ให้ $AE = m$, $BE = n$

- จาก E ลากเส้น $\perp$ AB, CD ที่ X, Y ตามลำดับ
- ท่อ YE ออกไปถึง Q ให้ $EQ = XY$
- ลาก $QP \parallel EB$ พบ CB ที่ต่อออกไปที่ P
- ลาก $QR \parallel EA$ พบ DA ที่ต่อออกไปที่ R

Proof พ.ท. $\square$ QEBP = พ.ท. $\square$ XYCB (ฐานและคู่ // ร่วมกัน)

W.N. □ QEAR = W.N. □ XYDA („ „ „)

$$\begin{aligned} \text{w.}\eta. \square \text{ QEBP} + \text{w.}\eta. \square \text{ QEAR} &= \text{w.}\eta. \square \text{ XYCB} + \text{w.}\eta. \square \text{ XYDA} \\ &= \text{w.}\eta. \square \text{ ABCD} \end{aligned}$$

จากนักเปลี่ยน ☐ QEBP และ ☐ QEAR เป็น ☐ ผืนผ้าที่ถ่วงการ

OLD

EXERCISES

1. จงแบ่งเส้นตรงที่กำหนดให้ออกเป็นอัตราส่วน $p^2:q^2$
2. กำหนดเส้นตรง a, p, q จงหาเส้นตรง x ที่ทำให้ $x^2:a^2 = p:q$
3. จงหาจุด X บนเส้นตรง AB ที่ตัดออกไปทำให้ $AB^2 = AX \cdot BX$
4. จงหาจุด X บนเส้นตรง AB ที่ทำให้ $2AX \cdot AB = XB^2$
5. จงแบ่งเส้นตรง m ออกเป็น 3 ส่วนคือ a, b และ c ทำให้ $a:b = p:q$ และ $b:c = r:s$ เมื่อกำหนด p, q, r, s ให้
6. จงหาจุด X บน AB ทำให้ $AB^2:AX^2 = m:n$
7. จุด A, B, C, D อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน จงหาจุด X บน AD ทำให้ $\frac{AX}{DX} = \frac{BX}{CX}$
8. กำหนด $\triangle ABC$ มี $AB > AC$

1. จงหาจุด X บน BC ที่ตัดออกไปทำให้ $AX^2 = XB \cdot XC$
2. จงหาจุด Z บน BC ที่ทำให้ $AZ^2 = BZ \cdot CZ$ และจงหาเงื่อนไขว่า เมื่อใดจะหาจุด Z ไม่ได้

9. จงหาจุดภายใน $\triangle$ ที่มีระยะห่างจากด้านทั้งสามของ $\triangle$ เป็นอัตราส่วน $m:n:l$
10. จงหาจุด P บนด้าน AC ของ $\square ABCD$ ทำให้ $\triangle BDP:\square ABCD = m:n$
11. จงสร้าง $\triangle$ หน้าจัวมียอัตราส่วนด้านเป็น $1:2:2$ และมี พ.ท. = พ.ท. $\square$ จักรสี่เหลี่ยม

กำหนด

12. $\triangle ABC$ แนบในวงกลม จงลากเส้นตรง AXY ตัดเส้นรอบวงที่ X พบส่วนของ BC ที่จุด Y ทำให้ $AY = 4AX$
13. จงสร้าง $\square$ จักรสี่เหลี่ยม พ.ท. = ผลต่างของรูปหลายเหลี่ยมที่กำหนดให้
14. จงหาจุด P บนฐาน BC ของ $\triangle ABC$ ที่ทำให้ CP ยาวเท่ากับเส้นตั้งฉากที่ลากจาก P มายัง AB
15. จงสร้าง $\square ABCD$ กำหนด $AB = 2$ นิ้ว, $AD = 3$ นิ้ว, $\angle A = 90^\circ$, $AC = 4$ นิ้ว พ.ท. $\square ABCD = 6$ ตารางนิ้ว
16. จงสร้าง $\square ABCD$ กำหนด $\angle A = \angle C = 90^\circ$ $AC = 6$ ซม. $BD = 7$ ซม. AC และ BD ทำมุมกัน 60°
17. กำหนดวงกลม 2 วงตัดกัน และจุด O จงลากเส้นผ่านจุด O พบเส้นรอบวงของวงกลมทั้งสองที่ P, Q ทำให้ $OP:OQ = 2:3$ เมื่อ

1. จุด O อยู่นอกวงกลมทั้งสอง
2. จุด O อยู่ภายในวงกลมทั้งสอง
3. จุด O อยู่ภายในวงกลมหนึ่ง แต่อยู่นอกวงกลมอีกวงหนึ่ง
18. จงสร้าง $\square$ ผืนผ้าให้มีอัตราส่วนด้านประกอบมุมฉาก $= m:n$ และมี พ.ท. = พ.ท. $\square$ จักรสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้

19. จงสร้าง $\square$ จักรสี่เหลี่ยม กำหนดผลต่างของเส้นทแยงมุมกับด้านของ $\square$ จักรสี่เหลี่ยม
20. จากจุด 2 จุดบนเส้นรอบวงของวงกลม จงลากคอร์ด 2 คอร์ดให้ขนานกัน โดยผลต่างของคอร์ดทั้งสองเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้
21. จงบรรจุ $\square$ จักรสี่เหลี่ยมในรูป 6 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า
22. กำหนดวงกลม 2 วง จงหาจุด A บนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่ง และจุด B บนเส้นรอบวงของวงกลมอีกวงหนึ่ง ทำให้ AB ยาวเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดและมีทิศทางตามที่กำหนด
23. กำหนดจุด 3 จุดไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน จงสร้างวงกลมผ่านจุด 2 จุดและวงกลมวงหนึ่งรับมุมที่จุดที่สามเท่ากับมุมที่กำหนดให้ด้วย
24. กำหนดคอร์ด CD จุด A, B อยู่บน $\widehat{CD}$ ใหญ่ จงหาจุด E บน $\widehat{CD}$ น้อย ซึ่งเมื่อลาก AE, BE ตัด CD ที่ P, Q ตามลำดับแล้วทำให้ $PR:QR = m:n$ เมื่อ R เป็นจุดที่กำหนดให้บน CD
25. กำหนดจุด 3 จุด ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน จงหาจุดที่ 4 ซึ่งมีระยะห่างจากจุดทั้งสามเป็นอัตราส่วน $m:n:l$

26. จงหาจุด D, E บนด้าน AB, AC ของ $\triangle ABC$ ทำให้ $AD:DE:EC = p:q:r$
27. กำหนด จุด Circumcentre, จุด In-centre และ จุด Ex-centre จงสร้าง $\triangle$
28. จงสร้างเส้นตรง 2 เส้น m และ n โดยให้ $mn = ab$, $m+n = p$ หรือ $m-n = q$ เมื่อกำหนด a, b, p และ q ให้

29. E เป็นจุดกึ่งกลาง $\widehat{BC}$ น้อย จงหาจุด A บน $\widehat{BC}$ ใหญ่ ซึ่งเมื่อลาก AE ตัด BC ที่ D แล้ว ทำให้ AD ยาวเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้
30. กำหนดจุด A อยู่ระหว่าง $\angle XOY$
 - 1) จงสร้าง $\square$ จักรสี่เหลี่ยม $ABCD$ ให้จุด B อยู่บน OX , จุด D อยู่บน OY
 - 2) จงสร้าง $\triangle$ ด้านเท่า ABC ให้จุด B อยู่บน OX , จุด C อยู่บน OY
31. จงหาจุด R ภายใน $\triangle ABC$ ทำให้ $AR:BR:CR = AB:AC:BC, BA:CA:CB$
32. กำหนดจุด A บนเส้นรอบวงของวงกลมมี BC เป็นคอร์ด จงหาจุด D บนเส้นรอบวง
 - 1) BC แบ่งครึ่ง AD 2) BC แบ่ง AD ออกเป็นอัตราส่วนที่กำหนด
33. จงสร้างวงกลมผ่านจุด 2 จุดที่กำหนดแล้วตัดวงกลมที่กำหนดทำให้คอร์ดร่วมที่ได้

ขนาดเส้นตรงที่กำหนดให้

34. จากจุดที่กำหนดให้จงลากเส้นตั้งฉาก 2 วงเท่ากันให้คอร์ดที่ได้อาวเท่ากัน
35. จงสร้าง $\triangle$ มุมฉาก ABC กำหนดด้านตรงข้ามมุมฉาก AB และ $AC^2 : CB^2 = p : q$
36. จงสร้างวงกลมโดยมีจุดที่กำหนดให้เป็นจุด ศ.ก. และให้วงกลมวงนี้แบ่งครึ่งเส้นรอบวงของวงกลมที่กำหนดด้วย
37. จงสร้าง $\square$ กำหนดด้าน 3 ด้านและรัศมีวงกลมที่ล้อมรอบ $\square$
38. กำหนดครึ่งมี จงสร้างวงกลมให้ผ่านจุดที่กำหนดให้ และให้เส้นสัมผัสที่ลากจากจุดที่กำหนดให้อีกจุดหนึ่งมายังวงกลมวงนี้นยาวเท่ากับที่กำหนดให้
39. จงสร้าง $\triangle ABC$ กำหนด $\angle A$, AB และ $\angle ADB$ เมื่อ D เป็นจุดกึ่งกลาง BC
40. จงลากเส้นตรงผ่านจุดที่กำหนด เพื่อให้ผลบวกหรือผลต่างของระยะทางของเส้นตรงเส้นนี้จากจุด 2 จุดที่กำหนดให้เท่ากับเส้นตรงที่กำหนด เมื่อ
 - 1) จุด 2 จุดนี้อยู่คนละข้างของเส้นตรง
 - 2) จุด 2 จุดนี้อยู่ข้างเดียวกันของเส้นตรง
41. จงสร้างวงกลมมีจุดที่กำหนดให้เป็นจุด ศ.ก. ตัดเส้นขนาน 2 เส้นที่กำหนดให้ ให้ผลบวกของคอร์ดที่ได้เท่ากับเส้นตรงที่กำหนด
42. จงลากเส้นขนานกับด้านของ $\triangle$ ตัดด้านอีก 2 ด้านของ $\triangle$ ทำให้ $\square$ กางหมุ่ที่ได้มีเส้นรอบรูปเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้
43. จงสร้าง $\triangle$ โดยให้ด้านแต่ละด้านผ่านจุด 3 จุดที่กำหนดให้ด้านละจุด และให้แต่ละจุดแบ่งด้านของ $\triangle$ ออกเป็นอัตราส่วนที่กำหนดให้ด้วย
44. กำหนดเส้นตรง a, b และ d ให้ จงหาเส้น c ที่ทำให้ $ab = c(c + d)$
45. จงสร้าง $\triangle$ มุมฉากกำหนดเส้นรอบรูปให้และอัตราส่วนของ $\square$ จัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก
46. จงสร้าง $\triangle ABC$ กำหนด พ.ท. $\triangle ABC$, $\angle BAD$, $\angle DAC$ เมื่อ D เป็นจุดกึ่งกลาง BC
47. กำหนด พ.ท. $\square ABCD$, $AB : AC = m : n$, $AB : BD = p : q$ จงสร้าง $\square$ ด้านขนาน ABCD
48. จงสร้าง $\triangle$ หน้าจั่วแนบในวงกลมที่กำหนด กำหนดผลบวกของฐานและส่วนสูงที่ลากจากมุมยอดมาทั้งฉากกับฐาน
49. กำหนดวงกลมและจุด A จงลากเส้นผ่า ศ.ก. BC ทำให้ $\angle BAC$ เท่ากับมุมที่กำหนดให้
50. จุด A, O และ B อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน จงหาจุด C บนเส้นรอบวงของวงกลมที่มี O เป็นจุด ศ.ก. ซึ่งเมื่อลาก AC, BC ตัดเส้นรอบวงที่ E, F ตามลำดับ แล้วทำให้ $EC = CF$

51. วงกลม 2 วงสัมผัสกันภายใน A เป็นจุดบนเส้นรอบวงวงกลมใหญ่ จงสร้างวงกลมให้สัมผัสภายในกับวงกลมวงใหญ่ที่จุด A และสัมผัสภายนอกกับวงกลมวงเล็กด้วย
- ถ้า A เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมวงเล็ก จงสร้างวงกลมให้สัมผัสภายนอกกับวงกลมวงเล็กที่จุด A และสัมผัสภายในกับวงกลมวงใหญ่ด้วย
52. จงบรรจุ $\square$ จัตุรัสลงใน $\square$ ด้านไม่เท่า
53. กำหนดครึ่งมี OA, OB จงลาก PR ให้อยู่ระหว่าง OA, OB ที่ต่อออกไปโดย PR สัมผัสวงกลมที่จุด Q พบส่วนต่อของ OA, OB ที่ P, R ตามลำดับทำให้ $PQ : QR = m : n$
54. จงบรรจุวงกลม 2 วงให้แนบในและแนบนอก $\triangle$ ที่กำหนด โดยวงกลมทั้งสองสัมผัสกันภายนอกและแต่ละวงสัมผัสด้าน 2 ด้านของ $\triangle$ ด้วย และให้
 - 1) วงกลมทั้งสองเท่ากัน
 - 2) วงกลมวงหนึ่งมีรัศมีเป็น 2 เท่าของอีกวงหนึ่ง
55. $\square$ กางหมุ่ ABCD มี $AB \parallel CD$ จงลากเส้น PQRS ให้ $\parallel AB$ ตัด AD, AC, BD, BC ที่จุด P, Q, R, S ตามลำดับทำให้ $PQ = QR = RS$
56. ภายใต้วงกลมที่กำหนดให้ จงลากคอร์ดให้ถูกแบ่งออกเป็น 3 ส่วนเท่าๆ กันด้วยรัศมี 2 เส้นที่กำหนดให้
57. กำหนดจุด P เส้นตรง OA, OB, OC จงลากเส้น PQRS ตัด OA, OB, OC ที่จุด Q, R, S ตามลำดับ ทำให้ $QR : RS = m : n$
58. จงบรรจุ $\triangle$ ลงใน $\triangle$ ที่กำหนดให้ โดยให้
 - 1) ด้านทั้งสาม $\parallel$ เส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสามของ $\triangle$ ที่กำหนดให้
 - 2) ด้านทั้งสาม $\perp$ ด้านของ $\triangle$ ที่กำหนดให้
59. จงบรรจุ $\square$ ด้านขนานลงใน $\triangle$ ที่กำหนด กำหนดอัตราส่วนด้านของ $\square$ ด้านขนานและมุมที่เส้นทแยงมุมกระทำต่อกัน
60. จงสร้าง $\square$ จัตุรัสโดยให้จุดยอด 2 จุดอยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้ จุดยอดอีก 2 จุด อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมที่กำหนดให้
61. จงสร้าง $\triangle ABC$ ที่กำหนด $\angle A$, $AB : AC = m : n$ และรัศมีวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$
62. จุด A, B อยู่ภายในวงกลม จงหาจุด C บนเส้นรอบวงที่ทำให้ $\angle ACB$ มีขนาดโคที่สุก
63. จงสร้าง $\triangle$ ด้านเท่าให้มี พ.ท. = พ.ท. $\triangle$ ใด ๆ
64. จงสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าให้มี พ.ท. 4 ตารางนิ้ว
65. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมูให้มี พ.ท. เป็น $\frac{3}{4}$ ของ $\triangle$ ที่กำหนดให้
66. จงสร้าง $\triangle$ ให้มี พ.ท. $\frac{1}{3}$ ของ $\triangle$ ที่กำหนดให้และมีจุดยอดอยู่บนด้านทั้งสามของ $\triangle$ ที่กำหนดให้ด้วย

67. จงหาจุด E,D บนด้าน AB, AC ของ $\triangle ABC$ ทำให้ $\square BCDE = \frac{9}{16} \triangle ABC$
68. จงสร้าง $\square$ จักรัณ ABCD เมื่อกำหนด AE ให้โดย E เป็นจุดบน BC, แบ่ง BC ออกเป็นอัตราส่วน $m:n$
69. กำหนด $\square$ จักรัณ ABCD และ PQRS และเส้นตรง XY จงหาเส้นตรง ZW ที่ทำให้ $\square ABCD : \square PQRS = XY : ZW$
70. กำหนด $\triangle ABC$ จงสร้างวงกลมผ่านจุด B และ C ตัด AB, AC หรือ AB, AC ที่ค่อออกไป ที่ D,E ตามลำดับ ทำให้ $AD = AE$
71. จงสร้าง $\square$ จักรัณล้อมรอบ $\square$ ด้านไม่เท่า
72. กำหนดเส้นตรง AB,CD ซึ่งตัดกันที่จุด E จงหาเส้นแบ่งครึ่ง $\angle E$ โดยไม่ข้องต่อ AB,CD ออกไปตัดกัน
73. A และ B เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม จงหาจุด C บนเส้นรอบวงที่ทำให้ $AC=2CB$
74. $\square ABCD$ มี $\angle B = \angle C = 90^\circ$, $AB=5$ ซม., $BC=12$ ซม., $CD=4$ ซม., จุด E อยู่บน BC โดย $BE=9$ ซม. โยง AE,DE จงลากเส้นตรงตัด AB,AE,DE,CD ที่จุด P,Q,R,S ตามลำดับ ทำให้ $PQ:QR:RS=4:1:3$
75. กอร์ค APB และ CPD ตัดกันที่ P ถ้า C เป็นจุดกึ่งกลางส่วนของ AB จงหาจุด E บนเส้นรอบวงที่ทำให้ $EA:EB=DA:DB$
76. จงหาจุด Q บน AB ที่ค่อออกไปทำให้ $AQ^3 = 3QB^2$
77. จงหาจุด P บนเส้นตรง AB ทำให้ $3AP^2 = 2AB^2$
78. จงสร้างวงกลมผ่านจุด 2 จุดที่กำหนดให้และตัดวงกลมที่กำหนดให้โดยให้คอร์ดร่วมที่ยาวเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้
79. จงสร้างวงกลมสัมผัสเส้นตรง 2 เส้นที่ตัดกัน และสัมผัสภายนอกหรือภายในกับวงกลมที่กำหนดให้ด้วย
80. ABCD เป็น $\square$ จักรัณ จงหาจุด P บน AB ที่ค่อออกไปทำให้ $PA \cdot PB = BC^2$
81. A เป็นจุดภายในวงกลม จงลากคอร์ด BC ผ่านจุด A ทำให้ $BA:AC=m:n$
82. ABCD เป็น $\square$ ด้านไม่เท่า จงหาจุด P ซึ่งอยู่ห่างจาก AB, CD เท่ากันและอยู่ห่างจาก BC, DA เท่ากันด้วย จงพิสูจน์ด้วยว่าจุด P มีได้ 4 จุด และถ้า ABCD เป็น $\square$ ด้านขนาน จุด P มีได้ 1 จุด ถ้า $\square ABCD$ concyclic จุด P มีได้ 2 จุด
83. จงสร้างวงกลมสัมผัสเส้นตรง 2 เส้นและให้ผ่านจุดที่กำหนดให้ด้วย
84. จงสร้าง $\square$ ด้านขนาน ABCD กำหนด พ.ท. $\square ABCD$, $AB:AC=p:q$

85. กำหนดวงกลม 2 วงและเส้นตรงเส้นหนึ่ง จงหาจุดบนเส้นตรงเส้นนี้ที่ทำให้ผลบวกของเส้นสัมผัสที่ลากจากจุดนี้ไปยังวงกลมทั้งสองเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้
86. จงสร้าง $\triangle$ ให้คล้ายกับ $\triangle$ ที่กำหนดให้โดยให้มุมยอดทั้งสาม อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้ 3 เส้นมุมละเส้น
87. วงกลม 2 วงตัดกัน จงลากเส้นตัดเส้นรอบวงของวงกลมทั้งสองที่จุด A, B, C และ D ทำให้ $AB = BC = CD$
88. $\triangle$ ด้านเท่า ABC มีวงกลมบรรจุอยู่ภายใน จงลากเส้นตรงจากจุด A มาพบด้านตรงข้ามที่ E ตัดเส้นรอบวงที่ C, D เพื่อให้ $CD = AC + DE$ และจงพิจารณาด้วยว่าเมื่อ ABC เป็น $\triangle$ ใดๆ
89. C เป็นจุด ค.ก. ของวงกลม P, Q เป็นจุดบนเส้นรอบวง จงสร้างวงกลมให้สัมผัส CP, CQ และส่วนโค้งเล็ก PQ
90. จงลากเส้นตรงผ่านจุด A ที่กำหนดให้ตัดเส้นตรงและวงกลมที่กำหนดให้ที่จุด B, C ตามลำดับทำให้ $AB:AC=m:n$
91. จงหาจุด P บนฐาน BC ของ $\triangle ABC$ ทำให้ $AP^2:BP \cdot PC = p:q$
92. จงลากเส้นตรงตัดวงกลม 2 วงที่ร่วมจุด ค.ก. กันที่จุด A, B, C และ D ทำให้ $AD:BC = m:n$
93. จงลากเส้นตรงตัดวงกลม 3 วงที่ร่วมจุด ค.ก. ทำให้ส่วนของเส้นตรงที่อยู่ระหว่างเส้นรอบวงของวงกลมวงที่ 1 และวงที่ 2 เท่ากับส่วนของเส้นตรงที่อยู่ระหว่างเส้นรอบวงของวงกลมวงที่ 2 และวงที่ 3
94. จงหาจุด 2 จุดบนเส้นรอบวงของวงกลม 2 วง วงละจุด ซึ่งอยู่ห่างจากจุดที่กำหนดให้เท่ากัน และอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกับจุดที่กำหนดด้วย
95. จงลากเส้นตรงผ่านจุด A ที่กำหนดให้ตัดวงกลมที่กำหนดให้ที่ B และ C ทำให้ $AB:AC=p:q$
96. E เป็นจุดบนส่วนสูง BD ที่ค่อออกไปของ $\triangle ABC$ ซึ่งมี $\angle B = 90^\circ$ จงลากเส้นผ่านจุด E ตัด AB, AC, BC ที่จุด P, Q, R ตามลำดับทำให้ $PQ = QR$
97. จงสร้าง $\triangle$ กำหนดฐาน, มุมที่ฐาน 1 มุม, จุดบนฐาน ซึ่งเส้นผ่า ค.ก. ของวงกลมล้อมรอบ $\triangle$ ที่ลากจากจุดยอดมาพบฐานที่จุดนี้
98. จงสร้าง $\triangle ABC$ กำหนด เส้นตรงซึ่งฐาน BC อยู่บนเส้นตรงเส้นนี้, จุด D บนเส้นรอบวงวงกลม ABC, จุด E บนด้าน AB, รัศมีวงกลม ABC และความยาว BC
99. จงบรรจุ $\triangle$ ด้านเท่าที่กำหนดขนาดของด้านให้ลงใน $\triangle$ ใดๆ
100. จงสร้าง $\square$ ผืนผ้าให้จุดยอดมุมหนึ่ง อยู่ที่จุดยอดของ $\triangle$ ที่กำหนดให้ จุดยอดอีก 3 จุดที่เหลืออยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมที่มีด้านทั้งสามเป็นด้านผ่า ค.ก. วงละจุด

101. จงสร้าง $\triangle$ ให้คล้ายกับ $\triangle$ ที่กำหนดให้ โดยมีจุดยอดอยู่ที่จุดที่กำหนดให้จุดยอดอีก 2 จุดที่เหลืออยู่บนเส้นตรง 2 เส้นที่กำหนดให้ เส้นละจุด
102. กำหนด $\triangle ABC$, $\triangle DEF$, X เป็นจุดบน AB จงบรรจุ $\triangle XYZ$ ลงใน $\triangle ABC$ โดยให้ $\triangle XYZ \sim \triangle DEF$
103. จงสร้าง $\triangle$ ให้คล้ายกับ $\triangle$ ที่กำหนดให้ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่จุดที่กำหนดให้จุดยอดอีก 2 จุดอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม 2 วงที่กำหนดให้วงละจุด
104. จงสร้าง $\triangle$ ให้คล้ายกับ $\triangle$ ที่กำหนดให้ โดยมีจุดยอดทั้งสามอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม 3 วงที่กำหนดให้วงละจุด
105. จงสร้าง $\triangle$ ให้คล้ายกับ $\triangle$ ที่กำหนดให้ โดยมีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่จุดที่กำหนดให้จุดยอดจุดที่สองอยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้ จุดยอดจุดที่สามอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมที่กำหนดให้
106. จากจุด A ที่กำหนดให้จงลากเส้นผ่านจุด A ตัดเส้นตรงที่กำหนดให้ที่ B ตัดวงกลมที่กำหนดให้ที่ C และ D ทำให้ $AB = CD$
107. จงสร้าง $\triangle ABC$ กำหนดรัศมีวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$ ซึ่งมี O เป็นจุด ศ.ก. และ $\triangle OAB : \triangle OBC : \triangle OCA = p : q : r$ เมื่อ p, q, r เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้
108. กำหนดวงกลม จุด A และ B จงหาจุด C บนเส้นรอบวงซึ่งเมื่อลาก AC, BC ตัดเส้นรอบวงที่จุด E, F ตามลำดับแล้ว ทำให้ $CE = CF$
109. จงหาจุด P, Q บนด้าน AB, AC ของ $\triangle ABC$ ทำให้ PQ ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้ และ $PQ : (BP + CQ) = m : n$
110. จงสร้าง $\triangle$ กำหนดมุมยอด ส่วนสูงที่ลากจากมุมยอด และผลบวกของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดปลายส่วนสูงเส้นนี้ ไปยังด้านประกอบมุมยอด
111. จงบรรจุ $\triangle$ ลงในวงกลมที่กำหนดให้ โดยมีมุมยอดเท่ากับมุมที่กำหนดให้ได้ฐานสัมผัสวงกลมที่กำหนดให้และด้านประกอบมุมยอดด้านหนึ่งสัมผัสวงกลมอีกวงหนึ่งที่กำหนดให้
112. จงสร้าง $\triangle$ หน้าจั่ว กำหนดส่วนสูงและเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุดปลายฐานไปยังด้านประกอบมุมยอด
113. จากจุดที่กำหนดให้ จงลากเส้นตรงตัด $\triangle$ ที่กำหนดให้ออกเป็น 2 ส่วนมีพื้นที่เท่ากัน
114. จงลากเส้นตรงขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้ตัดวงกลมและแขนของมุมที่กำหนดให้ที่จุด A, B, C, D ตามลำดับ ทำให้ $AB : CD = p : q$
115. จงลากเส้นตรงจากจุดยอดของ $\triangle$ ที่กำหนดให้ทำให้ผลคูณของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดยอดอีก 2 จุดที่เหลือมายังเส้นตรงเส้นนี้มีค่าเท่ากับ k^2
116. จงลากเส้น AP, BQ ผ่านจุด A, B ที่กำหนดให้พบเส้นตรงที่กำหนดให้ที่ P, Q ทำให้ $AP = BQ$ และเมื่อต่อ AP, BQ พบกันที่จุด R แล้วทำให้ $\angle R$ เท่ากับมุมที่กำหนดให้ด้วย

117. จงสร้างวงกลมสัมผัสวงกลม 2 วงที่กำหนดให้และผ่านจุดที่กำหนดให้ด้วย
118. จงสร้างวงกลมสัมผัสเส้นตรงและวงกลม 2 วงที่กำหนดให้
119. จงสร้างวงกลมสัมผัสวงกลม 3 วงที่กำหนดให้
120. กำหนดจุด A ภายนอกวงกลมจุด ศ.ก. O จงสร้างวงกลมสัมผัสเส้น AO และวงกลม O โดยให้มีจุด ศ.ก. อยู่บนเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด A ไปยังวงกลม O
121. จงสร้างวงกลมตัดวงกลม 3 วงที่กำหนดให้แล้วให้ได้คอร์ดร่วม 3 คอร์ดยาวเท่ากันที่กำหนดให้
122. กำหนดจุด P บนด้าน AB ของ $\triangle ABC$ จงหาจุด Q บนด้าน AC ที่ทำให้ PQ เท่ากับผลบวกของระยะทางจากจุด P และ Q มายังด้าน BC
123. กำหนดจุด A, B และเส้นตรง t จงหาจุด C บนเส้นตรง t ทำให้ $AC + BC = p$ หรือ $AC - BC = q$
124. จงหาจุด D, E บนด้าน AB, AC ของ $\triangle ABC$ ทำให้ DE ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้ และ $CE = BD$ ด้วย
125. Q เป็นจุดบน AD ซึ่งแบ่งครึ่ง $\angle BAC$ ที่กำหนดให้ จงลากเส้นผ่านจุด Q ตัด AB, AC ที่จุด P, R ตามลำดับ ทำให้ PR ยาวเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้
126. กำหนดวงกลม 2 วงมีจุด ศ.ก. ร่วมกันที่จุด A จุด B เป็นจุดที่กำหนดให้ จงสร้างวงกลมให้ B เป็นจุด ศ.ก. ตัดวงกลม 2 วงที่กำหนดให้ที่จุด C และ D วงละจุด ทำให้จุด C, A, D อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
127. จงหาจุด ๆ หนึ่งบนเส้นตรงที่กำหนดให้ ซึ่งผลบวกของเส้นสัมผัสที่ลากจากจุดนั้นมายังวงกลม 2 วงที่กำหนดให้ยาวเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้
128. จงหาจุด M บนเส้นรอบวงของวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$ ที่ทำให้ $MA^2 = MB \cdot MC$

พื้นที่ในเทอมของด้าน

Proportion applied to areas

&

Rectangles in Connection with Circles

สิ่งที่ต้องทราบในการทำโจทย์เรื่องนี้

ทฤษฎีบทที่ 60 - 78 (ดูทฤษฎีบทข้างหน้า)

The Theorem of Ceva and Menelaus และบทกลับ (ใช้อ้างได้เลย)

อัตราส่วนตรีโกณมิติ สูตรต่างๆ เช่น

1. จำค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม $15^\circ, 18^\circ, 30^\circ, 36^\circ, 45^\circ, 54^\circ, 60^\circ, 72^\circ, 90^\circ$

2. พ.ท. $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (ใช้เมื่อกำหนดค่าด้านทั้ง 3 ให้)

เมื่อ a, b, c เป็นด้านทั้ง 3 ของ Δ

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\text{พ.ท. } \Delta = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$$

$$= \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$= \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin (B+C)}$$

$$\text{และ พ.ท. } \Delta \text{ ด้านเท่า} = \frac{\sqrt{3}}{4} (\text{ด้าน})^2$$

$$3. R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{abc}{4 \Delta}$$

(R = รัศมีวงกลมล้อมรอบ Δ)

$$r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{\Delta}{s} = (s-a) \tan \frac{A}{2}$$

(r = รัศมีวงกลมแนบใน Δ)

$$4. r_1 = \frac{\Delta}{s-a} = \frac{a \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} \quad (r_1 = \text{รัศมีวงกลมแนบนอก } \Delta \text{ ตรงข้าม } \angle A)$$

$$r_2 = \frac{\Delta}{s-b} = \frac{b \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2}} \quad (r_2 = \text{รัศมีวงกลมแนบนอก } \Delta \text{ ตรงข้าม } \angle B)$$

$$r_3 = \frac{\Delta}{s-c} = \frac{c \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} \quad (r_3 = \text{รัศมีวงกลมแนบนอก } \Delta \text{ ตรงข้าม } \angle C)$$

$$5. \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k = 2R \quad (\text{Law of Sine})$$

(R = รัศมีวงกลมล้อมรอบ Δ)

กฎอัตราส่วน

$$\text{ถ้า } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$$

$$\text{ได้ } \frac{a+c+e}{b+d+f} = k$$

$$\text{และ } \frac{a-c-e}{b-d-f} = k$$

หลักการพิสูจน์โดยทั่วไป

ใช้การสังเกต จากสิ่งที่กำหนดให้ พยายามดึงให้มาเข้าทฤษฎีบทที่ทราบอย่างเช่น เรื่องการเปรียบเทียบ พ.ท. ของ Δ ในเทอมของด้าน โจทย์ทั่วไปจะต้องอาศัย ทฤษฎีบทที่ 70, 71 และ 72 ควบคู่กันไปในเรื่องเดียว โดยจับ Δ เป็นคู่ ๆ ให้มีด้านร่วมกัน เพื่อเป็นตัวเชื่อมโยงไปยังด้านอื่น ๆ ตามที่โจทย์ต้องการต่อไป

หรือเรื่อง พ.ท. $\square$ ผืนผ้าที่เกี่ยวข้องกับวงกลม นอกจากจะใช้ทฤษฎีบทที่กล่าวมาแล้ว ยังต้องทราบลักษณะและคุณสมบัติต่างๆ ของวงกลมด้วย อย่างเช่น การที่จุด 4 จุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันจะ concyclic ได้นั้นมีหลักการอย่างไรบ้าง เมื่อทราบว่ามีจุด 4 จุดนั้น concyclic แล้วก็สามารถดึงเอาทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องมาใช้ได้

อย่างไรก็ตาม การจะทำโจทย์ได้รวดเร็ว ไม่ว่าเรื่องใด ๆ ก็ตาม ย่อมต้องผ่านโจทย์ประเภทนี้นั้นมา เพราะโจทย์ในเรื่องหนึ่ง ๆ จะมี form นั้นแน่นอนว่าเป็นประเภทใดบ้าง ดังนั้นเมื่อไปพบโจทย์ที่พลิกแพลงขึ้นมาก็จะสามารถทำได้โดยประสพการณ์จากโจทย์ที่ทำมาแล้วนั่นเอง ขอให้ดูตัวอย่างโจทย์ประเภทต่างๆ ต่อไป

Ex 1 Given ให้ R เป็นรัศมีของวงกลมล้อม $\triangle ABC$

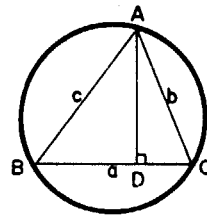
Prove $R = \frac{abc}{4\Delta}$

Proof ลาก $AD \perp BC$

$$AB \cdot AC = 2R \cdot AD \quad (\text{ทบ. 77})$$

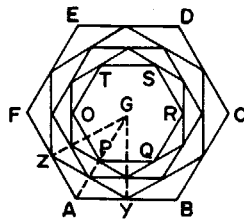
$$R = \frac{AB \cdot AC}{2AD} = \frac{cb}{2AD} = \frac{abc}{2AD \cdot a}$$

$$= \frac{abc}{4 \left(\frac{1}{2} AD \cdot a \right)} = \frac{abc}{4\Delta}$$



Q.E.D.

Ex 2



Given ABCDEF เป็นหกเหลี่ยมด้านเท่า ให้ G เป็นจุด ค.ก.

รูปหกเหลี่ยมเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสร้างรูป 6 เหลี่ยม
ใหม่เรื่อยๆ จนได้ถึงรูป ถ้า $AB = x$

Find รูป PQRST : รูป ABCDEF

Proof $GY = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

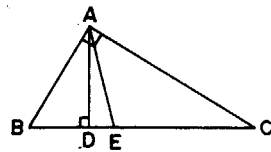
$$ZY = \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad (\text{GYZ เป็น } \triangle \text{ ด้านเท่า})$$

ถ้าเน้นเส้นนี้ต่อไปจะได้ $PQ = \frac{9}{16}x$

รูป PQRST : รูป ABCDEF = $9^2 : 16^2$

= 81 : 256 Ans.

Ex 3



Given $\triangle ABC$ มี $\angle A$ เป็นมุมฉาก $AD \perp BC$ ที่ D AE แบ่ง
ครึ่ง $\angle BAC$

Prove $\frac{BD}{DC} = \frac{BE^2}{EC^2}$

Proof $\frac{\triangle ABD}{\triangle ADC} = \frac{BD}{DC}$ จาก $\angle A, \angle D$ เป็นมุมฉาก

$$\therefore \frac{\triangle ABD}{\triangle ADC} = \frac{AB^2}{AC^2} \text{ ใด } \frac{BD}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

เช่นเดียวกัน $\frac{\triangle ABE}{\triangle ACE} = \frac{BE}{EC}$ และ $\angle BAE = \angle EAC$

$$\therefore \frac{\triangle ABE}{\triangle ACE} = \frac{AB \cdot AE}{AE \cdot AC} = \frac{AB}{AC} \text{ ใด } \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BE^2}{EC^2}$$

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BE^2}{EC^2}$$

Q.E.D.

Ex 4 Given P เป็นจุดใดๆ บน CD ถอย $HK \perp AP$ ถอย $XY \perp BP$

Prove $HK = XY$

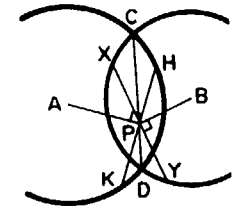
Proof HP.PK = XP.PY (ทำ = CP.PD)

$$PK = HP = \frac{1}{2}HK$$

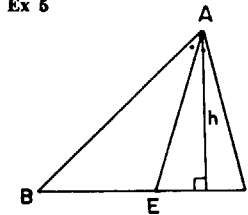
$$PY = XP = \frac{1}{2}XY \quad (AP \perp HK, BP \perp XY)$$

$$\therefore \frac{HK^2}{4} = \frac{XY^2}{4} \quad \therefore HK = XY$$

Q.E.D.



Ex 5



Given $\triangle ABC$ มี AE แบ่งครึ่ง $\angle BAC$ d และ d' เป็นความ
ยาวเส้นผ่า ค.ก. ล้อม $\triangle ABE, \triangle ACE$

Prove $\frac{d}{d'} = \frac{BE}{EC}$

Proof $\frac{AB \cdot AE}{AC \cdot AE} = \frac{h \cdot d}{h \cdot d'} \therefore \frac{AB}{AC} = \frac{d}{d'} \quad (\text{ทบ. 77})$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC} \therefore \frac{d}{d'} = \frac{BE}{EC} \quad (\text{ทบ. 61})$$

Q.E.D.

Ex 6 Given $\triangle ABC$ แนบในวงกลม CD สัมผัสวงกลมที่ C $BD \parallel AC$

Prove $\frac{CD^2}{AB^2} = \frac{BD}{AC}$

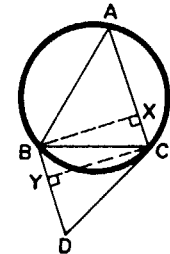
Proof ลาก $BX, CY \perp AC$ และ BD ที่ X, Y

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle BCD} = \frac{AC \cdot BX}{BD \cdot CY} = \frac{AC}{BD} \quad (BX = CY)$$

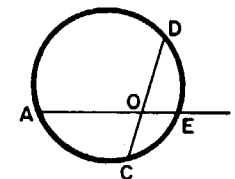
$$\triangle ABC \sim \triangle BCD$$

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle BCD} = \frac{AB^2}{CD^2} \text{ ใด } \frac{CD^2}{AB^2} = \frac{BD}{AC}$$

Q.E.D.



Ex 7



Given AB, CD เป็นเส้นตรงตัดกันที่ O ทำให้ $AO \cdot OB = CO \cdot OD$

Prove A, B, C, D concyclic

Proof สร้างวงกลมผ่านจุด A, C, D ตัด AB ที่ E

$$AO \cdot OE = CO \cdot OD \text{ แต่ } AO \cdot OB = CO \cdot OD$$

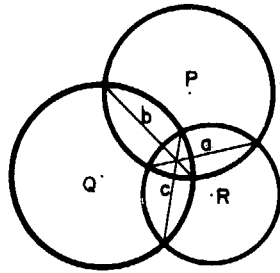
$$\therefore AO \cdot OB = AO \cdot OE \quad \text{คือ } OB = OE$$

$$\therefore \text{จุด E ทับจุด B}$$

$$A, B, C, D \text{ concyclic}$$

Q.E.D.

Ex 8



Given a เป็นคอร์ดร่วมของวงกลม P และวงกลม R b เป็นคอร์ดร่วมของวงกลม P และวงกลม Q

Prove คอร์ดร่วมของวงกลม Q และวงกลม R ผ่านจุดตัดของ a และ b

Const ลากคอร์ด c ของวงกลม Q ให้ปลายคอร์ดข้างหนึ่งอยู่ที่จุดตัดวงกลม Q และวงกลม R และผ่านจุดตัดของคอร์ด a และ b

Proof ผลคูณส่วนแบ่ง a = ผลคูณส่วนแบ่ง b
 ผลคูณส่วนแบ่ง b = ผลคูณส่วนแบ่ง c
 $\therefore$ ผลคูณส่วนแบ่ง a = ผลคูณส่วนแบ่ง c
 $\therefore$ คอร์ด c เป็นคอร์ดร่วมของวงกลม R Q.E.D.

Ex 9 Given $\square ABCD$ เป็น $\square$ ด้านขนาน $AB = a, AD = b, BE = c, DF = d$

Find $\square AECF : \square ABCD$

Proof โยง AC

$$\frac{\triangle ACF}{\triangle ACD} = \frac{CF}{CD} = \frac{a-d}{a}$$

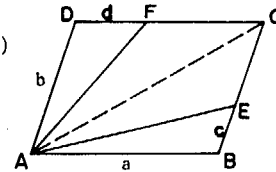
$$\frac{\triangle ACF}{\square ABCD} = \frac{a-d}{2a} \quad \dots (1)$$

$$\frac{\triangle ACE}{\triangle ABC} = \frac{CE}{BC} = \frac{b-c}{b}$$

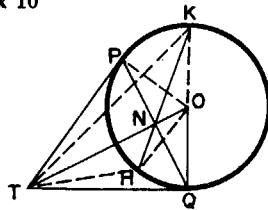
$$\frac{\triangle ACE}{\square ABCD} = \frac{b-c}{2b} \quad \dots (2)$$

$$(1) + (2); \frac{\square AECF}{\square ABCD} = \frac{2ab - bd - ac}{2ab}$$

Ans.



Ex 10



Given ตามรูป HNK เป็นคอร์ดใด ๆ TP, TQ สัมผัสวงกลม

Prove $\square THOK$ concyclic

Proof ลาก OP, OQ

$\square TPOQ$ concyclic $\therefore PN \cdot NQ = TN \cdot NO$
 แต่ $PN \cdot NQ = HN \cdot NK$ $\therefore TN \cdot NO = HN \cdot NK$
 $\therefore \square THOK$ concyclic Q.E.D.

Ex 11 Given DEAF เป็น $\square$ ด้านขนาน, $BD : DC = a : b$

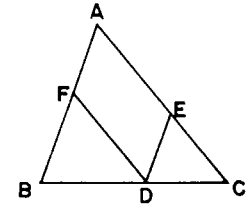
Find $\square DEAF : \triangle ABC$

Proof $\frac{\triangle CED}{\triangle ABC} = \frac{CD^2}{BC^2} = \frac{b^2}{(a+b)^2}$ (ทบท. 72)

$\frac{\triangle BFD}{\triangle ABC} = \frac{BD^2}{BC^2} = \frac{a^2}{(a+b)^2}$ (ทบท. 72)

$$\frac{\triangle ABC - (\triangle CED + \triangle BFD)}{\triangle ABC} = \frac{(a+b)^2 - (b^2 + a^2)}{(a+b)^2}$$

$$\therefore \square DEAF : \triangle ABC = 2ab : (a+b)^2 \text{ Ans.}$$



Ex 12 Given ตามรูป AB เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ของวงกลม $PM \perp AB$

Prove $PM^2 = PC \cdot PD + AM \cdot MB$

Const ท่อ PM พบเส้นรอบวงที่ R

Proof ได้ $MR = QM$

$$\therefore PC \cdot PD = PR \cdot PQ = (PM + MR)(PM - QM)$$

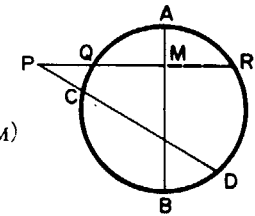
$$= PM^2 - MR^2$$

$$\text{แต่ } MR^2 = QM \cdot MR = AM \cdot MB$$

$$\therefore PC \cdot PD = PM^2 - AM \cdot MB$$

$$PM^2 = PC \cdot PD + AM \cdot MB$$

Q.E.D.



Ex 13 Given $\triangle ABC$ บรรจุในวงกลม มี AD เป็นเส้นมัธยฐานต่อ

AD พบเส้นรอบวงที่ E

Prove $AB^2 + AC^2 = 2 AD \cdot AE$

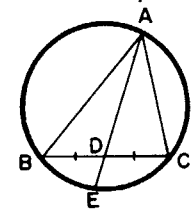
Proof $AB^2 + AC^2 = 2 CD^2 + 2 AD^2$ (ทบท. 56)

$$= 2 CD \cdot DB + 2 AD^2$$

$$\text{แต่ } AD \cdot DE = CD \cdot DB \quad (\text{ทบท. 75})$$

$$\therefore AB^2 + AC^2 = 2 AD(DE + AD)$$

$$= 2 AD \cdot AE \quad \text{Q.E.D.}$$



Ex 14 Given $\triangle ABC$ มี $AB = AC$ Y, X เป็นจุดบน AC, AB ทำให้

$$AC:AY = AB:AX$$

$$\text{Prove } XB^2 + XY \cdot BC = XC^2$$

Const โยง CX, YB

Proof จาก $AC:AY = AB:AX$ ได้ $AX = AY$ และ $BC \parallel XY$

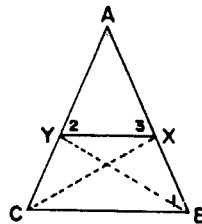
$\angle 1 = \angle 2 \therefore X, B, C, Y$ concyclic ทบ. 78 $XY \cdot BC$

$+ XB \cdot CY = CX \cdot BY$ จาก $AX = AY$ ทำให้ $XB = CY$

และ $\triangle XYB \cong \triangle XYC$ ได้ $BY = CX \therefore XY \cdot BC +$

$$XB^2 = CX^2$$

Q.E.D.



Ex 15

Given $\square PQRM$ concyclic มี PR แบ่งครึ่ง MQ ที่ S

Prove $PM \cdot MR = PQ \cdot QR$

Const ลาก MC, QD $\perp$ PR ที่ C, D

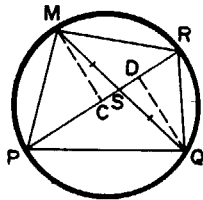
Proof $\triangle MSC \cong \triangle QDS$ (ม.ค.ม.) $\therefore MC = QD$

จาก ทบ. 77 $\frac{MP \cdot MR}{PQ \cdot QR} = \frac{d \cdot MC}{d \cdot QD}$ (เมื่อ d เป็นเส้นผ่า ศ.ก.

ของวงกลม)

$$\therefore PM \cdot MR = PQ \cdot QR$$

Q.E.D.



Ex 16 Given ตามรูป $\angle BQC = \angle BPC$ และ $\square AYKX$ เป็น $\square$ ด้านขนาน

Prove $na = mb$

$$\text{Proof } \therefore \frac{QY+a}{QY} = \frac{b+m}{b}$$

($\triangle QAC \sim \triangle QYK$)

$$\therefore QY = \frac{ab}{m}$$

$$\therefore XP = \frac{ab}{n} \quad (\text{ทำนองเดียวกัน})$$

$$(b+m)(b+XP) = (a+n)(a+QY)$$

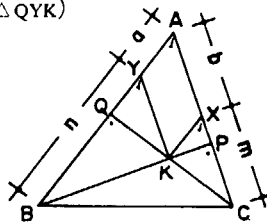
(B, Q, P, C concyclic และ ทบ. 75)

$$(b+m)\left(b + \frac{ab}{n}\right) = (a+n)\left(a + \frac{ab}{m}\right)$$

$$mb[bn + am + mn + ab] = na[am + bn + mn + ab]$$

$$\therefore mb = na$$

Q.E.D.



Ex 17 Given จาก Ex 16 ถ้า $na = mb$ แล้ว และ O เป็นจุด ศ.ก. วงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$

Prove $OX = OY$

Const ค่อย OX และ OY ไปจุดเส้นรอบวงทั้งสองข้าง

$$\text{Proof } AX \cdot XC = (r + OX)(r - OX) = r^2 - OX^2 = mb$$

(ทบ. 75)

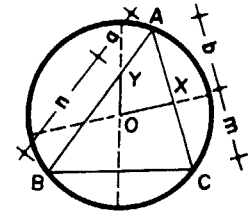
$$AY \cdot YB = (r + OY)(r - OY) = r^2 - OY^2 = na$$

(ทบ. 75)

$$r^2 - OX^2 = r^2 - OY^2 \quad (\because mb = na)$$

$$\therefore OX = OY$$

Q.E.D.



Ex 18 Given ABC เป็น $\triangle$ แนบในวงกลม X เป็นจุดหนึ่งบน

เส้นรอบวง XM, XN $\perp$ AB และ CA ที่ตัดออกไป

d เป็นเส้นผ่า ศ.ก.

Prove $MN:BC = XA:d$

Proof โยง XC, XB, XA และ MN

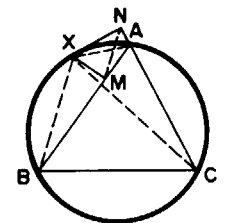
XMAN เป็น $\square$ แนบในวงกลมได้

$$\therefore \triangle XMN \sim \triangle XBC \text{ ได้ } XM:XB = MN:BC$$

จาก ทบ. 77 $XB \cdot XA = XM \cdot d$

$$\therefore MN:BC = XA:d$$

Q.E.D.



Ex 19 Given $AB = 10''$ $CD = 6''$ แบ่ง BC ออกเป็น 8 ส่วน

ลากเส้น// พบ AD

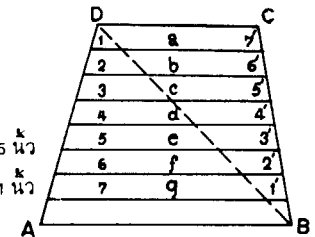
Find $a + b + c + d + e + f + g$

Proof เส้นที่ 1 $= \frac{1}{8}$ ($\triangle$ คล้าย)

$$1 + 2 + 3 + \dots = \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \dots\right) \times 10 = 35 \text{ นิ้ว}$$

$$1' + 2' + 3' = \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \dots\right) \times 6 = 21 \text{ นิ้ว}$$

$$a + b + c + d + e + f + g = 56 \text{ นิ้ว}$$



Ans.

Ex 25 Given $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ มี F เป็นจุดกึ่งกลาง AB , P เป็นจุดบน AB ทำให้ $AP^2 = AF \cdot AB$, $PD \parallel BC$ พบ AC ที่ D

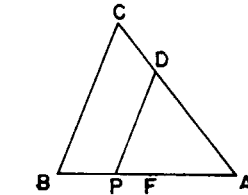
Prove $\triangle APD = \square BPDC$

Proof $\frac{\triangle APD}{\triangle ABC} = \frac{AP^2}{AB^2}$ ($\triangle APD \sim \triangle ABC$)

$$= \frac{AB \cdot AF}{AB^2} = \frac{AF}{AB} = \frac{1}{2}$$

ได้ $\square BPDC = \frac{1}{2} \triangle ABC$ ถ้วย

$\therefore \triangle APD = \square BPDC$



O.E.D.

Ex 26 Given $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ มุมฉาก มี $\angle C$ เป็นมุมฉาก

Prove $AB^2 = AC^2 + BC^2$

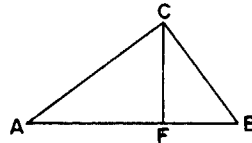
Proof ลาก $CF \perp AB$ ที่ F

$\triangle ABC \sim \triangle AFC \sim \triangle BFC$

$$\text{ได้ } \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AF} \therefore AC^2 = AB \cdot AF$$

ทำนองเดียวกัน $BC^2 = AB \cdot FB$

$$(1) + (2) \quad AC^2 + BC^2 = AB (AF + FB) = AB^2 \quad \text{Q.E.D.}$$



Ex 27 Given $ABCD$ เป็น $\square$ ด้านขนาน

$$\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FB} = \frac{CG}{GD} = \frac{AH}{HD} = n$$

Prove $\triangle EBF + \triangle CGF = \triangle DHG + \triangle AHE$

Find $\square EFGH : \square ABCD$

$$\text{Proof } \frac{\triangle AHE}{\triangle ABD} = \frac{AE^2}{AB^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \quad (\text{ทป. 72})$$

$$\frac{\triangle CGF}{\triangle CDB} = \frac{CF^2}{CB^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \quad (\text{ทป. 72})$$

$$\triangle AHE = \triangle CGF$$

$$\frac{\triangle DHG}{\triangle DAC} = \frac{DH^2}{DA^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \quad (\text{ทป. 72})$$

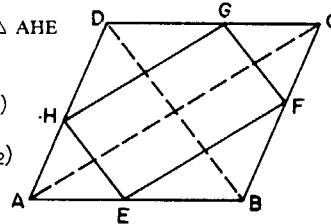
$$\frac{\triangle BEF}{\triangle ABC} = \frac{BF^2}{BC^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \quad (\text{ทป. 72})$$

$$\triangle DHG = \triangle BEF$$

$$\triangle EBF + \triangle CGF = \triangle DHG + \triangle AHE$$

$$\square ABCD - (\triangle AHE + \triangle CGF + \triangle DHG + \triangle BEF) = \frac{(n+1)^2 - (1+n^2)}{(n+1)^2} \square ABCD$$

$$\square EFGH : \square ABCD = 2n : (n+1)^2 \quad \text{Q.E.D.}$$



Ex 28 Given $ABCD$ เป็น $\square$ ด้านขนาน แต่ละด้านถูกแบ่งออกเป็น

3 ส่วนเท่าๆกัน

Find รูป 8 เหลี่ยม : รูป $\square$ ด้านขนาน

$$\text{Proof } \frac{\triangle AEN}{\triangle ABD} = \frac{AE^2}{(3AE)^2} = \frac{1}{9} \quad (\text{ทป. 72})$$

$$\frac{\triangle CKH}{\triangle CDB} = \frac{CH^2}{(3CH)^2} = \frac{1}{9}$$

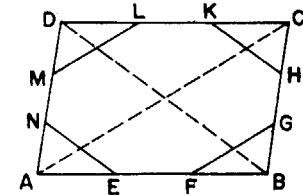
$$\frac{\triangle DML}{\triangle DAC} = \frac{DL^2}{(3DL)^2} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{\triangle FBG}{\triangle ABC} = \frac{BF^2}{(3BF)^2} = \frac{1}{9}$$

$$\square ABCD - (\triangle AEN + \triangle CKH + \triangle DML + \triangle FBG) = \frac{9 - (1+1)}{9} \square ABCD = \frac{7}{9}$$

รูป 8 เหลี่ยม : รูป $\square$ ด้านขนาน = 7 : 9

Ans.



Ex 29 Given รูป $ABCDE \sim$ รูป $LMNOP$ เส้นรอบรูปของรูป

$LMNOP = 24$ ซม. มี พ.ท. = 15 ซม.² $AB = 15$ ซม.

$BC = 21$ ซม. $CD = 9$ ซม. $DE = 12$ ซม. $EA = 15$ ซม.

Find พ.ท. รูป $ABCDE$

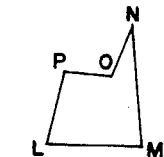
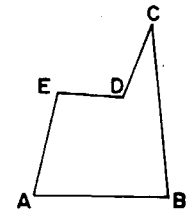
$$\text{Proof } \frac{LM}{AB} = \frac{LM + MN + NO + PO + PL}{AB + BC + CD + DE + EA}$$

$$LM = \frac{24 \times 15}{72} = 5 \text{ ซม.}$$

$$\frac{\text{รูป } ABCDE}{\text{รูป } LMNOP} = \frac{(15)^2}{(5)^2} \quad (\text{ทป. 73})$$

$$\therefore \text{รูป } ABCDE = 135 \text{ ซม.}^2$$

Ans.



Ex 30 Given เชื่อมจุดกึ่งกลางด้านของ $\triangle$ ไปจนได้ตัวรูป

Find $\triangle DEF : \triangle ABC$

Proof $ZX = \frac{1}{2} AC$ (เป็นเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้าน 2 ด้าน

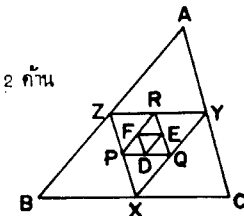
$$\text{ของ } \triangle) RQ = \frac{1}{2} ZX; FD = \frac{1}{2} RQ$$

$$\therefore FD = \frac{1}{8} AC$$

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{FD^2}{AC^2} = \frac{(\frac{1}{8} AC)^2}{AC^2} \quad (\text{ทป. 72})$$

$$\triangle DEF : \triangle ABC = 1 : 64$$

Ans.



Ex 31 Given ABCD เป็น □ ขนมหัศพัทธ์ E, F, G, H เป็นจุดสัมผัส

$4 DG = 3 GC$, รัศมีวงกลม = 7 นิ้ว, □ ABCD = 196 นิ้ว²

Find พ.ท. รูป P + รูป Q + รูป R + รูป S

$$\begin{aligned} \text{Proof } \frac{\triangle CGF}{\triangle CDB} &= \frac{CG^2}{CD^2} = \frac{16}{49} & \frac{\triangle AEH}{\triangle ABD} &= \frac{AE^2}{AB^2} = \frac{16}{49} \\ \frac{\triangle DHG}{\triangle DAC} &= \frac{DG^2}{DC^2} = \frac{9}{49} & \frac{\triangle BEF}{\triangle ABC} &= \frac{BE^2}{BA^2} = \frac{9}{49} \end{aligned}$$

$$\square ABCD - (\triangle CGF + \triangle AEH + \triangle DHG + \triangle BEF) = \frac{49 - (16 + 9)}{49} \square ABCD$$

$$\square EFGH = \frac{24}{49} \times 196 = 96 \text{ นิ้ว}^2$$

$$\begin{aligned} \text{พ.ท. รูป P + รูป Q + รูป R + รูป S} &= \left(\frac{22}{7} \times 7 \times 7\right) - 96 \\ &= 58 \text{ นิ้ว}^2 \quad \text{Ans.} \end{aligned}$$

Ex 35 Given AB เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ของวงกลมจุด C เป็นจุดสัมผัส BF

$\perp CF$, $AC = AD$, $DE \parallel BC$, $BC = 10$, $BF = 6$

Find □ BDEC

$$\begin{aligned} \text{Proof } \frac{\triangle CFB}{\triangle ABC} &= \frac{BC^2}{AB^2} & \frac{\triangle AED}{\triangle ABC} &= \frac{AD^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2} \quad (AC = AD) \\ \frac{\triangle ABC - \triangle AED}{\triangle ABC} &= \frac{AB^2 - AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2}{AB^2} \end{aligned}$$

$$\square BDEC = \frac{\triangle CFB}{\triangle ABC} \square ABC = \triangle CFB$$

$$\square BDEC = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24 \text{ นิ้ว}^2 \quad \text{Ans.}$$

Ex 32

Given ABCD เป็น □ จัตุรัส และ DCE เป็น △ ด้านเท่ายาว

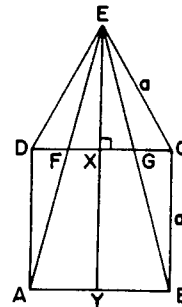
ด้านละ a

$$\text{Find } 1. \frac{FG}{CD} \quad 2. \frac{\triangle EFG}{\triangle EAB}$$

Const จาก E ลาก EX $\perp$ CD และต่อไปพบ AB ที่ Y โยง AE, BE

ตัด CD ที่ F, G ตามลำดับ

$$\begin{aligned} \text{Proof } \frac{FG}{AB} &= \frac{XE}{YE} = \frac{XE}{XE + XY} = \frac{a \sin 60^\circ}{a \sin 60^\circ + a} \\ \frac{FG}{CD} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2} = \sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) \\ \frac{\triangle EFG}{\triangle EAB} &= \frac{FG^2}{AB^2} = \sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) \\ &= 3(7 - 4\sqrt{3}) \quad \text{Ans.} \end{aligned}$$



Ans.

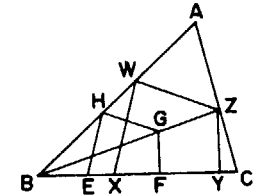
Ex 33 Given $GF \parallel ZY$, $ZW \parallel GH$, $WX \parallel HE$

$$BX:EX = 2(x+y):(x-y)$$

Find □ EFGH : □ XYZW

$$\begin{aligned} \text{Proof } \frac{BX}{BE} &= \frac{2(x+y)}{x+3y} & \frac{XW}{EH} &= \frac{BX}{BE} = \frac{2(x+y)}{x+3y} \\ \square EFGH &= \frac{[2(x+y)]^2}{(x+3y)^2} \quad (\text{ทป. 73}) \\ \square XYZW &= \frac{[2(x+y)]^2}{(x+3y)^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \square EFGH : \square XYZW = 4(x+y)^2 : (x+3y)^2 \quad \text{Ans.}$$



Ex 34 Given O เป็นจุด Orthocentre EG และ FH $\perp$ BC, BH:1 = HG:4 = GC:3

Find $\triangle BDF : \triangle AFDE : \triangle CED$

$$\begin{aligned} \text{Proof } \frac{\triangle BDF}{\triangle ABC} &= \frac{BF^2}{BC^2} \quad (\text{ทป. 72}) = \frac{BH \cdot BC}{BC \cdot BC} = \frac{BH}{BC} \\ (BF \text{ เป็นเส้นส่วนทวิกลางระหว่าง } BH \text{ และ } BC) \end{aligned}$$

$$\frac{\triangle CEG}{\triangle ABC} = \frac{CG}{BC} \quad (\text{ทำนองเดียวกัน})$$

$$\frac{\triangle ABC - (\triangle BDF + \triangle CEG)}{\triangle ABC} = \frac{BC - (BH + CG)}{BC}$$

$$\frac{\triangle AFDE}{\triangle ABC} = \frac{HG}{BC}$$

$$\therefore \triangle BDF : \triangle AFDG : \triangle CED = BH:HG:GC = 1:4:3$$

Ans.

Ex 35 Given ABCD เป็น □ ด้านขนาน P, Q, R, S เป็นจุดปลายเส้น

ที่ลากที่ลากจากจุดยอดมุม CD = a และ SR = b

Find □ PQRS : □ ABCD

Proof $\angle 1 = \angle 2$ (□ BCRQ concyclic)

$$\angle 3 = \angle 4 \quad (\text{ผล ทป. 40}) \quad \triangle ORQ \sim \triangle OCB$$

$$\triangle OSP \sim \triangle ODA \quad (\text{ทำนองเดียวกัน})$$

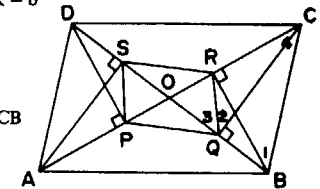
$$\frac{OS}{OQ} = \frac{OA}{OC} \quad (\triangle OSA \sim \triangle OQC) \quad \frac{OC}{OQ} = \frac{OA}{OS}$$

$$\frac{OD}{OP} = \frac{OC}{OQ} \quad \left(\frac{OD}{OP} = \frac{OA}{OS}\right) \quad \triangle OPQ \sim \triangle OAB \quad (\text{ทป. 64})$$

$$\frac{OB}{OP} = \frac{OA}{OQ} \quad (OD = OB, OC = OA) \quad \triangle ORS \sim \triangle ODC \quad (\text{ทำนองเดียวกัน})$$

$$\square PQRS \sim \square ABCD$$

$$\square PQRS : \square ABCD = b^2 : a^2$$



Ex 36 Given วงกลม 2 วงตัดกันที่ A, B PQ ⊥ AB ที่ B พบเส้นรอบวงของวงกลมทั้ง 2 ที่ P, Q AX, AY สัมผัสวงกลมทั้ง 2 ที่ A และพบวงกลมทั้ง 2 ที่ X, Y

Prove $\frac{\triangle ABX}{\triangle ABY} = \frac{PX^2}{QY^2}$

Const เชื่อม AP, PX, AQ, QY

Proof $\triangle ABX \sim \triangle ABY$

$$\therefore \frac{\triangle ABX}{\triangle ABY} = \frac{AX^2}{AY^2}$$

$\angle ABP = \angle ABQ = 90^\circ$ มุมฉาก

$\therefore$ AP, AQ เป็นเส้นผ่า ศ.ก. วงกลมทั้งสอง

$\therefore$ AP ⊥ AQ (รัศมี ⊥ เส้นสัมผัส)

$$\angle 1 + \angle 5 + \angle 8 = \angle 3 + \angle 6 + \angle 7 = 90^\circ$$

$$\text{แต่ } \angle 1 = \angle 2 = \angle 7; \angle 3 = \angle 4 = \angle 8$$

$$\therefore \angle 5 = \angle 6$$

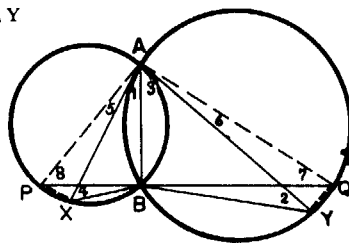
$$\angle APX = \angle XAY = \angle AQY$$

$$\therefore \triangle APX \sim \triangle AQY$$

$$\frac{PX^2}{QY^2} = \frac{AX^2}{AY^2}$$

$$\therefore \frac{\triangle ABX}{\triangle ABY} = \frac{PX^2}{QY^2}$$

Q.E.D.



EXERCISES

- ถ้าต่อครึ่งวงกลมของวงกลม 2 วงออกไปตัดกันที่จุด X แล้ว ลากเส้นตรงจาก X ไปตัดวงกลมหนึ่งที A และ B และสัมผัสอีกวงหนึ่งที C จงพิสูจน์ว่า XC เป็นเส้นสัมผัสของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle ABC$
- DEF เป็น $\triangle$ พิเศษของ $\triangle ABC$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABC : \triangle DEF = AB^2 : BD^2$ และรูป AFDC : $\triangle DBF = AD^2 : BD^2$
- X เป็นจุดหนึ่งบนเส้นผ่า ศ.ก. ลากครึ่งวงกลม YZ ⊥ PM ที่ X, N เป็นจุดบน $\widehat{YM}$ โดย PN ⊥ YZ ที่ K จงพิสูจน์ว่า $PY^2 = PK \cdot PN$
- X เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AC ของ $\triangle ABC$ และ Z เป็นจุดอยู่ระหว่าง X และ C ทำให้ AZ เป็นสัดส่วนครึ่งกลางระหว่าง AX และ AC จงพิสูจน์ว่าเส้นที่ลากผ่าน Z // BC จะแบ่งครึ่ง พ.ท. $\triangle ABC$
- ABCD เป็น $\square$ ใดๆ เส้นทแยงมุมตัดกันที่จุด O ลาก OX, OY // BC, CD ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $XY \cdot AC = AO \cdot BD$
- AB ถูกแบ่งที่ C ทำให้ $AB \cdot CB = AC^2$ ถ้าต่อ BA ถึง D ทำให้ $AD = AC$ จงพิสูจน์ว่า $DA \cdot DB = AB^2$
- AB ถูกแบ่งที่ C ทำให้ $AB \cdot CB = AC^2$ D เป็นจุดหนึ่งบน AC ทำให้ $CD = CB$ จงพิสูจน์ว่า $CA \cdot DA = CD^2$
- AB ถูกแบ่งที่ C ทำให้ $AB \cdot CB = AC^2$ ต่อ BA ถึง D ทำให้ $BD = 3 BC$ จงพิสูจน์ว่า $BC^2 = BA \cdot AD$ (ให้ $AB = a, AC = x$)
- C แบ่ง AB ทำให้ $AB \cdot CB = AC^2$ จงพิสูจน์ว่า $AB^2 + CB^2 = 3 AC^2$
- ถ้ารัศมีของวงกลมถูกแบ่งอย่างภาคตัดมุม จงพิสูจน์ว่าส่วนใหญ่ของรัศมีที่ถูกแบ่ง = ด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลม
- R เป็นรัศมีของวงกลมล้อม $\triangle ABC$ BD, CD ⊥ AB, AC จงพิสูจน์ว่า $AC \cdot BD + AB \cdot CD = 2 R \cdot BC$
- จงพิสูจน์ว่า พ.ท. ของ $\triangle$ คล้ายย่อมได้สัดส่วนกับจัตุรัสบนเส้นมัธยฐานที่สมนัยและรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบนั้น
- จงพิสูจน์ว่ารูป $\triangle$ คล้ายสองรูปย่อมแบ่งออกเป็นรูป $\triangle$ คล้ายกันหลายรูป รูปที่ก่อรูป
- เส้นสัมผัสวงกลมที่ A พบส่วนต่อของเส้นผ่า ศ.ก. BC ที่ D ลาก AL ⊥ BC จงพิสูจน์ว่า $PR \cdot DC - LB \cdot LC = DL^2$

15. เส้นตรงสองเส้น XAB, XCD ตัดวงกลมวงหนึ่งที่จุด A, B, C และ D จงพิสูจน์ว่า
 $XA \cdot XD : XB \cdot XC = AC^2 : BC^2$
16. จากจุดใด ๆ บนเส้นรอบวงของวงกลมที่ล้อม $\triangle$ ด้านเท่า ABC ลากเส้นตรงพหุคูณออก $\triangle$ ทั้ง 3 จงพิสูจน์ว่าเส้นที่ยาวที่สุดจะเท่ากับผลบวกของเส้นที่เหลือ
17. P เป็นจุดหนึ่งบนเส้นรอบวงที่มี AB เป็นเส้นผ่า ศ.ก. XPY เป็นคอร์ด // AB พบเส้นสัมผัสที่ A, B ที่จุด M, N จงพิสูจน์ว่า $PM \cdot PN = PX \cdot PY + AM^2$
18. O เป็นจุดห่างจากจุด ศ.ก. ของวงกลม รัศมี r, d เป็นเส้นตรงใดๆ ลากผ่านวงกลมตัดที่ A, B จงพิสูจน์ว่า $OA \cdot OB = r^2 - d^2$ หรือ $OA \cdot OB = d^2 - r^2$ เมื่อ O อยู่ในและนอกวงกลม
19. ABC เป็น $\triangle$ ใดๆ P และ Q เป็นจุดบนด้าน AB และ AC ตามลำดับ ให้ $AB = p \cdot AP$
 $AC = q \cdot AQ$ จงพิสูจน์ว่า $\frac{\triangle ABC}{\triangle APQ} = pq$
20. D, E เป็นจุดบนด้าน BC ของ $\triangle ABC$ โดยทำให้ $BC \cdot BD = BA^2$; $CB \cdot CE = CA^2$ จงพิสูจน์ว่า $AD^2 = AE^2 - BD \cdot EC$
21. ABC เป็น $\triangle$ ใดๆ D, E เป็นจุดใด ๆ บน BC, CA ตามลำดับ ให้ $AH \cdot AD = BH \cdot HE$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle BCE : \triangle ACD = BC^2 : CA^2$
22. AB, CD เป็น คอร์ด // กันคอร์ด LM พบ AB ที่ X, CD ที่ Y, $AX \cdot XB = CY \cdot YD$ จงพิสูจน์ว่าจุดกึ่งกลาง LM ห่างจาก AB, CD เท่ากัน
23. PQ เป็นคอร์ด C เป็นจุด ศ.ก. O เป็นจุดใด ๆ บน PQ ลาก $OA \perp OC$ พบวงกลมที่ A จงพิสูจน์ว่า $OP \cdot OQ = OA^2$
24. ABC เป็น $\triangle$ ด้านเท่าบรรจุในวงกลมแบ่งครึ่ง $\angle ABC$ พบเส้นรอบวงที่ X จงพิสูจน์ว่า $BX^2 = 4 AX^2$
25. ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง D เป็นจุดบน BC, DF และ DE // กับ CA และ BA พบ AB, AC ที่ F และ E ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า พ.ท. $\triangle DEF$ เป็นสัดส่วนทั่วกลาง ระหว่าง พ.ท. $\triangle DBF$ และ $\triangle DCE$
26. AB เป็นเส้นผ่า ศ.ก. AD, BE เป็นคอร์ดที่ตัดกันภายในวงกลมที่จุด C จงพิสูจน์ว่า $AC \cdot AD + BC \cdot BE = AB^2$
27. ใน $\triangle ABC$, $AB = AC$ เส้นแบ่งครึ่ง $\angle ABC$ พบ AC ที่ K ถ้าวางกลม ABK ตัด BC ที่จุด D จงพิสูจน์ว่า $AK = CD$
28. ABCD เป็น $\square$ ด้านไม่เท่าแนบในวงกลมต่อ BA, CD ไปพบกันที่ X ลาก $XE // BC$ ตัดส่วนต่อ AD ที่ E จงพิสูจน์ว่า $EX^2 = EA \cdot ED$

29. วงกลมสองวงตัดกันที่จุด B, C ลากเส้นสัมผัสร่วม AE, DF ต่อ BC ออกไปพบเส้นสัมผัสร่วมที่ G, H จงพิสูจน์ว่า $GH^2 = AE^2 + BC^2$
30. AB เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ของวงกลม O เป็นจุดแบ่ง AB ออกเป็น 3 ส่วนเท่าๆ กันและอยู่ใกล้ A จงพิสูจน์ว่าคอร์ดที่สั้นที่สุดซึ่งลากผ่านจุด O ยาวเท่ากับเส้นทแยงมุมของรูป $\square$ จัตุรัสที่สร้างขึ้นบนด้าน BO
31. ABC เป็น $\triangle$ ใดๆ X, Y, Z อยู่บนด้าน BC, CA, AB ตามลำดับ ทำให้ $5 BX = 2 BC$, $7 CY = 3 CA$ จงพิสูจน์ว่า $AZ = 2 ZB$
32. ABCD เป็น $\square$ ด้านขนาน P เป็นจุดบนเส้นทแยงมุม BD ลาก MPH, KPN // CD, CB พบ DA, AB, BC, CD ที่จุด M, N, H, K ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $PM \cdot PN = PH \cdot PK$
33. ABCD เป็น $\square$ กางหมี่ มีด้าน $AB // CD$, E เป็นจุดกึ่งกลางของ DA จงพิสูจน์ว่า $\triangle EAC : \square ABCD = 1:2$
34. $\triangle ABC$ มี $\angle ABC = 1$ มุมฉาก ลาก $BD \perp AC$, $3 AD = 5 DC$ จงพิสูจน์ว่า $3 AB^2 = 5 BC^2$
35. $\triangle ABC$ มี $\angle ABC = 1$ มุมฉาก ลาก $AD \perp BC$, $DE // AC$ จงพิสูจน์ว่า $BA^3 = BE \cdot BC^2$
36. ถ้าเส้นสัมผัสที่ A, B, C ของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle ABC$ พบกันตรงข้ามของ $\triangle$ ที่ D, E, F ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า D, E, F อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
37. ABC เป็น $\triangle$ ใดๆ D, E, F, G, H, K อยู่บนด้าน BC, CA, AB ตามลำดับ ทำให้แต่ละด้านถูกแบ่งออกเป็นส่วนๆ เท่าๆ กัน จงพิสูจน์ว่า $2 \triangle ABC = 3$ รูป DEFGHK
38. AB เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ของวงกลมถูกแบ่งออกเป็นส่วนๆ เท่ากันที่ C และ D, PCQ และ PDR เป็นคอร์ดของวงกลมต่อ QR และ AB ไปพบกันที่ N จงพิสูจน์ว่า $PC^2 : PD^2 = NR : NQ$
39. AKB เป็น $\triangle$ อยู่ในครึ่งวงกลม AB เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ต่อ AK, BK พบเส้นสัมผัสวงกลมที่ A, B ที่จุด M, N จงพิสูจน์ว่า $AN \cdot BM$ มีค่าคงที่
40. ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง ลาก $YAZ // BC$ ทำให้ $\angle AYB = \angle AZC = \angle BAC$ จงพิสูจน์ว่า $YA : AZ = AB^2 : AC^2$
41. AB เป็นคอร์ด C เป็นจุด ศ.ก. มีเส้นสัมผัสวงกลมที่ A, B พบกันที่ T ลาก CT ตัด AB ที่ N ลากคอร์ด PNQ จงพิสูจน์ว่า $PN \cdot NQ = CN \cdot NT$
42. AB เป็นคอร์ดของวงกลมมี C เป็นจุด ศ.ก. TA และ TB เป็นเส้นสัมผัสวงกลมลาก CT ตัด AB ที่ N จงพิสูจน์ว่า $CN \cdot NT = AN^2$ และ $CN \cdot CT = CA^2$
43. $\triangle ABC$ มี $\angle BAC = 1$ มุมฉาก จาก D ใน BC ลาก DE, DF $\perp AB, AC$ ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $BD \cdot DC = AE \cdot EB + AF \cdot FC$

44. PMN เป็น $\triangle$ หน้าจั่วในวงกลมโดย $PM = PN$, S เป็นจุดกึ่งกลางของ $\widehat{MN}$ อยู่บนเส้นตรงที่ P ถ้า O เป็นจุด ศ.ก. ของวงกลม K เป็นจุดบน $\widehat{PM}$ จงพิสูจน์ว่า $KS \cdot PM = (KM + KN) \cdot PO$
45. $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ ใดๆ D, E, F อยู่บนด้าน BC, CA, AB ของ $\triangle ABC$ ทำให้ $3BD = 2DC$, $2CE = EA$, $AF = FB$ โยง AD, BE และ CF ทำให้เกิด $\triangle XYZ$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle XYZ = \frac{1}{24} \triangle ABC$
46. $\square ABCD$ เป็น $\square$ ใดๆ จุด L, M; P, Q; R, S; X, Y อยู่บนด้าน AB, BC, CD, DA ตามลำดับทำให้ส่วนแบ่งครึ่งกลาง = $\frac{1}{2}$ ของส่วนแบ่งอีก 2 ส่วนของแต่ละด้าน จงพิสูจน์ว่า พ.ท. รูป LMPQRSXY: รูป ABCD = 17:25
47. $\square ABCD$ เป็น $\square$ ใดๆ O เป็นจุดใดๆ ภายใน ABCD โยง OA, OB, OC, OD บน OA ให้ $OP = \frac{2}{3} OA$ ลาก PQ, QR, RS//AB, BC, CD ตัด OB, OC, OD ที่ Q, R, S ตามลำดับ โยง SP จงพิสูจน์ว่า $OQ, OR, OS = \frac{2}{3} OB, OC, OD$ ตามลำดับและทุกด้านของ $\square PQRS = \frac{2}{3}$ ของด้านคู่ขนานของ $\square ABCD$
48. PQ เป็นเส้นตรง M, N แบ่ง PQ ทำให้ PM เป็นสัดส่วนตัวกลางระหว่าง PQ และ PN ถ้าลาก PR = PM โยง RQ, RM, RN จงพิสูจน์ว่า $QR:RN = QM:MN$
49. AB, CD เป็นคอร์ดที่ตัดกันที่ E, AC และ DB พบกันที่ F ถ้าวางกลมล้อมรอบ $\triangle AEC$ และ $\triangle BED$ จงพิสูจน์ว่าคอร์ดที่ร่วมผ่านจุด F
50. P เป็นจุดบนเส้นผ่า ศ.ก. AB, PM $\perp$ เส้นสัมผัสที่ตัดเส้นรอบวงของวงกลมที่ Q จงพิสูจน์ว่า $PM \cdot AB = AP \cdot PB + PQ^2$
51. จงพิสูจน์ว่าผลบวกจัตุรัสบนรัศมีและก้านหนึ่งของสี่เหลี่ยมด้านเท่าเท่ากับจัตุรัสบนก้านที่เหลี่ยมด้านเท่าแนบในวงกลม
52. แบ่งครึ่งมุมยอดของ $\triangle ABC$ อย่างภายนอก พบฐานที่ต่อออกไปที่ Y จงพิสูจน์ว่า $AB \cdot AC = YB \cdot YC - AY^2$
53. จากจุดยอดของ $\triangle ABC$ ลาก AD, AE มายังฐาน ทำให้ $\angle BAD = \angle CAE$ จงพิสูจน์ว่า $BD \cdot DE : CE \cdot CD = AB^2 : AC^2$
54. AB เป็นคอร์ดร่วมของวงกลม 2 วง P เป็นจุดหนึ่งทำให้เส้นสัมผัสจาก P ไปยังวงกลมทั้งสองเท่ากัน จงพิสูจน์ว่า P อยู่บนแนวเดียวกับ AB
55. D และ E เป็นจุดบนด้าน BC ของ $\triangle ABC$ โดยทำให้ $BC \cdot BD = BA^2$ และ $CB \cdot CE = CA^2$ จงพิสูจน์ว่า $AD^2 = AE^2 = BD \cdot EC$
56. A, B เป็นจุด 2 จุดบนเส้นรอบวง เส้นสัมผัสวงกลมที่ A และ B พบกันที่ T ถ้า P เป็น $\square$ ใดๆ บนเส้นรอบวงของวงกลม PL, PM, PN $\perp$ AT, BT, AB ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $PL \cdot PM = PN^2$

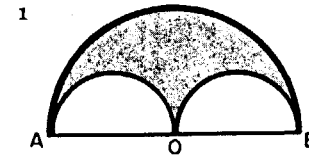
57. จุด D อยู่บนด้าน AB ของ $\triangle ABC$ และจุด E อยู่บน BC ที่ต่อไป ทำให้ $CE = AD$ ลาก DE ตัด AC ที่ F จงพิสูจน์ว่า $DF:FE = BC:AB$ (ใช้ Menelaus's Theorem)
58. AB, CD เป็นคอร์ดสองเส้นของวงกลมวงหนึ่ง LM เป็นคอร์ดอีกเส้นหนึ่งตัด AB ที่ X, CD ที่ Y โดยจุด X อยู่ใกล้ปลาย L และจุด Y อยู่ใกล้ปลาย M ถ้า $AX \cdot XB = CY \cdot YD$ จงพิสูจน์ว่า $LX = MY$
59. AB เป็นคอร์ดของวงกลมวงหนึ่ง มี X เป็นจุดแบ่งครึ่งคอร์ด AB, PXQ เป็นคอร์ดใดๆ บน PQ สร้างครึ่งวงกลม $XY \perp PQ$ พบเส้นรอบวงของครึ่งวงกลมที่ Y จงพิสูจน์ว่า $XY = XA$
60. D, E, F เป็นจุดบนด้าน BC, CA, AB ของ $\triangle ABC$ ทำให้ $BD = CE = AF = x$ ลากเส้นขนานผ่าน D, E, F พบด้าน CA, AB, BC ตามลำดับ ตัดกันเป็นรูป $\triangle PQR$ ถ้าด้าน BC, CA, AB ยาว a, b, c ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $\triangle PQR : \triangle ABC = \left[2 - \left(\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} \right) \right]^2 : 1$
61. ต่อด้าน BC, CA, AB ของ $\triangle ABC$ ออกไปถึงจุด A_1, B_1, C_1 ทำให้ $CA_1:BC = AB_1:AC = BC_1:AB = k$ ให้ A_2, B_2, C_2 เป็นจุดกึ่งกลาง AA_1, BB_1, CC_1 ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า
- $\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$ มีจุด Centroid ร่วมกัน
 - $\triangle A_2B_2C_2 : \triangle ABC = (1 + 3k + 3k^2) : 4$
62. ใน $\triangle$ ใดๆ จงพิสูจน์ว่า $abc = 4RS$ เมื่อ a, b, c เป็นด้านของ $\triangle$, R = รัศมีวงกลมล้อมรอบ $\triangle$, S = พื้นที่ $\triangle$
63. X เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$ เส้นสัมผัสวงกลมที่จุด A, B, C ตัดกันที่จุด D, E, F จงพิสูจน์ว่า ผลคูณของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด X ไปยัง AB, BC, CA = ผลคูณของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด X ไปยัง DE, EF, FD

อุทหรณ์

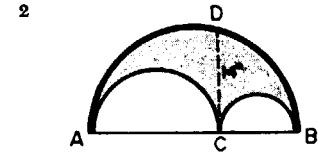
- อัตราส่วนพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมคล้าย 2 รูปย่อมเท่ากับอัตราส่วนจัตุรัสบนรัศมีวงกลมที่สร้างล้อมรอบ
- อัตราส่วนพื้นที่ของ $\triangle$ คล้ายย่อมเท่ากับอัตราส่วนจัตุรัสบนรัศมีวงกลมที่สร้างบรรจุภายในหรือล้อมภายนอก
- $\triangle ABC$ D, E แบ่ง AC, BC เป็น $\frac{CD}{DA} = \frac{2}{3}$ และ $CE = EB$ ดังนั้น $\frac{\square ABED}{\triangle ABC} = \frac{4}{5}$ และ

$$\frac{\triangle CDE}{\square ABED} = \frac{1}{3}$$

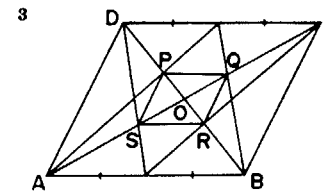
4. ถ้าโจทย์กำหนดความยาวเส้นรอบรูป $\triangle$ ให้ และด้านใดด้านหนึ่งของ $\triangle$ ให้พร้อมทั้งมุมตรงข้ามด้านนั้น เราสามารถหาค่ารัศมีวงกลมบรรจุภายใน $\triangle$ นี้ได้ ถ้าเราทราบค่า $\tan$ ของครึ่งหนึ่งของมุมนั้น
5. ถ้าโจทย์กำหนดเนื้อที่ $\triangle$ และอัตราส่วนของด้านทั้ง 3 เราไม่สามารถจะสร้าง $\triangle$ ได้เลย เพราะเราไม่รู้ความยาวด้านที่แท้จริงเหล่านั้น
6. ในการหาสัดส่วนตัวกลางของ a และ b สัดส่วนตัวนั้นจะมีขนาดอยู่ระหว่าง a กับ b เสมอ
7. ความยาวของรัศมีวงกลมที่แนบนอก $\triangle$ ตรงข้ามมุม $A (a = 60^\circ)$ มีเส้นรอบรูป = 200 นิ้ว และ พ.ท. = 600 ตร. นิ้ว
8. อัตราส่วนความยาวของด้านของ $\triangle$ ด้านเท่ากับ $\square$ จักรสี่เหลี่ยม พ.ท. เท่ากับ $2:4\sqrt{3}$ เสมอ
9. ผลคูณของความยาวด้านทั้ง 3 ของ $\triangle$ ใดๆ ย่อม = 4 เท่าของผลคูณของ พ.ท. $\triangle$ กับรัศมีวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle$ นั้น
10. ผลคูณของรัศมีวงกลมที่แนบนอกและแนบใน $\triangle$ ใดๆ ย่อมเท่ากับผลคูณความยาวทั้ง 3 ทารด้วย 2 เท่าของเส้นรอบรูป $\triangle$ นั้น



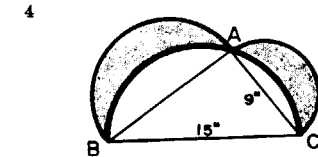
พื้นที่ส่วนแรเงา =



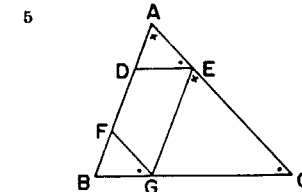
พื้นที่ส่วนแรเงา =



$\square PQRS : \square ABCD = \dots\dots\dots$

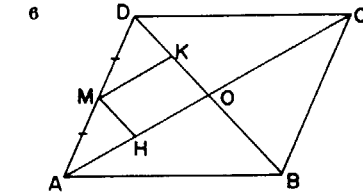


พื้นที่ส่วนแรเงา =

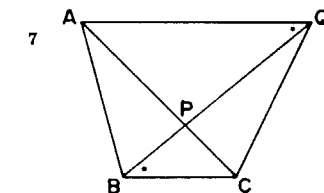


$AE : CE = 1 : 4$

$\square DEGF : \triangle ABC = \dots\dots\dots$

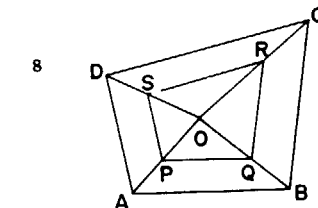


$\square MHOK : \square ABCD = \dots\dots\dots$



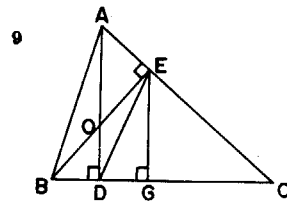
$3PC = CA$

$\triangle ABC : \triangle PCQ = \dots\dots\dots$



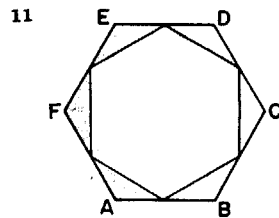
$OQ : BQ = K$

$\square PQRS : \square ABCD = \dots\dots\dots$

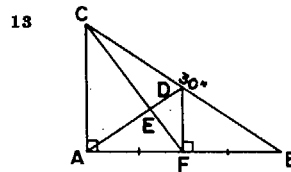


$$BG : GC = x : y$$

$$\triangle DCE : \triangle ABC = \dots\dots\dots$$

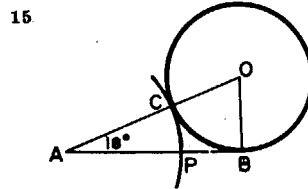


$$\text{พื้นที่ส่วนแรก : รูป } ABCDEF = \dots\dots\dots$$



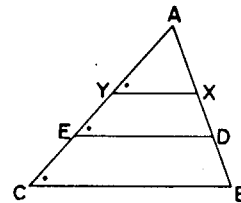
$$\frac{\square DEFB}{\triangle CDE} = \dots\dots\dots$$

$$\square DEFB : \triangle ABC = \dots\dots\dots$$



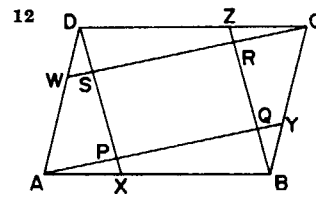
$$\text{พื้นที่ส่วนแรก : } \triangle OAB = \dots\dots\dots$$

10



$$XA : AD : AB = x : x\sqrt{2} : x\sqrt{3}$$

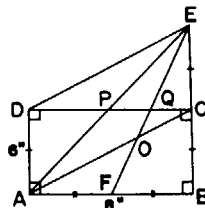
$$\triangle AXY : \square XYED : \square BDEC = \dots\dots\dots$$



$$\frac{AX}{AB} = \frac{BY}{BC} = \frac{CZ}{CD} = \frac{DW}{DA} = \frac{1}{n}$$

$$\square PQRS : \square ABCD = \dots\dots\dots$$

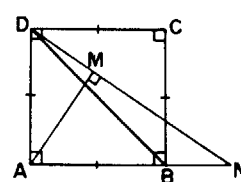
14



$$\triangle OAF : \square ABCD = \dots\dots\dots$$

$$\triangle OCQ = \dots\dots\dots, \triangle PAC = \dots\dots\dots$$

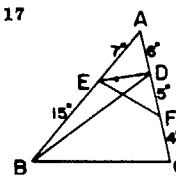
16



$$MD : ND = \dots\dots\dots$$

$$\text{ถ้า } AN = BD$$

17

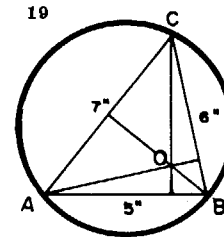


$$\triangle BED : \triangle DEF = \dots\dots\dots$$

$$\triangle DEF : \triangle ABC = \dots\dots\dots$$

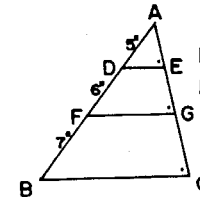
$$\square BCFE : \triangle ABC = \dots\dots\dots$$

19



$$AO : BO : CO = \dots\dots\dots$$

21

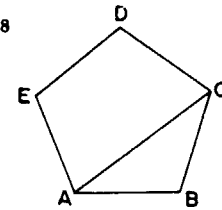


$$\square DEGF : \triangle ABC = \dots\dots\dots$$

$$\square BCGF : \triangle ABC = \dots\dots\dots$$

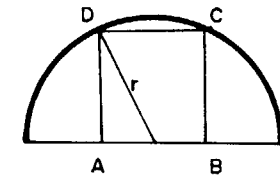
$$\square BCGF : \square DEGF = \dots\dots\dots$$

18



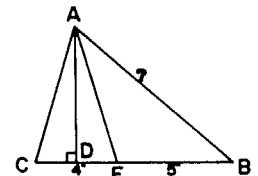
$$\square DEAC : \triangle ABCDE = \dots\dots\dots$$

20



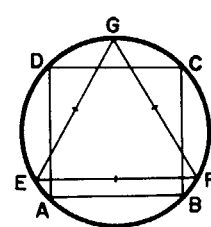
$$AB = \dots\dots\dots (\text{ในรูปของ } r)$$

22



$$BD : CD = \dots\dots\dots$$

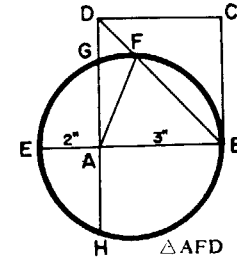
23



$$\square \text{จัตุรัส } ABCD : \triangle GFE = \dots\dots\dots$$

$$AB : EG = \dots\dots\dots$$

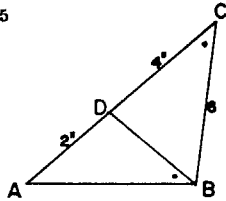
24



$$\triangle AFD : \triangle AFB = \dots\dots\dots$$

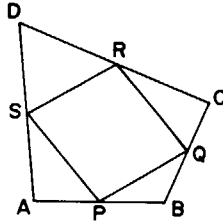
$$\triangle AFD : \square ABCD = \dots\dots\dots$$

25

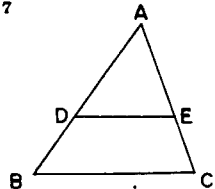


BD =

26

 $\square PQRS : \square ABCD = \dots\dots\dots$

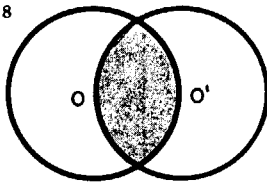
27



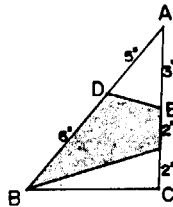
$$\triangle ABC = \frac{25}{9} \triangle ADE$$

เส้นรอบรูป $\triangle ADE = 30''$ เส้นรอบรูป $\triangle ABC = \dots\dots\dots$

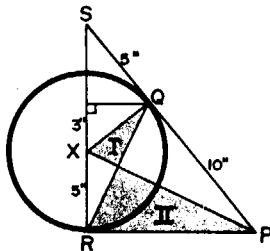
28



29



30

รัศมีวงกลมล้อมรอบ $\triangle QRS : \text{รัศมีวงกลมล้อมรอบ } \triangle PQR = \dots\dots\dots$

$$\frac{I}{\triangle PQR} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{I}{II} = \dots\dots\dots$$

$$\text{ถ้า } \angle RPS = 45^\circ$$

สามเหลี่ยมคล้าย

หลักการพิสูจน์ $\triangle$ คล้ายกัน

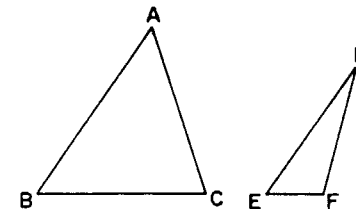
นิยาม รูปจะเป็น similar กันได้ต้องประกอบด้วยคุณสมบัติ 2 ประการ ดังนี้

- มุมสมนัยเท่ากันทุกมุม มุมต่อมุม
- ด้านสมนัยเป็นสัดส่วนกันทุกด้าน ด้านต่อด้าน

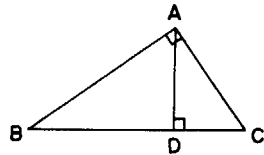
มุมสมนัยคืออยู่ตรงข้ามด้านที่สมนัย และด้านที่สมนัยคือด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่โตเท่ากัน
 “~” เครื่องหมาย “คล้าย”

เช่น $\triangle ABC$ คล้ายกับ $\triangle DEF$ เขียนว่า $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ การพิสูจน์ $\triangle$ 2 รูปคล้ายกัน

- พยายามพิสูจน์ให้ $\triangle$ 2 รูปนั้น มีมุมเท่ากันทั้ง 3 มุม แล้วอ้างด้านสมนัยเป็นสัดส่วนกันทั้ง 3 ด้าน ด้านต่อด้าน (ทบท. 62) แล้วอ้างว่า $\triangle$ 2 รูปนี้คล้ายกัน
- พยายามพิสูจน์ให้ $\triangle$ 2 รูปนั้นมีด้านสมนัยกันเป็นสัดส่วนกันทั้ง 3 ด้าน ด้านต่อด้าน แล้วอ้างมุมสมนัยเท่ากันทุกมุม มุมต่อมุม (ทบท. 63) แล้วอ้าง $\triangle$ 2 รูปนี้คล้ายกัน
- พยายามพิสูจน์ให้ $\triangle$ 2 รูปนั้นมีมุมเท่ากัน และพิสูจน์ให้ด้านที่ประกอบมุมที่เท่ากันนั้นเป็นสัดส่วนกัน $\triangle$ 2 รูปนี้จะคล้ายกัน (ทบท. 64)
- พยายามพิสูจน์ให้ $\triangle$ 2 รูปนั้นมีมุมที่ 1 โตเท่ากัน ด้านประกอบมุมที่ 2 เป็นสัดส่วนกัน และ มุมที่ 3 รวมกัน $\neq 2$ มุมฉาก อ้างได้ว่า $\triangle$ 2 รูปนี้คล้ายกัน (ทบท. 65)

จัดรูป จาก $\angle B = \angle E$ และ $AB : AC = ED : FD$ ถ้าได้ $\angle C + \angle F \neq 2$ มุมฉาก เราจะได้ว่า $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

5. ถ้าเป็น $\triangle$ มุมฉาก พยายามพิสูจน์ให้มีเส้นทั้งฉากจากมุมฉากมายังด้านตรงข้ามหรือถ้ามีเส้นทั้งฉาก ก็พยายามพิสูจน์ให้มีมุมฉาก เพื่ออ้างว่า เส้นทั้งฉากจะแบ่ง $\triangle$ เดิมออกเป็น $\triangle$ ใหม่ 2 รูปที่คล้ายกัน และคล้ายกับ $\triangle$ รูปเดิมด้วย

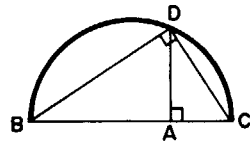


จากรูป ถ้าได้ $\angle A$ เป็นมุมฉาก และ AD เป็นเส้นทั้งฉาก
เราจะได้ว่า $\triangle ABC \sim \triangle ABD \sim \triangle ADC$

หลักการพิสูจน์ด้านคูณกันหรือเป็นสัดส่วนกัน

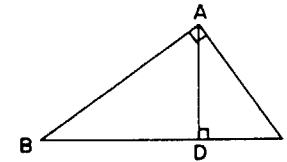
(ตั้งแต่ ทบ. 60 - 66)

1. พยายามให้มีเส้นขนาน เพื่อจะตัดด้านออกได้เป็นสัดส่วนกัน แต่ด้านนั้นต้องมีในโจทย์บ้างเพื่อที่จะได้ใช้ไปสัมพันธ์กับสัดส่วนอื่น เพื่อให้ได้สิ่งที่โจทย์ต้องการ หรืออาจจะได้สิ่งที่โจทย์ต้องการเลย (ทบ. 60)
2. พยายามให้มีเส้นแบ่งครึ่งมุม เพื่อจะตัดฐานได้สัดส่วนกับด้านประกอบมุมยอดด้านเหล่านี้นี้ก็ต้องมีในโจทย์บ้างหรือมีทั้งหมด (ทบ. 61)
3. พยายามให้เป็นสัดส่วนตัวกลาง (Mean proportion) (บทสร้าง 38)



จากรูป ถ้า AD เป็นสัดส่วนตัวกลางระหว่าง AB และ AC
เราจะได้ว่า: $AB:AD = AD:AC$

4. ถ้าเป็นด้านของ $\triangle$ ที่คล้ายกัน ใช้หลักการพิสูจน์ $\triangle$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย เข้ามาช่วย คือ พยายามพิสูจน์ให้ $\triangle$ เป็น similar หรือมีมุมเท่ากัน (equiangular) แล้วเลือกด้านที่เป็นสมนัย และเป็นด้านที่มีในโจทย์ ใช้พิสูจน์บ้างหรือทั้งหมดมาเข้าสัดส่วนกัน (ทบ. 62, 63, 64, 65, 66)



เช่น ทบ. 66

จากรูป $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ มุมฉาก

จาก $\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$

จะได้ 4.1 จาก $\triangle DBA \sim \triangle ABC$

$$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}, AB^2 = BC \cdot BD$$

4.2 จาก $\triangle DAC \sim \triangle ABC$

$$\therefore \frac{CD}{AC} = \frac{AC}{BC}, AC^2 = CD \cdot BC$$

4.3 จาก $\triangle DBA \sim \triangle DAC$

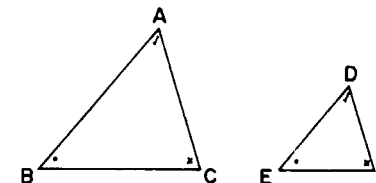
$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}, AD^2 = BD \cdot CD$$

N.B. ในการหาคำที่เข้าสัดส่วนกันจาก $\triangle$ คล้ายนี้ เพื่อความสะดวกควรเขียนเครื่องหมาย $\sqrt{\cdot}$, $\times$, 0 ... ฯลฯ ลงไปยังมุมที่โตเท่ากัน เพื่อให้หาคำที่สมนัยกันได้ง่ายขึ้นและเร็ว

เช่น $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ มี $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

$$\text{จะได้ } \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$$

จะเห็นว่า เพียงดูคำที่ตรงข้ามมุมที่มีเท่าของแต่ละ $\triangle$ ก็จะได้สัดส่วนที่ต้องการ

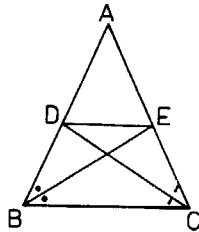


Ex I

Given $\triangle ABC$ มี BE, CD เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $\angle B, \angle C$ และ

DE // BC

Prove ABC เป็น $\triangle$ หนึ่งจั่ว



Proof จาก BE เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมได้ $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC}$ (1)

„ CD „ $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DB}$ (2)

แต่ DE // BC $\therefore$ เราจะได้ $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ (3)

จาก (3) $\therefore$ (1) = (2) $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BC}$

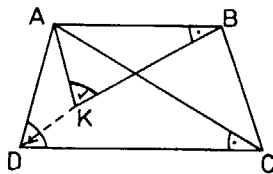
$\therefore AB = AC$

นั่นคือ ABC เป็น $\triangle$ หนึ่งจั่ว Q.E.D.

Ex II

Given จากรูป $\angle ABK = \angle ACD$ และ $\angle AKB = \angle ADC$

Prove $\triangle ACB \sim \triangle ADK$



Proof $\angle ABK = \angle ACD, \angle AKB = \angle ADC$ (กำหนดให้)

$\therefore \angle DAC = \angle KAB$ (เป็นมุมที่เหลือใน $\triangle$ ทั้ง 2)

$\therefore \angle DAK = \angle CAB$ (หัก $\angle KAC$ ออก)

$\frac{AB}{AC} = \frac{AK}{AD}$ (ทบท. 62)

$\frac{AD}{AC} = \frac{AK}{AB}$ (Alternando)

$\therefore \triangle ACB \sim \triangle ADK$ (ทบท. 64) Q.E.D.

Ex III

Given $\triangle ABC$ มี $AB:AC = 2:1$ เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในและภายนอก $\angle A$ พบ BC และ BC ที่ต่อออกไปที่ D และ E ตามลำดับ

Prove $DE = \frac{4}{3} BC$

Proof $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EC} = 2$ (ทบท. 61)

$\frac{BD + DC}{DC} = \frac{2 + 1}{1} = \frac{BC}{DC} = 3$ (1)

$DC = \frac{BC}{3}$

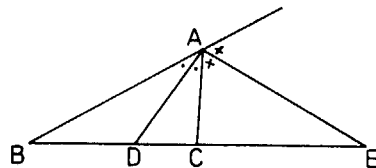
$\frac{BE - EC}{EC} = \frac{2 - 1}{1} \therefore \frac{BC}{EC} = 1$

$EC = BC$ (2)

(1) + (2); $DC + EC = \frac{BC}{3} + BC$

$DE = \frac{4}{3} BC$

Q.E.D.



Ex IV

Given เส้นตรง ABCD มี $AB:BC = AD:CD$

Prove $\frac{2}{AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}$

Proof จาก $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}, \frac{BC}{AB} = \frac{CD}{AD}$

$\therefore BC = AC - AB, CD = AD - AC$

แทนค่า $\therefore \frac{AC - AB}{AB} = \frac{AD - AC}{AD}$

$\frac{AC}{AB} - 1 = 1 - \frac{AC}{AD}$

$\frac{AC}{AB} + \frac{AC}{AD} = 2 \therefore \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AC}$ Q.E.D.

Ex V

Given $\triangle ABC$ และ $\triangle PQR$ มีด้าน $PR \perp BC$ ที่ D, $RQ \perp AB$ ที่ E, $QP \perp AC$ ที่ F

Prove $\triangle PQR \sim \triangle ABC$

Proof $\angle AEQ + \angle AFQ = 180^\circ$ (ต่างก็เป็นมุมฉาก)

$\therefore \angle EAF + \angle EQF = 180^\circ$ ($\square AEQF$ concyclic)

$\angle EQF + \angle FQR = 180^\circ$ (มุมประชิดบนเส้นตรงเดียวกัน)

$\therefore \angle EAF + \angle EQF = \angle EQF + \angle FQR$ (ต่าง = 180°)

$\therefore \angle EAF = \angle FQR$ (หักมุมที่เท่ากันออก)

ในทำนองเดียวกันจะได้ $\angle ABC = \angle QRP, \angle ACB = \angle QPR$

$\therefore \triangle ABC$ และ $\triangle PQR$ มีมุมเท่ากันทุกมุม

$\therefore \frac{PQ}{AC} = \frac{PR}{BC} = \frac{QR}{AB}$ (ทบท. 62)

$\therefore \triangle PQR \sim \triangle ABC$ (จากข้อ 7 และ 8) Q.E.D.

Ex VI

Given AD เป็นเส้นมัธยฐานของ $\triangle ABC$ เส้นแบ่งครึ่งมุมภายใน $\angle ADB$ และ $\angle ADC$ พบ AB และ AC ที่ X และ Y ตามลำดับ โยง XY ตัด AD ที่ Z

Prove Z เป็นจุดกึ่งกลางของ XY

Proof $\frac{AD}{DB} = \frac{AX}{XB}, \frac{AD}{DC} = \frac{AY}{YC}$ (ทบท. 61)

$\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC} \therefore XY \parallel BC$ (DB = DC และบทกลับ 60)

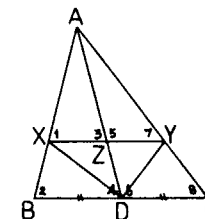
$\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4, \angle XAZ = \angle BAD, \angle 5 = \angle 6, \angle 7 = \angle 8, \angle ZAY = \angle DAC$ (ทบท. 14)

$\therefore \frac{AX}{AB} = \frac{AZ}{AD} = \frac{XZ}{BD}, \frac{AZ}{AD} = \frac{ZY}{DC}$ (ทบท. 62)

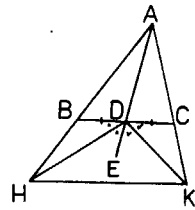
$\therefore XZ = ZY$ (BD = DC)

$\therefore Z$ เป็นจุดกึ่งกลางของ XY

Q.E.D.



Ex VII



Given D เป็นจุดกึ่งกลางของ BC DH, DK เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle BDE$, $\angle CDE$

Prove $BC \parallel HK$

Proof $\frac{AD}{BD} = \frac{AH}{HB}$ (เส้นแบ่งครึ่งมุม DH)

$\frac{AD}{DC} = \frac{AK}{CK}$ (....., DK)

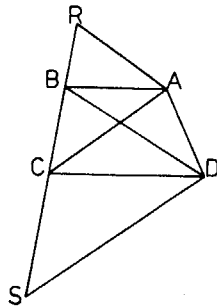
$\therefore BD = DC$

$\therefore \frac{AH}{HB} = \frac{AK}{CK}, \frac{AB}{HB} = \frac{AC}{CK}$ (Dividendo)

นั่นคือ $BC \parallel HK$

Q.E.D.

Ex VIII



Given ABCD เป็น $\square$ คางหมู โยง BD, AC ลาก $AR \parallel BD$
 $DS \parallel AC$ พบ BC ที่ตัดออกไปที่ R, S

Prove $AB \cdot BS = DC \cdot CR$

Proof $\triangle ABR \sim \triangle DCB$

$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{AR}{DB}$ (1)

$\therefore \triangle DSB \sim \triangle ACR$

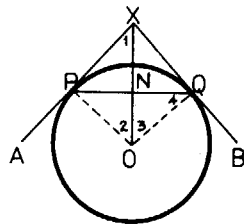
$\therefore \frac{DB}{AR} = \frac{BS}{CR}$ นั่นคือ $\frac{AR}{DB} = \frac{CR}{BS}$ (2)

(1) = (2); $\frac{AB}{DC} = \frac{CR}{BS}$

จะได้ $AB \cdot BS = CR \cdot DC$

Q.E.D.

Ex IX



Given PQ เป็นคอร์ดของวงกลม AX, BX เป็นเส้นสัมผัสวงกลม
 ที่จุด P, Q พบกันที่จุด X OX ตัด PQ ที่ จุด N

Prove $ON \cdot OX = OP^2$

Const ลาก OP, OQ

Proof $\because \square POQX$ concyclic $\therefore \angle 1 = \angle 4$

$\therefore \angle 2 = \angle 3$ (ทบท. 47)

จะได้ $\angle XPO = \angle ONQ$

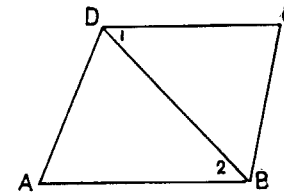
$\triangle OPX \sim \triangle ONQ$

จะได้ $\frac{OP}{ON} = \frac{OX}{OQ}$

$\therefore OP^2 = ON \cdot OX$ ($OP = OQ$)

Q.E.D.

Ex X



Given ABCD เป็น $\square$ คางหมูรูปหนึ่ง มีด้าน $AB \parallel DC$
 $BD^2 = AB \cdot DC$

Prove $\triangle ABD \sim \triangle BDC$ และ $AD^2 : BC^2 = AB : DC$

Proof $\therefore \angle 1 = \angle 2$ ($AB \parallel CD$)

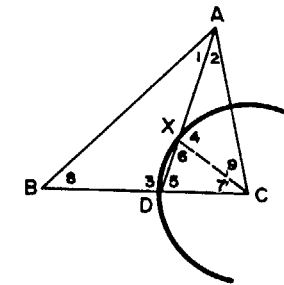
$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{BD}$

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle BDC$ จะได้ว่า $\frac{AD}{BC} = \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{CD}$

$\therefore \frac{AD^2}{BC^2} = \frac{AB}{BD} \cdot \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{CD}$

Q.E.D.

Ex XI



Given เส้นแบ่งครึ่งมุม A ของ $\triangle ABC$ พบฐาน BC ที่ D
 วงกลมวงหนึ่งรัศมี CD และมี C เป็นจุด ศ.ก. จะพบ
 AD ที่ X

Prove $AB \cdot AX = AC \cdot AD$

Proof $\therefore \angle 1 = \angle 2$ และ $XC = CD \therefore \angle 5 = \angle 6$

จะได้ $\angle 3 = \angle 6 + \angle 7$; $\angle 4 = \angle 5 + \angle 7$

$\therefore \angle 3 = \angle 4$

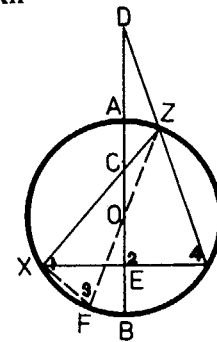
$\therefore$ ใน $\triangle ABD$, $\triangle AXC$ จะได้ $\angle 8 = \angle 9$

นั่นคือ $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AX}$

$\therefore AB \cdot AX = AD \cdot AC$

Q.E.D.

Ex XII



Given XY เป็นคอร์ดของวงกลมวงหนึ่ง มีรัศมี r มีเส้นผ่า
 ศ.ก. $AB \perp XY$ ที่ E Z เป็นจุดใดๆ บนเส้นรอบวง
 โยง XZ ตัด AB ที่ C ต่ YZ ไปพบกับ BA ที่ตัดออกไป
 ไปที่ D

Find OC, OD

Const โยง OZ ลากเส้นผ่า ศ.ก. ZOF โยง XF

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ และ $\angle 3 = \angle 4$

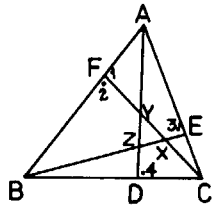
$\therefore$ ใน $\triangle DEY$, $\triangle ZXF$ จะได้ $\angle XZF = \angle EDY$

นั่นคือ OZ เป็นเส้นสัมผัสวงกลมล้อมรอบ $\triangle DCZ$

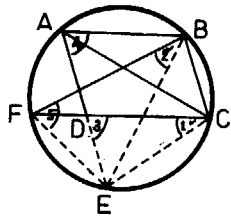
$\therefore OC \cdot OD = OZ^2 = r^2$

Ans

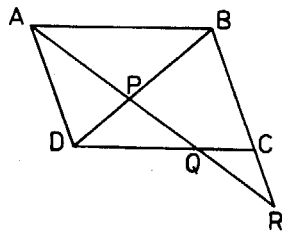
Ex XIII



Ex XIV



Ex XV



Given $\triangle ABC$ มี D, E, F เป็นจุดบน BC, AC, AB ลาก BE, CF ตัดกันที่ X ลาก AD ตัด CF, BE ที่ Y, Z ทำให้

$$\angle 2 = \angle 3 = \angle 4$$

Prove $YZ:BC = ZX:CA = XY:AB$

Proof $\because \angle 2 = \angle 3$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle 1 + \angle 3 = 2 \text{ มุมฉาก}$$

จะได้ $\square AFXE$ concyclic และ $\angle YXZ = \angle BAC$

ทำนองเดียวกัน $\angle XZY = \angle ACB$, $\angle XYZ = \angle ABC$

นั่นคือ $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$

$$\therefore YZ:BC = ZX:CA = XY:AB \quad \text{Q.E.D.}$$

Given ABCD เป็น $\square$ ด้านขนาน มีวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$ ท่อ AD, CD พบเส้นรอบวงที่ E, F โยง BE, BF, EF

Prove $ED:EF = EC:EB$

Proof $\angle 1 = \angle 2$

$$\angle 3 = \angle 4 \quad (DC \parallel AB)$$

$$\text{แต่ } \angle 4 = \angle 5$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 5$$

$\therefore \angle CED = \angle BEF$ (มุมภายในที่เหลื่อของรูป $\triangle$)

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle BEF$$

นั่นคือ $ED:EF = EC:EB$

Q.E.D.

Given ABCD เป็น $\square$ ด้านขนาน โยง BD, ลาก AR ตัด BD, CD, BC, ที่ P, Q, R

Prove $PQ:PR = PD^2:PB^2$

Proof $\because \triangle APD \sim \triangle PBR$

$$\text{จะได้ } \frac{PD}{PB} = \frac{AP}{PR} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ทำนองเดียวกันจาก $\triangle PQD$, $\triangle ABP$

$$\text{จะได้ } \frac{PD}{PB} = \frac{PQ}{AP} \quad \dots\dots\dots (2)$$

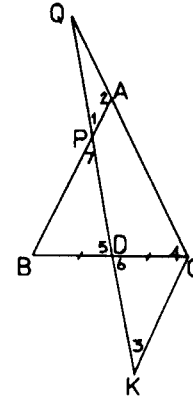
$$(1) \times (2); \frac{PD^2}{PB^2} = \frac{AP}{PR} \cdot \frac{PQ}{AP}$$

$$\therefore PQ:PR = PD^2:PB^2 \quad \text{Q.E.D.}$$

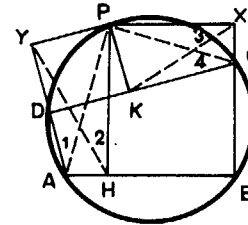
สามเหลี่ยมคล้าย

สามเหลี่ยมคล้าย

Ex XVI



Ex XVII



Given $\triangle ABC$ มี $AB = AC$ D เป็นจุดกึ่งกลาง BC Q เป็นจุดบน CA ที่ตัดออกไป ลาก QD ตัด AC ที่ P ลาก CK $\parallel AB$ พบ QD ที่ตัดออกไปที่ K

Prove $AP:PB = QP:QK$

Proof $\because \triangle QAP \sim \triangle QKC$ ($\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$, $\angle Q$ เป็นมุมร่วม)

$$\therefore \frac{QP}{QK} = \frac{AP}{KC} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\because \angle 5 = \angle 6, \angle 7 = \angle 3, BD = DC$$

$$\therefore \triangle BPD \cong \triangle DCK$$

$$\text{จะได้ } PB = CK \quad \dots\dots\dots (2)$$

แทน (2) ลงใน (1) $\therefore AP:PB = QP:QK$

Q.E.D.

Given $PH \perp AB$, $PX \perp BC$, $PK \perp DC$, $PY \perp AD$

Prove $PH.PK = PX.PY$

Const โยง HY, AP, KX, PC

Proof $\because \angle AHP + \angle AYP = 2 \text{ มุมฉาก}$

$$\therefore \square AHPY \text{ concyclic}$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 \text{ และ } \angle YAH + \angle YPH = 2 \text{ มุมฉาก}$$

ทำนองเดียวกัน $\angle 3 = \angle 4$ และ $\angle KCX + \angle KPX = 2 \text{ มุมฉาก}$

$$\therefore \angle 1 = \angle 4 \quad \therefore \angle 2 = \angle 3$$

$$\therefore \square ABCD \text{ concyclic} \quad \therefore \angle YAH = \angle KCX$$

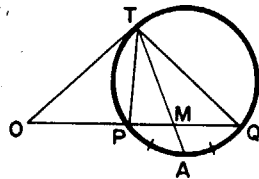
$$\text{จะได้ } \angle HPY = \angle KPX \quad \therefore \angle HYP = \angle PKX$$

$$\therefore \triangle HPY \sim \triangle KPX$$

$$\therefore \frac{PH}{PY} = \frac{PK}{PX} \text{ นั่นคือ } PH.PK = PX.PY$$

Q.E.D.

Ex XVIII



Given OT เป็นเส้นสัมผัส A เป็นจุดกึ่งกลางของ PQ เล็ก

Prove $QM^2 : MP^2 = OQ : OP$

Proof A เป็นจุดกึ่งกลาง PQ เล็ก $\therefore MT$ แบ่งครึ่ง $\angle QTP$

จะได้ $QM : MP = QT : TP$ (1)

ใน $\triangle OTP$, $\triangle OQT$ มีมุมเท่ากัน $\therefore \frac{OQ}{OT} = \frac{OT}{TP}$

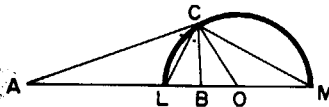
(1)²; $QM^2 : MP^2 = QT^2 : TP^2$

แต่ $QT^2 : TP^2 = \frac{OQ}{OT} \cdot \frac{OT}{OP} = OQ : OP$

นั่นคือ $QM^2 : MP^2 = OQ : OP$

Q.E.D.

Ex XIX



Given L, M แบ่ง AB อย่างภายใน และภายนอกออกเป็น

อัตราส่วน m:n O เป็นจุดกึ่งกลาง LM

Prove $OA \cdot OB = OL^2$

Proof จาก L แบ่ง AB อย่างภายใน คือ CL แบ่งครึ่ง $\angle ACB$

$\angle OLC = \angle OCL$, $\angle ACL = \angle BCL$

$\angle OLC - \angle ACL = \angle OCL - \angle BCL$

$\angle CAL = \angle OCB$

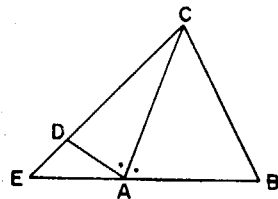
$\therefore OC$ เป็นสัมผัสวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$

$\therefore OC^2 = OB \cdot OA$

$\therefore OL^2 = OB \cdot OA$ ($OC = OL$)

Q.E.D.

Ex XX



Given ABCD เป็น $\square$ ใดๆ มี $\angle B = \angle C$ และ AC

เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle BAD$

Prove $AD : DC = AE : BE$

Proof $\triangle ADE$ มี DE เป็นฐาน AC เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม

ยกค้อย่างภายนอก

$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{DC}{EC}$, $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EC}$ (ท. 61)

$\therefore \angle B = \angle C$ ได้ $BE = EC$

$\therefore \frac{AD}{DC} = \frac{AE}{BE}$; $AD : DC = AE : BE$

Q.E.D.

Ex XXI Given วงกลม 3 วงเท่ากัน AFC เป็นเส้นตรงที่ลากผ่านจุด ศ.ก. F, C $BC \perp AB$ บนเส้น

รอบวงที่ B

Find ความยาวของ DE ในเทอมของ BC

Const โยง DF, EF และกำหนดให้ BC ยาว r ลาก MF // BC

Proof $\triangle ABC \sim \triangle AMF \therefore \frac{BC}{AC} = \frac{MF}{AF}$

$\therefore \frac{r}{5r} = \frac{MF}{3r}$

$\therefore MF = \frac{3}{5}r$

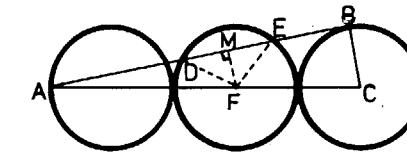
$\therefore DM^2 = DF^2 - MF^2$

$\therefore DM = \sqrt{r^2 - \left(\frac{3}{5}r\right)^2} = \frac{4}{5}r$

$\therefore DE = \frac{4}{5}r \times 2 = \frac{8}{5}r$

$\therefore DE$ ยาวเป็น $\frac{8}{5}$ เท่าของ BC

Ans



Ex XXII Given AD แบ่งครึ่ง $\angle A$ ของ $\triangle ABC$ พบ BC ที่ D วงกลม ADC ตัด AB ที่ Q

วงกลม ADB ตัด AC ที่ R

Prove $BQ = CR = \frac{BC^2}{AB+AC}$

Const โยง QD

Proof $\therefore \square AQDC$ concyclic

$\therefore \angle QDB = \angle QAC$ และ $\angle QBD = \angle ABC$

$\therefore \angle BQD = \angle BCA$ (มุมที่เห็ดของ $\triangle$)

$\therefore \triangle BQD, \triangle BAC$ มีมุมเท่ากันทุกมุม

$\therefore \frac{BQ}{BC} = \frac{BD}{AB}$

ทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\frac{CR}{BC} = \frac{DR}{AB} = \frac{CD}{AC}$

$\therefore \widehat{BD} = \widehat{DR} \therefore BD = DR$

$\therefore \frac{BQ}{BC} = \frac{CR}{BC} = \frac{CD}{AC}$

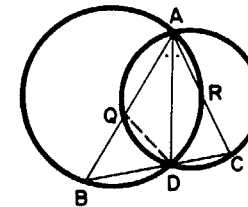
$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}, \frac{AB}{AB} = \frac{DC}{AC}$

$\therefore \frac{BQ}{BC} = \frac{CR}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$

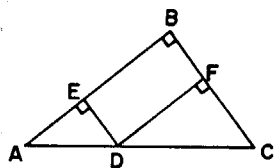
$\therefore \frac{BQ}{BC} = \frac{CR}{BC} = \frac{BD+CD}{AB+AC} = \frac{BC}{AB+AC}$

$\therefore BQ = CR = \frac{BC^2}{AB+AC}$

$\therefore AD$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมของ $\triangle ABC$



Ex XXIII



Given $\triangle ABC$ มี $\angle B = 90^\circ$ มี $DE, DF \perp AB, BC$

Prove $AD \cdot DC = AE \cdot EB + BF \cdot FC$

Proof $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BC}$$

$$\therefore ED = BF \therefore \text{จะได้ } \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{BF}{BC} \dots (1)$$

ทำนองเดียวกันจาก $\triangle CDF, \triangle ABC$ จะได้ว่า

$$\frac{DC}{AC} = \frac{FD}{AB} = \frac{FC}{BC}$$

$$\therefore FD = BE \therefore \text{จะได้ } \frac{DC}{AC} = \frac{EB}{AB} = \frac{FC}{BC} \dots (2)$$

$$(1) \times (2); \therefore \frac{AD \cdot DC}{AC^2} = \frac{AE \cdot EB}{AB^2} = \frac{BF \cdot FC}{BC^2}$$

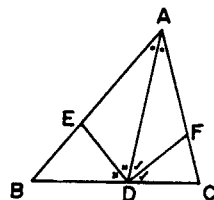
$$\text{จากกฎอัตราส่วน จะได้ } \frac{AD \cdot DC}{AC^2} = \frac{AE \cdot EB + BF \cdot FC}{AB^2 + BC^2}$$

$$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\therefore AD \cdot DC = AE \cdot EB + BF \cdot FC$$

Q.E.D.

Ex XXIV



Given AD, DE, DF เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle A, \angle ADB$ และ $\angle ADC$

$$\text{Prove } \frac{1}{AE} - \frac{1}{AF} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AC}$$

Proof จาก AD เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle A$ ได้

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \dots (1)$$

$$\text{ทำนองเดียวกันได้ } \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EB} \dots (2)$$

$$\text{ " " " } \frac{AD}{DC} = \frac{AF}{FC} \dots (3)$$

$$(3) \div (2); \frac{AD}{DC} \times \frac{BD}{AD} = \frac{AF}{FC} \times \frac{BE}{AE}$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AF \cdot BE}{FC \cdot AE} \dots (4)$$

$$(4) - (1); \frac{AF \cdot BE}{AC \cdot AE} = \frac{AB}{AC} - \frac{BE}{AE \cdot AB} = \frac{CF}{AF \cdot AC}$$

$$\text{จากรูป } BE = AB - AE, FC = AC - AF$$

$$\text{แทนค่า } \frac{AB - AE}{AE \cdot AB} = \frac{AC - AF}{AF \cdot AC}$$

$$\frac{AB}{AE \cdot AB} - \frac{AE}{AE \cdot AB} = \frac{AC}{AF \cdot AC} - \frac{AF}{AF \cdot AC}$$

$$\therefore \frac{1}{AE} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{AF} - \frac{1}{AC} \therefore \frac{1}{AE} - \frac{1}{AF} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AC}$$

Q.E.D.

Ex XXV Given $ABCD$ เป็น $\square$ ด้านขนาน, $AD \parallel EF \parallel BC, AB \parallel GH \parallel DC$

$$\text{Prove } 1. \frac{OA}{OC} = \frac{AE}{EB} \cdot \frac{AG}{GD}$$

2. ถ้าต่อ FG ออกไปจะตัด CA ที่จุด O ด้วย

Const ต่อ DA พบ OH ที่ I

Proof $\therefore \triangle OAI, \triangle OHC$ มีมุมเท่ากันทุกมุม

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{AI}{HC} \dots (1)$$

แต่ $\triangle AIE, \triangle HBE$ มีมุมเท่ากันทุกมุม

$$\therefore \frac{AI}{BH} = \frac{AE}{EB}$$

$$\therefore AI = \frac{AE}{EB} \cdot BH$$

$$\text{แทนค่า } AI \text{ ใน (1); } \frac{OA}{OC} = \frac{AE}{EB} \cdot \frac{BH}{HC}$$

แต่ $BH = AG, HC = GD$

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{AE}{EB} \cdot \frac{AG}{GD} \dots (2)$$

ให้ FG ต่อออกไปพบ CA ที่จุด O'

พิสูจน์ในทำนองเดียวกันจะได้ $\frac{O'A}{O'C} = \frac{AE}{EB} \cdot \frac{AG}{GD}$

$$\therefore \frac{O'A}{O'C} = \frac{OA}{OC}$$

$$\frac{O'A}{O'C - O'A} = \frac{OA}{OC - OA}$$

$$\frac{O'A}{AC} = \frac{OA}{AC}$$

$$\therefore O'A = OA$$

นั่นคือจุด O' ทับจุด $O \therefore$ ถ้าต่อ FG ออกไปจะตัด CA ที่จุด O ด้วย $\dots (2)$

Q.E.D.

Ex XXVI

Given $\angle BAL = \angle LAM = \angle MAC, BL = MC$

Prove ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

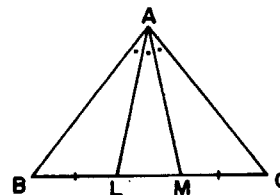
Proof AL เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle BAM$ ได้

$$\frac{AB}{AM} = \frac{BL}{LM} \dots (1)$$

$$\text{ทำนองเดียวกันได้ } \frac{AL}{AC} = \frac{LM}{MC} \dots (2)$$

$$(1) \times (2); \frac{AB}{AM} \times \frac{AL}{AC} = \frac{BL}{LM} \times \frac{LM}{MC}$$

$$\text{แต่ } BL = MC \therefore \frac{AB}{AM} \times \frac{AL}{AC} = \frac{1}{1}$$



$$\therefore \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AL} \dots\dots\dots (3)$$

$$\therefore \angle BAL = \angle MAC \therefore \angle BAL + \angle LAM = \angle LAM + \angle MAC$$

$$\text{ได้ } \angle BAM = \angle LAC \dots\dots\dots (4)$$

จาก (3) และ (4) เราได้ $\triangle BAM \sim \triangle LAC$ (ทบ. 64)

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BM}{LC}$$

$$\therefore BL + LM = LM + MC \therefore BM = LC$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{1}{1} \text{ คือ } AB = AC \therefore ABC \text{ เป็น } \triangle \text{ หน้าจั่ว}$$

Q.E.D.

EXERCISES

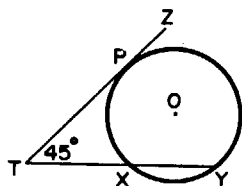
จากรูป: 1. X เป็นจุดกึ่งกลางของ TY

$$2. TY = 2'', \angle ZTX = 45^\circ$$

3. วงกลมผ่านจุด X, Y

4. TZ สัมผัสวงกลมที่ P

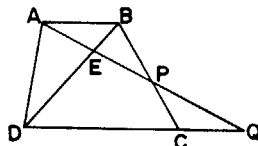
จงหา รัศมีของวงกลม



2. จากรูป: ถ้า $AB = 6 \text{ cm}$, $AQ = 20 \text{ cm}$,

$$AE = 5 \text{ cm}, CD = 9 \text{ cm}$$

จงหา QD และ AP

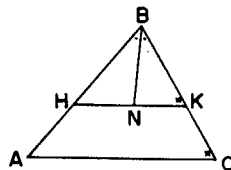


3. จากรูป: 1. $HK \parallel AC$ BN แบ่งครึ่ง $\angle ABC$

$$2. AH = 6 \text{ cm}, HK = 15 \text{ cm},$$

$$KC = 4 \text{ cm}$$

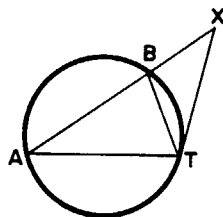
จงหา HN



4. จากรูป: XT สัมผัสวงกลมที่ T, $AB = 8''$

$$AT = 6'', BT = 5''$$

จงหา XT



5. จากรูป: 1. ถ้า $AK = 3'', KB = 2'',$

$$AB = 4'', DC = 1\frac{1}{2}''$$

จงหา KC, KD

2. ถ้า $AK = 5'', BK = 4'', AC = 7''$

จงหา BD

3. ถ้า $PA = 9'', PB = 8'', AB = 4''$

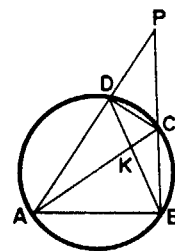
$$PC = 3''$$

จงหา PD, CD

4. ถ้า $PA = 9'', PB = 8'', AC = 6'',$

$$PC = 4''$$

จงหา BD, PD



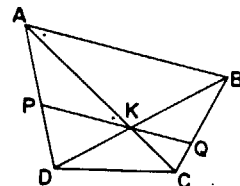
6. จากรูป: 1. $AB \parallel PQ$

$$2. AP = 10 \text{ cm}, PD = 6 \text{ cm},$$

$$PK = 9 \text{ cm}, KQ = 4 \text{ cm},$$

$$BQ = 9 \text{ cm}$$

จงหา AB, BC

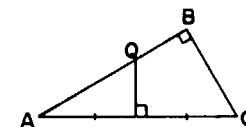


7. จากรูป: $\angle B = 90^\circ$, $AB = 5'', BC = 2''$

เส้นแบ่งครึ่งทั้งจากกับ AC พบ AB

ที่ Q

จงหา AQ



8. จากรูป: 1. PQ เป็นคอร์ดของวงกลมยาว

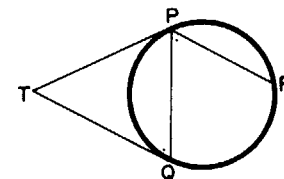
$$5 \text{ cm}$$

2. PT, PQ เป็นเส้นสัมผัส

3. $PR \parallel TQ$

$$4. PT = 8 \text{ cm}$$

จงหา PR



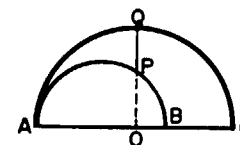
9. จากรูป: 1. วงกลมทั้ง 2 สัมผัสกันที่ A

2. ส่วนที่ต่อกันของ PQ $\perp$ AB

ที่จุดกึ่งกลางของวงกลมใหญ่

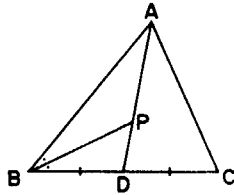
$$3. PQ = 3'', BC = 5''$$

จงหา รัศมีของวงกลมทั้ง 2



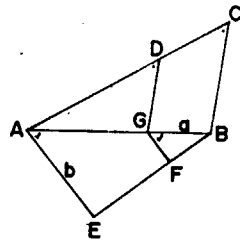
10. จากรูป: AD เป็นเส้นมัธยฐาน BP แบ่งครึ่ง
 $\angle ABC$, $BC = 16$ cm, $CA = 11$ cm,
 $AB = 13$ cm

จงหา DP



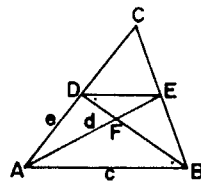
11. จากรูป: $GD \parallel BC$, $GF \parallel AE$
 $AG = 12$ ", $GD = 6$ ", $BC = 9$ "
 $GF = 2$ "

จงหา a, b



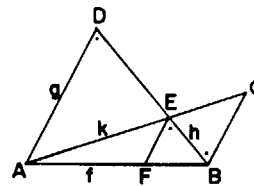
12. จากรูป: $DE \parallel AB$
 $DE = 4$ ", $DF = 2$ ", $EF = 3$ ",
 $FB = 5$ "

จงหา c, d, e



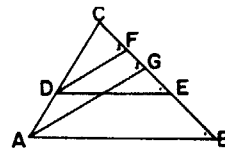
13. จากรูป: $AD \parallel EF \parallel CB$
 $EF = 4$ ", $EC = 7$ ", $CB = 6$ "
 $FB = 5$ "

จงหา f, g, h, k



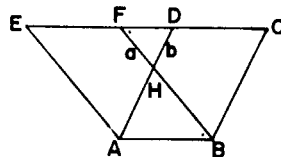
14. จากรูป: $DF \parallel AG$, $DE \parallel AB$
 $DC = 8$ ", $CG = 6$ ", $DE = 10$ ",
 $AB = 15$ "

จงหา AD, FG



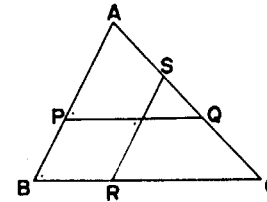
15. จากรูป: $DC \parallel AB$, $AD \parallel BC$, $AE \parallel FB$
 $AE = 14$ ", $AB = 10$ ", $BC = 12$ ",
 $FD = 6$ "

จงหา a, b



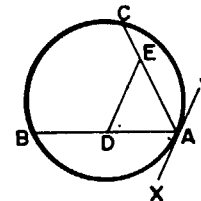
16. จากรูป: $PQ \parallel BC$, $RS \parallel AB$
 $\frac{BP}{AP} = \frac{3}{5}$, $\frac{BR}{RC} = \frac{1}{3}$

จงหา AS : SQ : QC = ?

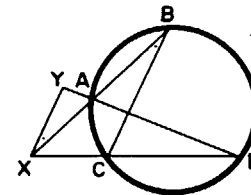


17. จากรูป: XY เป็นเส้นสัมผัสของวงกลมที่ A
 $DE \parallel XY$

จงหา $\frac{AB}{AE}$



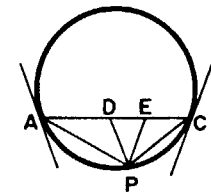
18. จากรูป: $XY \parallel BC$
 จงหา $YX^2 = ?$



19. จากรูป: PD, PE // กับเส้นสัมผัสวงกลมที่ A, C

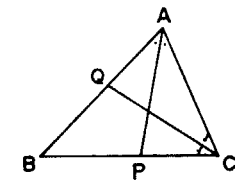
จงหา $\triangle APD \sim \dots\dots\dots$

$PD^2 = ?$

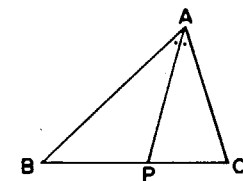


20. จากรูป: เส้นรอบรูป $\triangle ABC = 45$ "
 AP, CQ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม
 $BP = 9$ นิ้ว, $CP = 8$ นิ้ว

จงหา AQ



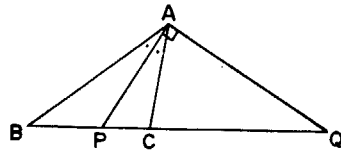
21. จากรูป: AP เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $\angle BAC$
 $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$
 จงหา BP (ในเทอมของ a, b, c)



22. จากรูป: $BP = 5$, $PC = 3$

AP, AQ เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle BAC$
อย่างภายในและภายนอก

จงหา CQ

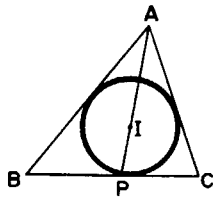


23. จากรูป: I เป็นจุดศ.ก. ของวงกลมที่แนบใน

$\triangle ABC$

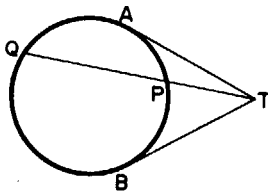
$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

จงหา AI:IP



24. จากรูป: TA, TB เป็นเส้นสัมผัสวงกลม

จงหา $AP:PQ = \dots = \dots$

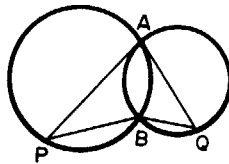


สามเหลี่ยมคล้าย

25. จากรูป: AP, AQ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม

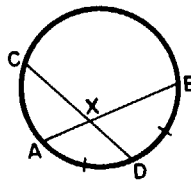
ABQ, ABP

จงหา BP:BQ = ?



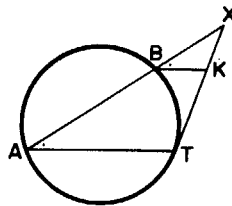
26. จากรูป: $\widehat{AD} = \widehat{DB}$

จงหา CX:CD = ?



27. จากรูป: BK // AT พบเส้นสัมผัส XT ที่ K

จงหา XK:XT = ?



สามเหลี่ยมคล้าย

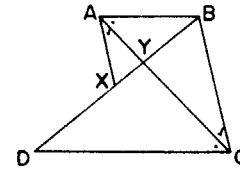
28. จากรูป: $AB \parallel DC$, $BC \parallel AX$

$AB = 3$, $DC = 5$

จงหา $BX:BD = ?$

$BX:XD = ?$

$DX:XY = ?$

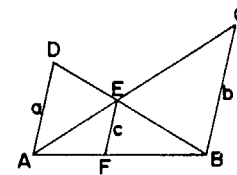


29. จากรูป: $AD \parallel EF \parallel BC$

$AD = a$, $EF = c$, $CB = b$

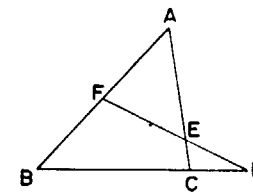
จงหา $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = ?$

$\frac{BD}{DE} \cdot \frac{CE}{AC} \cdot \frac{AF}{FB} = ?$



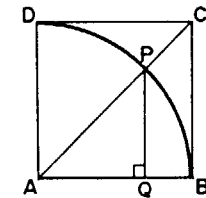
30. จากรูป

จงหา $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \dots$



31. จากรูป: ABCD เป็น $\square$ จักรวัด PQ $\perp$ AB

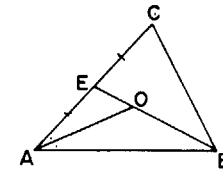
จงหา $\frac{AO}{AB} = ?$



32. จากรูป: $AB = 3$, $AE = 1$, $\angle A = 60^\circ$

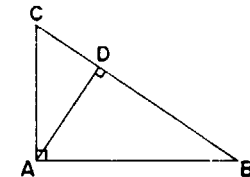
AO เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle A$

จงหา BC และ BO

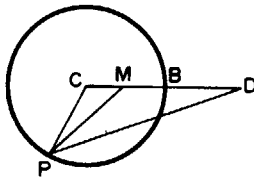


33. จากรูป: $\triangle ABC$ มี $\angle A = 90^\circ$ มี AD เป็น

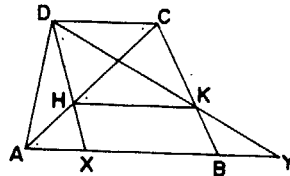
ส่วนสูง
จงหา $\frac{AB^2}{BD} = ?$



34. จากรูป: CB เป็นรัศมีของวงกลมซึ่งมี C เป็น
จุด ศ.ก. ต่อ CB ไปถึง D ให้ CB
= BD และ M เป็นจุดกึ่งกลาง CB
จงหา $\angle CPM = ?$



35. จากรูป: $AB \parallel DC$, $HK \parallel AB$
จงหา $AB = ?$



1. AB, AC เป็นคอรัค 2 เส้นของวงกลมวงหนึ่ง, AP เป็นคอรัคอีกเส้นหนึ่งของวงกลม ซึ่งตัด BC ที่ Q จงพิสูจน์ว่า $AP \cdot AQ = AB^2$
2. AB เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ของวงกลม O; เส้นสัมผัสวงกลมที่ A, B พบเส้นสัมผัสวงกลม อีกเส้นหนึ่งที่ H, K จงพิสูจน์ว่า $AH \cdot BK = AO^2$
3. ใน $\triangle ABC$, $\angle BAC = 90^\circ$; $ABXY$, $ACZW$ เป็น $\square$ จักรวชิภายนอก $\triangle ABC$ ถ้า BZ , CX ตัด AC, AB ที่ K, H จงพิสูจน์ว่า $AH = AK$
4. P, Q เป็นจุดบนคอรัค AB, AC ของวงกลม ABC ซึ่งมี O เป็นจุด ศ.ก. ตามลำดับ ซึ่งทำให้ $AP \cdot PB = AQ \cdot QC$ จงพิสูจน์ว่า $OP = OQ$
5. APB, AQB เป็นวงกลม 2 วง ถ้า PAQ เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง จงพิสูจน์ว่า BP: PQ เท่ากับอัตราส่วนของรัศมี
6. P, Q เป็นจุดบนด้าน AB, AD ของ $\square$ มุมฉาก ABCD, PQ ตัด AC ที่ N; PQ, CD ถูกตัดออกไปพบกันที่ R, $AB = 7$, $AD = 5$, $AP = 4$, $AQ = 3$ จงหา
 - 1) ความยาวของ DR, QR
 - 2) อัตราส่วน AN:NC และ PN:NQ
7. $AX \parallel BY$, ต่อ AY, BX ตัดกันที่ P เส้นตรงที่ลากผ่าน P ขนานกับ XA พบ AB ที่ Q จงพิสูจน์ว่า
 - 1) $AX \cdot BQ = BY \cdot AQ$
 - 2) $\frac{1}{AX} + \frac{1}{BY} = \frac{1}{PQ}$

8. D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB ของ $\triangle ABC$ $\square$ จักรวชิบน AC และ BC มีเส้นทแยงมุม ตัดกันที่ P, Q ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $DP = DQ$
9. วงกลม ABP, PDC ตัดกันที่ P และ APD, BPC เป็นเส้นตรงเดียวกัน ถ้ารัศมี วงกลม ABP เป็น 2 เท่าของรัศมีวงกลม PDC จงพิสูจน์ว่า $AB = 2CD$
10. ABCD เป็น $\square$ ขนบเขี่ยกปูน เส้นตรงที่ผ่าน A ตัด BC, DC ที่ตัดออกไปที่จุด P, Q ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $AP: AQ = CP: CQ$
11. CA, CB เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด A, B P เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม ลาก PX, PY, PO ทั้งจากกับ CA, CB และ AB ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $PO^2 = PX \cdot PY$
12. $\triangle ABC$ แนบในวงกลม เส้นตรงที่ลากผ่าน C ขนานกับ AB พบเส้นสัมผัสวงกลม ที่ B ที่จุด E เส้นตรงที่ลากผ่าน B ขนานกับ AC พบเส้นสัมผัสวงกลมที่ C ที่จุด F จงพิสูจน์ว่า $BC^2 = BE \cdot CF$
13. $\square$ ทางหมู่ ABCD มี $AD \parallel BC$ และสั้นกว่า BC E, F เป็นจุดบน AB, CD ตามลำดับ ทำให้ $\frac{AB}{AE} = \frac{DC}{CF} = k$ ต่อ DA ออกไปถึง G ทำให้ $\frac{DG}{DA} = k$ ต่อ AD ถึง H ทำให้ $AH = BC$ จง พิสูจน์ว่า $\frac{GH}{EF} = k$
14. AD, BE เป็นส่วนสูงของ $\triangle ABC$ $BL \perp DE$ ที่ L ถ้า $BL^2 = LD \cdot LE$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว
15. D, F เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC, AB ของ $\triangle ABC$ E เป็นจุดบน AC ทำให้ $AE = 3EC$, G เป็นจุดบน EF ทำให้ $FG = 2GE$ จงพิสูจน์ว่า $GD \parallel AB$
16. PA, PB สัมผัสวงกลม O ที่ A, B AB ตัดที่ OP ที่ C เส้นพาดวง PXY ตัดวงกลมที่ X, Y จงพิสูจน์ว่า
 1. O, C, X, Y concyclic
 2. CX แบ่งครึ่งมุมภายนอก $\angle XCY$
17. วงกลม 2 วงมีจุด ศ.ก. A และ B สัมผัสกันภายนอกที่ C PQ เป็นเส้นสัมผัสร่วมตรง พบ ส่วนต่อของ AB ที่ S T เป็นจุดบน PQ ทำให้ $PT: TQ = PS: SQ$ จงพิสูจน์ว่า
 - 1) $\triangle PAT \sim \triangle QBT$
 - 2) TC แบ่งครึ่ง $\angle ATB$
18. $\square$ ABCD แนบในวงกลม ต่อ AB, DC พบกันที่ E BC, AD ออกไปพบกันที่ F P เป็นจุดบน EF ทำให้ $\angle PAF = \angle FEC$ จงพิสูจน์ว่า
 - 1) $FP \cdot FE =$ จักรวชิบนเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด F
 - 2) $EP \cdot EF =$ จักรวชิบนเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด E

19. AB เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ของวงกลม C เป็นจุดใด ๆ บนเส้นรอบวงของวงกลม เส้นสัมผัสวงกลมที่ C พบเส้นสัมผัสวงกลมที่ A, B ที่จุด P, Q ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า AP, BQ มีค่าคงที่
20. จุด A, B, C คือเป็นเส้นตรงเดียวกัน O เป็นจุดภายนอกเส้นตรง AC ต่อ OA, OB, OC ถึงจุด A', B', C' ตามลำดับ ทำให้ $OA.OA' = OB.OB' = OC.OC'$ จงพิสูจน์ว่า $\square OA'B'C'$ concyclic
21. A, B เป็นจุด ศ.ก. ของวงกลม 2 วงไม่ตัดกัน AP, BQ เป็นรัศมีของวงกลมทั้ง 2 และขนานกัน จงพิสูจน์ว่า PQ ผ่านจุดครึ่งจุดหนึ่งในจำนวนจุดครึ่ง 2 จุด ซึ่งอยู่บนเส้นตรง AB
- ถ้าวงกลมอีกวงหนึ่งสัมผัส 2 วงกลมแรกที่ D, E จงพิสูจน์ว่า DE ผ่านจุดครึ่งนี้ด้วย
22. $\triangle ABC$ มี $AE \parallel BD$ พบเส้นที่ลากผ่านจุด C ที่ D, E ตามลำดับ ลาก $EF \parallel BC$ พบ AB ที่ F จงพิสูจน์ว่า $FD \parallel AC$
23. $\triangle ABC$ มี $\angle A = 120^\circ$ เส้นแบ่งครึ่ง $\angle A$ พบ BC ที่ D, $AC = 4 AB$ จงหา $AB:AD$
24. ถ้า AP, BQ เป็นรัศมีที่ขนานกันของวงกลม A, B ซึ่งสัมผัสกันภายนอก จงพิสูจน์ว่า PQ ผ่านจุดครึ่งจุดใดจุดหนึ่งใน 2 จุดซึ่งอยู่บนเส้นตรง AB หรือ AB ที่ต่อออกไป
- ถ้าวงกลมอีกวงหนึ่งสัมผัสภายนอกกับวงกลม 2 วงนี้ จงพิสูจน์ว่าเส้นต่อจุดสัมผัสทั้ง 2 ผ่านจุดครึ่งนี้ด้วย
25. $\triangle ABC$ มี $\angle C = 1$ มุมจาก O เป็นจุดกึ่งกลาง AB เส้นแบ่งครึ่ง $\angle ACB$ อย่างภายในและภายนอกพบ AB และส่วนต่อของ AB ที่จุด X, Y ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า OC สัมผัสวงกลม XCY
26. วงกลมจุด ศ.ก. O มีรัศมี OA ครึ่ง A เป็นจุดกึ่งกลางส่วนโค้ง PQ C เป็นจุดใด ๆ บน OA ภายนอกหรือภายในวงกลม ต่อ QC พบเส้นรอบวงที่ R, PR ตัด OA หรือส่วนต่อของ OA ที่ D จงพิสูจน์ว่า $\triangle ORC \sim \triangle ODR$
- ถ้าจุด A, C ครึ่ง P, Q เคลื่อนที่ได้ จงพิสูจน์ว่า จุด P ครึ่งด้วย
27. $\triangle ABC$ มี $AB = AC$, D เป็นจุดกึ่งกลาง BC เส้นตรงที่ลากผ่าน D พบ AB ที่ P และส่วนต่อของ AC ที่ Q จงพิสูจน์ว่า $AB(AP + AQ) = 2 AP.AQ$
28. E, F เป็นจุดบนด้าน AC, AB ของ $\triangle ABC$ ทำให้ $AE = k.EC$ และ $AF = k.FB$ โดย $k =$ ค่าคงที่ D เป็นจุดใด ๆ บน BC ต่อ DE, DF ออกไปพบเส้นที่ลากผ่าน A ขนานกับ BC ที่ L, M ตามลำดับ ต่อ MB, LC ออกไปตัดกันที่ P จงพิสูจน์ว่า
1. จุด P อยู่บนเส้นตรง AD ที่ต่อออกไป
 2. $MB = (k-1) BP$
29. AD, BE, CF เป็นส่วนสูงของ $\triangle ABC$ ถ้า P, Q เป็นจุดกึ่งกลาง BE, CF ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $\triangle PQD \sim \triangle ABC$
30. $\triangle ABC$ แนบในวงกลมมี $AB > AC$ และ $\angle A = 90^\circ$ ลาก $CD \perp AB$ ที่ D เลยไปตัดเส้นรอบวงที่ E ทำให้ $\widehat{EB} = \widehat{CE}$ และ $BD:DA = m:n$ จงหาอัตราส่วนด้านทั้งสามของ $\triangle$

31. $\triangle ABC$ แนบในวงกลม เส้นตรงเส้นหนึ่งลากผ่าน A ขนานกับเส้นสัมผัสวงกลมที่ B, C พบ BC ที่จุด D, E จงพิสูจน์ว่า $BD:CE = AB^2:AC^2$
32. วงกลม 2 วงมี XY เป็นเส้นสัมผัสร่วมตรง EF เป็นเส้นสัมผัสร่วมทางอ้อมเส้นต่อจุด ศ.ก. วงกลมทั้งสองตัดเส้นรอบวงของวงกลมทั้งสองที่จุด A, B, C และ D ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า
1. $XY^2 = AC.BD$
 2. $XY^2 - EF^2 = AB.CD$
33. ถ้า m เป็นค่าของ $\square$ จักรวัดที่บรรจุใน $\triangle ABC$ โดยมีจุดยอดมุม 2 มุมอยู่บนฐาน BC และ h เป็นส่วนสูงที่ลากจาก A มาฐาน BC จงพิสูจน์ว่า $m(a+h) = ah$
34. O เป็นจุด ศ.ก. วงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle ABC$ AD แบ่งครึ่ง $\angle A$ พบ BC ที่ D ลาก $DE \perp AO$ พบ AC ที่ F จงพิสูจน์ว่า $AB = AF$
35. AB เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ของวงกลม C เป็นจุดบน AB โดย $CB = \frac{1}{3} AB$ ลาก $PQ \perp AB$ ที่ C จงพิสูจน์ว่า $PQ^2 = 2 AC^2$
36. ABCD เป็น $\square$ จักรวัด เส้นทแยงมุม AC, BD ตัดกันที่ P AQ แบ่งครึ่ง $\angle CAB$ พบ BP, BC ที่ R, Q จงพิสูจน์ว่า $CQ = 2 PR$
37. CM แบ่งครึ่ง $\angle C$ ของ $\triangle ABC$ พบ AB ที่ M X, Y เป็นจุดบน AC, BC ทำให้ $AX = BY$ P, Q เป็นจุดกึ่งกลาง XY, AB จงพิสูจน์ว่า $PQ \parallel CM$
38. $\triangle ACP$ มี PB แบ่งครึ่ง $\angle P$ พบ AC ที่ B และทำให้ $AB > BC$ และ $\angle PBC = 45^\circ$ จงพิสูจน์ว่า
$$BP = \frac{AB \cdot BC}{AB - BC} \sqrt{2}$$
39. ABCD เป็น $\square$ ด้านขนานมี P และ Q เป็นจุดอยู่บนเส้นตรงซึ่งลากขนาน AB ลาก PA กับ QB ตัดกันที่ R และลาก PD, QC ตัดกันที่จุด S จงพิสูจน์ว่า $RS \parallel AD$
40. $\triangle$ หน้าจั่ว ABC มี $AB = AC$ จุด P อยู่ภายใน $\triangle$ นั้น ถ้าลาก PL, PM, PN $\perp BC, CA, AB$ ตามลำดับ และทำให้ $PL^2 = PN.PM$ จงพิสูจน์ว่า
- 1) $\triangle NPL \sim \triangle LPM$
 - 2) วงกลม BPC สัมผัสด้าน AB, AC ที่ B, C
41. ด้าน BA, CD ของ $\square ABCD$ ต่อออกไปตัดกันที่ O ด้าน DA, CB ต่อออกไปตัดกันที่ O' E, F, E', F' เป็นจุดบน OA, OC, O'A, O'C ตามลำดับ ทำให้ $OE, OF, O'E, O'F = AB, DC, AD, BC$ ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $EF \parallel E'F'$
42. วงกลม 2 วงจุด ศ.ก. A, B กับสัมผัสกันภายนอกที่จุด C P เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง PT เป็นเส้นสัมผัสวงกลมอีกวงหนึ่งที่ T, $PN \perp AB$ ที่ N จงพิสูจน์ว่า $PT^2 = 2 AB.CN$
43. ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง $\triangle ABX, \triangle BCY, \triangle ACZ$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่วที่ตั้งอยู่บนด้าน AB, BC, AC โดยมีมุมยอดโคเท่ากันทั้ง 3 รูป จงพิสูจน์ว่า AZ, BZ, CX พบกันที่จุด ๆ หนึ่ง

44. ABCD เป็น □ ขนมหัศพัทธ์ P, Q, R, S เป็นจุด ศ.ก. วงกลม BCD, CDA, DAB, ABC ตามลำดับ ถ้า E, F, G, H เป็นจุดกึ่งกลาง AP, BQ, CR, DS ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า □ EFGH ~ □ ABCD

45. จุด D, E อยู่บนด้าน AB, AC ของ △ ABC ลาก BE, CD ตัดกันที่ F ลาก AF ตัด DE ที่ O ลาก OP, OQ, OR, OS // BE, AB, AC, CD พบ AB, BE, CD, AC ที่จุด P, Q, R, S ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า P, Q, R, S อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

46. จากจุดครึ่ง A บนเส้นรอบวงกลม ลากจอร์ก AB, AC ทำให้ AB, AC คงที่ จงพิสูจน์ว่า จอร์ก BC สัมผัสวงกลมที่ครึ่งแนวนวงหนึ่ง

47. AD, BE, CF เป็นส่วนสูงของ △ ABC ถ้า P, Q เป็นจุดกึ่งกลาง BE, CF จงพิสูจน์ว่า △ PQD ~ △ ABC

จุดจบ

Point of Concurrence in a triangle

เส้นภายใน △ ที่จะพบกันที่จุด ๆ เดียวมีดังนี้

1. เส้นตรงที่ลากตั้งฉากกับด้านทั้ง 3 ของ △ ตรงจุดกึ่งกลางของด้านทั้ง 3 นั้น
2. เส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมภายในทั้ง 3 ของ △
3. เส้นมัธยฐาน (median) ทั้ง 3 ของ △
4. เส้นที่ลากตั้งฉากกับด้านทั้ง 3 ของ △ จากมุมยอดของ △
5. เส้นที่แบ่งครึ่งมุมภายใน 1 มุม และมุมภายนอกอีก 2 มุมของ △

หมายเหตุ 1. จุดในข้อ 1 จะเป็นจุด ศ.ก. วงกลมที่ล้อมรอบ △ รูปนั้น เรียกวงกลมนั้นว่า Circumcircle และเรียกจุดนั้นว่า Circumcentre ของ △ นั้น

$$\text{ได้ พ.ท. } \triangle \text{ นั้น} = \frac{abc}{4r}$$

เมื่อ a, b, c คือด้านทั้ง 3 ของ △ นั้น, r เป็นรัศมีของ Circumcircle ของ △ นั้น

2. จุดในข้อ 2 จะเป็นจุด ศ.ก. วงกลมที่แนบใน △ รูปนั้น เรียกวงกลมนั้นว่า Inscribed circle และเรียกจุดนั้นว่า In-centre ของ △ นั้น

$$\text{ได้ พ.ท. } \triangle \text{ นั้น} = rs$$

เมื่อ r = รัศมีของ Inscribed circle ของ △ นั้น $s = \frac{a+b+c}{2}$

3. จุดในข้อ 3 เรียกว่าจุด centroid ของ △ นั้น จุดนี้จะแบ่งเส้นมัธยฐานทั้ง 3 นั้นเป็นอัตราส่วน 2 : 1

4. จุดในข้อ 4 เรียกว่าจุด orthocentre ของ △ นั้น

5. จุดในข้อ 5 จะเป็นจุด ศ.ก. วงกลมที่แนบนอก △ นั้น เรียกวงกลมนั้นว่า Escribed circle และเรียกจุดนั้นว่าจุด Ex-centre ของ △ นั้น

วงกลมเช่นนี้มี 3 วงสำหรับ △ รูปหนึ่ง ๆ ดังนั้น จุด Ex-centre จึงมี 3 จุดด้วย ถ้าวงกลมสัมผัสด้าน a ของ △ ABC

$$\therefore \text{พ.ท. } \triangle ABC = \frac{1}{2} (b + c - a) r_1 = r_1 (s - a)$$

ถ้าวงกลมสัมผัสด้าน b ของ △ ABC

$$\therefore \text{พ.ท. } \triangle ABC = \frac{1}{2} (c + a - b) r_2 = r_2 (s - b)$$

ด้านกลสมมติค่าน c ของ $\triangle ABC$

$$\therefore \text{พ.ท. } \triangle ABC = \frac{1}{2} (a + b - c) r_3 = r_3 (s - c)$$

เมื่อ r_1, r_2, r_3 เป็นรัศมีของ Escribed circle แต่ละวง และ $s = \frac{a+b+c}{2}$
(ทั้งหมดจะได้กล่าวโดยละเอียดต่อไป)

หลักทั่วไปในการพิสูจน์

โดยทั่วไปโจทย์เรื่อง Point of Concurrence นี่จะเป็นการให้พิสูจน์ว่าเส้น 3 เส้นพบกันที่จุด ๆ หนึ่ง ซึ่งมีวิธีการทั่วไปในการพิสูจน์ดังนี้

วิธีที่ 1

ลากเส้น 2 เส้นให้เป็นไปตามเงื่อนไขของโจทย์ ให้ตัดกัน แล้วเชื่อมจุดตัดนั้นกับจุดที่โจทย์ต้องการ พยายามพิสูจน์ให้ได้ว่าเส้นที่ 3 มีเงื่อนไขแบบเดียวกับ 2 เส้นแรก จะได้ว่าเส้นทั้ง 3 ตามเงื่อนไขของโจทย์พบกันที่จุด ๆ เดียว

วิธีที่ 2

ลากเส้นทั้ง 3 ตามเงื่อนไขของโจทย์ โดยยังไม่ทราบว่าพบกันที่จุดเดียวหรือไม่แล้วพยายามพิสูจน์ให้เส้นทั้ง 3 เข้าหลักข้อใดข้อหนึ่งในหลักห้าข้อข้างต้น จะได้ว่าเส้นทั้ง 3 ตามเงื่อนไขของโจทย์พบกันที่จุด ๆ เดียว

วิธีที่ 3

จากหลัก 5 ข้อข้างต้น และอาศัยการสร้างช่วยให้ได้จุดที่เส้นทั้ง 3 พบกัน พยายามพิสูจน์ให้เส้นที่ผ่านจุดนั้น เป็นไปตามเงื่อนไขที่โจทย์ต้องการทุกเส้น จะได้ว่าเส้นทั้ง 3 พบกันที่จุด ๆ เดียว

ตัวอย่างการพิสูจน์

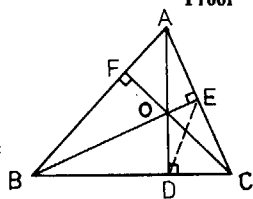
จงพิสูจน์ว่าเส้นที่ลากจากมุมยอดของ $\triangle$ ไปทังฉากกับด้านตรงข้ามพบกันที่จุด ๆ เดียว
(สมมติว่ายังไม่ทราบหลักข้ออื่น โดยทราบหลักข้ออื่น ๆ 4 ข้อแล้ว)

พิสูจน์ตามวิธีที่ 1

Given $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ $AD \perp BC, BE \perp AC$ พบกันที่ O

Prove $COF \perp AB$

Proof เชื่อม DE



จาก $\angle ODC + \angle OEC = 2$ มุมฉาก

ได้ $\angle DEC = \angle DOC = \angle FOA$

และ $\angle FAO = \angle BED$

$\therefore \angle FOA + \angle FAO = \angle DEC + \angle BED = 1$ มุมฉาก

$\therefore \angle AFO = 1$ มุมฉาก (มุมที่เหลือใน $\triangle AOF$)

$\therefore$ เส้นที่ลากจากมุมยอดของ $\triangle$ ไปทังฉากกับด้านตรงข้ามพบกันที่จุด ๆ เดียว

พิสูจน์ตามวิธีที่ 2

Given $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ $AD, BE, CF \perp BC, CA, AB$ ตามลำดับ

Prove AD, BE, CF พบกันที่จุด ๆ เดียว

Proof ลาก $XY, YZ, ZX \parallel BA, CB, AC$ ตามลำดับผ่าน C, A, B ได้ $ABCY$ เป็น $\square$ ด้านขนาน $\therefore AY = BC$

และเช่นกัน $AZ = BC$

$\therefore AY = AZ$

$\angle BDA = \angle DAY = 1$ มุมฉาก ($YZ \parallel BC$)

$\therefore DA$ แบ่งครึ่ง, $\perp YZ$ ที่ A

เช่นกัน $EB \parallel \parallel ZX \parallel B$

$FC \parallel \parallel XY \parallel C$

$\therefore AD, BE, CF$ พบกันที่จุด ๆ เดียว

(จากเส้นแบ่งครึ่ง, ทังฉากกับด้านทั้ง 3 ของ $\triangle$ พบกันที่จุด ๆ เดียว)

Q.E.D.

พิสูจน์ตามวิธีที่ 3

Given $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$

Prove เส้นที่ลากจากมุมยอด A, B, C ไปทังฉากกับ BC, CA, AB พบกันที่จุด ๆ เดียว

Const ให้ A' เป็นจุดกึ่งกลาง BC เชื่อม AA' แบ่ง AA' ที่ G

ให้ $AG : GA' = 2 : 1 \therefore G$ เป็น centroid ของ $\triangle ABC$

และให้ O เป็น circumcentre ของ $\triangle ABC$

เชื่อม OG ต่อออกไปถึง H ให้ $OG : GH = 1 : 2$

ลาก AH ต่อไปพบ BC ที่ D

$\therefore AG : GA = OG : GH = 1 : 2$

$\therefore OA' \parallel AD$ (ทบท. 60 Hall converse)

$OA' \perp BC$ (O เป็น circumcentre)

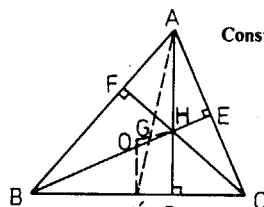
$AD \perp BC$ ด้วย

เช่นกันจะได้ว่า $BE \perp AC$ และ $CF \perp AB$

$\therefore$ เส้นที่ลากจากมุมยอดมาทังฉากกับด้านตรงข้ามของ $\triangle$ ย่อมพบกันที่จุด ๆ เดียว

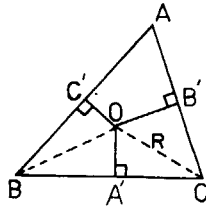
Q.E.D.

ข้อสังเกต จากข้อนี้ จะเห็นได้ว่า จุด circumcentre, centroid และ orthocentre ของ $\triangle$ รูปเดียวกัน จะอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน



CIRCUMCENTRE & CIRCUMCIRCLE

เนื่องจากทฤษฎีบทที่ว่า เส้นตั้งฉากจากจุดกึ่งกลางด้านของ $\triangle$ ย่อมพบกันที่จุด ๆ หนึ่งนั้น ได้มีหลักการพิสูจน์แล้วในแบบเรียนเรขาคณิต ชั้น ม.ศ. ปลาย และที่ทราบกันอีกก็คือ ถ้า $OA', OB', OC' \perp$ และแบ่งครึ่งด้าน BC, CA และ AB ของ $\triangle ABC$ ตามลำดับแล้ว เราจะได้ว่า $OA = OB = OC$



$\therefore OA = OB = OC \therefore O$ เป็นจุด ศ.ก. ของวงกลมที่ล้อมรอบ

$\triangle ABC$ มีรัศมี $= OA = OB = OC = R$

วงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle$ นี้เราเรียกว่า Circumcircle

และจุด ศ.ก. วงกลมนี้เราเรียกว่า Circumcentre

ต่อไปนี้เป็นวิธีการหารัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle$

จากรูป $\angle BOC = 2\angle A$

$\therefore \angle BOA' = \angle A$ และ $BA' = A'C' = \frac{1}{2}a$

จาก $\triangle BOA' \therefore \sin A = \frac{a}{2R} \therefore 2R = \frac{a}{\sin A}$

ในทำนองเดียวกัน $2R = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\therefore R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$

$\therefore$ พ.ท. $\triangle ABC = \frac{1}{2}bc \sin A$

$\therefore \sin A = \frac{2 \text{ พ.ท. } \triangle ABC}{bc} = \frac{a}{2R}$

$\therefore R = \frac{abc}{4 \text{ พ.ท. } \triangle ABC}$

ดังนั้นเมื่อกำหนดค่าด้านและมุมหรือค่าอย่างใดอย่างหนึ่งของ $\triangle$ มาก็ค้นหารัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบได้

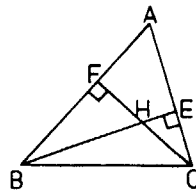
Ex I Given $BE \perp AC, CF \perp AB$ ตัดกันที่ H

Prove รัศมีวงกลมที่ล้อม $\triangle BHC =$ รัศมีของวงกลมที่ล้อม $\triangle ABC$

Proof $\therefore AFHE$ concyclic $\therefore \angle EHF = 180^\circ - \angle A$

$$\begin{aligned} \therefore \text{รัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบ } \triangle BHC &= \frac{BC}{2 \sin \angle BHC} \\ &= \frac{a}{2 \sin (180^\circ - A)} \\ &= \frac{a}{2 \sin A} \end{aligned}$$

$=$ รัศมีของวงกลมที่ล้อม $\triangle ABC$



Q.E.D.

Ex II Given ABCD เป็น $\square$ ใดๆ เส้นทแยงมุมตัดกันที่ K

X, Y, Z, W เป็นจุด ศ.ก. ของวงกลมที่ล้อม $\triangle BCK, \triangle CDK, \triangle ADK, \triangle ABK$ ตามลำดับ ลาก XY, YZ, ZW, WX ตัด KC, DK, AK, BK ที่ F, E, H, G ตามลำดับ

Prove XYZW เป็น $\square$ ด้านขนาน

Proof $\therefore YX \perp CK \therefore \angle YFK = 1$ มุมฉาก

ทำนองเดียวกัน $\angle YEK = 1$ มุมฉาก

$\therefore \angle YFK + \angle YEK = 2$ มุมฉาก $\square YEFK$ concyclic

$\therefore \angle EYF = \angle EKF = 2$ มุมฉาก

ทำนองเดียวกัน $\angle HKG = \angle HWG = 2$ มุมฉาก

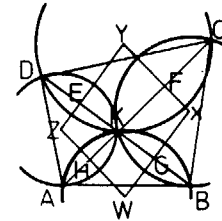
$\therefore \angle EYF + \angle EKF = \angle HKG + \angle HWG$

$\therefore \angle EKF = \angle HKG \therefore \angle ZYX = \angle ZWX$

ทำนองเดียวกัน $\angle YZW = \angle YXW$

$\therefore XYZW$ เป็น $\square$ ด้านขนาน

Q.E.D.



IN-CENTRE & EX-CENTRE

จากทฤษฎีบทที่ว่า เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามของ $\triangle$ รูปหนึ่ง ย่อมพบกันที่จุด ๆ หนึ่งและจุดนี้คือ จุด ศ.ก. ของวงกลมที่แนบใน $\triangle$ รูปนี้ เช่น ถ้า IB แบ่งครึ่ง $\angle B, IC$ แบ่งครึ่ง $\angle C, IA$ แบ่งครึ่ง $\angle A$

I เป็นจุด ศ.ก. ของ วงกลม ที่แนบใน $\triangle ABC$ รัศมี = ระยะตั้ง

ฉากจาก I ถึงด้านของ $\triangle$ (IX, IY, IZ)

เราเรียกววงกลมที่แนบใน $\triangle$ ว่า Inscribed Circle หรือ In-Circle

จุด I เรียกว่า In-centre

วิธีการหรัศมีของวงกลมที่แนบใน $\triangle$

$\therefore AY$ และ AZ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม $\therefore AY = AZ$

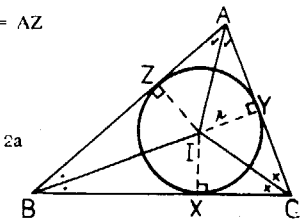
ในทำนองเดียวกัน $BX = BZ, CX = CY$

$$2s = a + b + c$$

$$= 2 (AY + BX + CX) = 2 AY + 2a$$

$$AY = s - a$$

ทำนองเดียวกัน $BX = s - b$ และ $CX = s - c$



$$\begin{aligned}
 \Delta ABC &= \Delta IBC + \Delta IAC + \Delta IAB \\
 &= \frac{1}{2} IX \cdot BC + \frac{1}{2} IY \cdot AC + \frac{1}{2} IZ \cdot AB \\
 &= \frac{1}{2} ra + \frac{1}{2} rb + \frac{1}{2} rc \\
 &= rs \\
 \therefore r &= \frac{\Delta}{s}
 \end{aligned}$$

เมื่อ r คือ รัศมีของวงกลมที่แนบใน Δ คือ พ.ท. ของ Δ , $2s$ คือ เส้นรอบรูปของ Δ นอกจากนั้นยังมีจุด ศ.ก. ของวงกลมที่แนบนอก Δ เรียกว่า จุด Ex-centre

วงกลมที่แนบนอก Δ เรียกว่า Escribed circle

จุด Ex-centre นี้เกิดจากเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในหนึ่งมุมและเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกที่เหลืออีก 2 มุม พบกัน ซึ่งจะได่วงกลมสัมผัสด้านตรงข้ามมุมที่เส้นแบ่งครึ่งมุมอย่างภายใน

วิธีหารัศมีของวงกลมที่แนบนอก Δ

จากรูป I เป็นจุด Ex-centre

ให้รัศมีของวงกลมที่สัมผัส Δ (IX, IY, IZ) = R

ให้ $s = \frac{1}{2}$ ของเส้นรอบรูปของ ΔABC

$$\begin{aligned}
 2s &= AB + BC + CA \\
 &= AB + BX + XC + CA \\
 &= AB + BZ + CY + CA \\
 &= AZ + AY \\
 &= 2AY
 \end{aligned}$$

$$\therefore s = AY = AZ$$

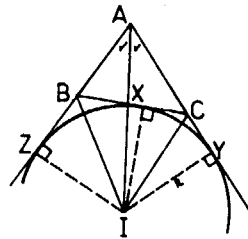
$$\therefore BX = BZ = AZ - AB = s - a$$

ในทำนองเดียวกัน $CX = s - b$

$$\begin{aligned}
 \Delta ABC &= \Delta IAB + \Delta IAC - \Delta IBC \\
 &= \frac{1}{2} IZ \cdot AB + \frac{1}{2} IY \cdot AC - \frac{1}{2} IX \cdot BC \\
 &= \frac{1}{2} R (BC + AC + AB - 2BC) \\
 &= \frac{1}{2} R (2s - 2BC) \\
 &= R (s - a) \\
 R &= \frac{\Delta ABC}{s - a}
 \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อให้ R_1 และ R_2 แทนรัศมีอยู่ตรงข้ามมุม B และ C ตามลำดับ

$$\text{จะได้ } R_1 = \frac{\Delta ABC}{s - b} \text{ และ } R_2 = \frac{\Delta ABC}{s - c}$$



Ex I Given ΔABC มี $\angle C = 1$ มุมฉาก, I เป็นจุด In-centre, $IX \perp BC$ ให้ $IX = r$

Prove $2r = a + b - c$

Proof จาก ΔIXC $r = CX \tan \frac{C}{2}$

จากวิธีหารัศมีของวงกลมแนบใน Δ ; $CX = s - c$

$$\therefore r = (s - c) \tan \frac{90^\circ}{2}$$

$$\therefore 2r = (2s - 2c) \cdot 1$$

$$2r = a + b + c - 2c$$

$$= a + b - c$$

Q.E.D.

Ex II Given I เป็นจุด Ex-centre ของ ΔABC

$$AB = BH, AC = CK$$

Prove I เป็นจุด ศ.ก. ของวงกลมที่ล้อม ΔHAK

Const โยง BI, AI, HI, KI

Proof $\therefore \angle EBI = \angle DBI$

$$\therefore \angle HBE = \angle ABD$$

$$\therefore \angle HBE + \angle EBI = \angle DBI + \angle ABD$$

$$\therefore \angle HBI = \angle ABI$$

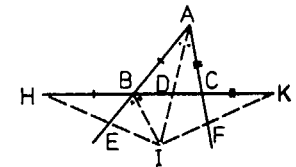
$$\therefore \Delta HBI \cong \Delta ABI \text{ (ก.ม.ก.)}$$

$$\therefore AI = HI$$

$$\text{ทำนองเดียวกัน } KI = AI \therefore AI = HI = KI$$

$\therefore I$ เป็นจุด ศ.ก. ของวงกลมที่ล้อม ΔAHK

Q.E.D.



Ex III Given AB เป็นคอร์ด C เป็นจุด ศ.ก. ของวงกลม

Prove จุด Ex-centre ของ ΔABC อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม

Const แบ่งครึ่ง $\angle A$ ให้เส้นแบ่งครึ่ง พบเส้นรอบวงที่ X, ตัด AC พบเส้นรอบวงที่ D, ลาก BX, DX, CX

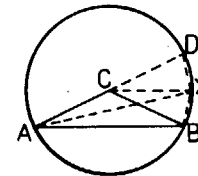
Proof

$$\therefore \angle BAX = \angle XAD \therefore \widehat{BX} = \widehat{DX}$$

$$\therefore \angle BCX = \angle XCD \therefore CX \text{ แบ่งครึ่ง } \angle BCD$$

$\therefore X$ เป็นจุด Ex-centre ของ ΔABC อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม

Q.E.D.



Ex IV Given I เป็นจุด In-centre ของ $\triangle ABC$ ซึ่งบรรจุในวงกลม

ทอ AI พบเส้นรอบวงที่ P

Prove P เป็นจุด Circumcentre ของ $\triangle BIC$

Const ทอ BI, CI, PB, PC

Proof $\therefore \angle BAP = \angle CAP$

$$\therefore \widehat{BP} = \widehat{PC} \quad \therefore BP = PC$$

$$\therefore \angle PIC = \angle IAC + \angle ICA \text{ และ}$$

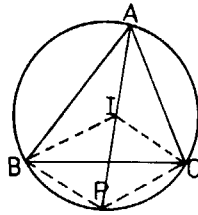
$$\angle IAC = \angle PCB, \angle ICA = \angle ICB$$

$$\therefore \angle PIC = \angle ICB + \angle PCB = \angle PCI$$

$$\therefore PI = CI$$

$$\therefore PI = BP = PC$$

$\therefore P$ เป็นจุด Circumcentre ของ $\triangle BIC$



Q.E.D.

Ex V Given $\triangle ABC$ บรรจุภายในวงกลมมี I และ I_1 เป็นจุด

In-centre และ Ex-centre ตามลำดับ

ลาก $I I_1$ ตัดเส้นรอบวงที่ P

Prove $IP = I_1P$

Const IB, I_1B , IC, I_1C

Proof $\angle ABI + \angle IBC + \angle I_1BC + \angle I_1BX = 180^\circ$

$$\therefore \angle I_1BX = \angle I_1BC \text{ และ } \angle ABI = \angle IBC$$

$$\therefore 2(\angle IBC + \angle I_1BC) = 180^\circ$$

$$\therefore \angle IBI_1 = 90^\circ \text{ ทำนองเดียวกัน } \angle ICI_1 = 90^\circ$$

$$\therefore \angle IBI_1 + \angle ICI_1 = 180^\circ$$

$\therefore BICI_1$ มีวงกลมผ่านได้ โดยมี $I I_1$ เป็นเส้นผ่าศก.

จาก Ex IV $\therefore P$ เป็นจุด Circumcentre ของ $\triangle BIC$

$\therefore P$ เป็นจุด ศก.ของวงกลมที่สัมผัสเหลี่ยม $BICI_1$

นั่นคือ $IP = I_1P$

Q.E.D.

Ex VI Given O เป็นจุด Circumcentre ของ $\triangle ABC$

I เป็นจุด In-centre ของ ABC

ทอ AI ถึงเส้นรอบวงที่ P ลากเส้นผ่า ศก. PQ ให้

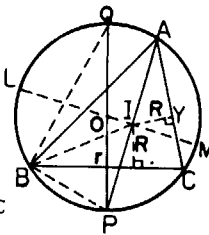
รัศมี OP ยาว = r และรัศมีวงกลมแนบใน $\triangle = R$

Prove $OI^2 = r^2 - 2Rr$

Const ลากเส้นผ่า ศก. LM ผ่านจุด I, ทอ BI, BP, BQ, IY $\perp$ AC

Proof $\therefore LLIM = ALIP$ (ท.บ. 57)

$$\therefore (r+OI)(r-OI) = ALIP$$



$$\therefore r^2 - OI^2 = ALIP$$

$$\angle IBP = \frac{B}{2} + \angle CBP = \frac{B}{2} + \angle CAP = \frac{B}{2} + \frac{A}{2}$$

$$\angle BIP = \frac{B}{2} + \frac{A}{2} = \angle IBP$$

$$\therefore PI = PB = PQ \sin \angle BQP = 2r \sin \frac{A}{2} \quad (1)$$

$$\text{จาก } \triangle IAY \quad AI = R \operatorname{cosec} \frac{A}{2} \quad (2)$$

$$(1) \times (2) \therefore ALIP = 2r \sin \frac{A}{2} \bullet R \operatorname{cosec} \frac{A}{2}$$

$$\therefore r^2 - OI^2 = 2rR$$

$$\therefore OI^2 = r^2 - 2rR$$

Q.E.D.

Ex VII Given วงกลมสัมผัส BC ที่ D, X เป็นจุดกึ่งกลาง BC

AB > AC

Prove $DX = \frac{1}{2}(AB - AC)$

Proof $DX = BD - BX$

$$= BD - CX$$

$$= BD - CD - DX$$

$$\therefore 2DX = BF - CE$$

$$\therefore AF = AE$$

$$\therefore 2DX = (BF + AF) - (CE + AE)$$

$$DX = \frac{1}{2}(AB - AC)$$

Q.E.D.

Ex VIII Given I เป็นจุด In-centre ของ $\triangle ABC$

Prove $\frac{AI}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = 4R$

$$\text{Proof } \angle CIA = 180^\circ - \frac{A}{2} - \frac{C}{2} = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B)$$

$$= 90^\circ + \frac{B}{2}$$

$$\text{จาก } \triangle \text{ ตรีโกณ } \frac{AI}{\sin \angle ACI} = \frac{CA}{\sin \angle CIA}$$

$$AI = b \sin \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{\cos \frac{B}{2}}$$

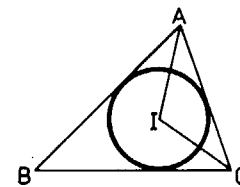
$$= b \sin \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{B}{2}}$$

$$= \frac{b \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{B}{2}}$$

$$\text{จากตัวอย่าง } R = \frac{b}{2 \sin B}$$

$$\therefore AI = 4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Q.E.D.



Centroid

เส้นมัธยฐานของ $\triangle$ ย่อมพบที่จุด ๆ หนึ่งและจุดนั้นจะแบ่งเส้นมัธยฐานออกเป็นอัตราส่วน
ก้านสั้นต่อก้านยาว = 1:2

Ex I Given ABCD เป็นสี่เหลี่ยมใด ๆ มี P และ Q เป็นจุด Centroid

ของ $\triangle BCD$ และ $\triangle ACD$ ตามลำดับ BQ ตัด AP ที่ G

Prove (i) $PQ \parallel AB$ (ii) $PQ = \frac{1}{3} AB$ (iii) $PG = \frac{1}{4} PA$

Const แบ่งครึ่ง DC ที่ X โยง AX และ BX

Proof $\therefore$ AX และ BX ย่อมผ่าน Q และ P

$$\therefore \frac{QX}{AQ} = \frac{PX}{BP} = \frac{1}{2} \quad \therefore PQ \parallel AB$$

$$\therefore \triangle PQX \sim \triangle ABX \quad \therefore \frac{PQ}{BA} = \frac{QX}{AX} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore PQ = \frac{AB}{3}$$

$$\triangle PGQ \sim \triangle ABG \quad \therefore \frac{PG}{AB} = \frac{QG}{GA}$$

$$\therefore \frac{PG}{GA} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{AP}{PG} = 4 \text{ (Alternando แล้ว Componendo)}$$

$$\therefore PG = \frac{1}{4} AP$$

Q.E.D.

Ex II Given AD, BE และ CF เป็นเส้นมัธยฐานของ $\triangle ABC$,

$$EF = EH$$

Prove E เป็นจุด Centroid ของ $\triangle ADH$

Proof $\therefore$ E และ F เป็นจุดกึ่งกลาง AC และ AB $\therefore EH \parallel BC$

$$\text{และ } EH = \frac{BC}{2} = CD$$

$$\therefore \triangle EGH \cong \triangle CDG \quad \therefore DG = GH$$

$$\therefore E \text{ เป็นจุดกึ่งกลาง AC และ } EI \parallel CD \quad \therefore AI = ID$$

$$\therefore E \text{ เป็นจุด Centroid ของ } \triangle ADH$$

Q.E.D.

Ex III Given G เป็นจุด Centroid ของ $\triangle ABC$, $AG = BC$

Prove $\angle BGC = 1$ มุมฉาก

$$\text{Proof } \therefore GX = \frac{AG}{2} \quad \therefore GX = \frac{BC}{2}$$

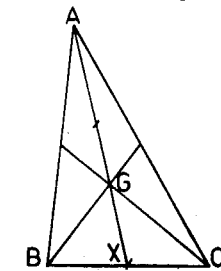
$$\therefore BX = XC \quad \therefore GX = BX$$

$$\therefore \angle XBG = \angle XGB \text{ ทำนองเดียวกัน } \angle XCG = \angle XGC$$

$$\therefore \angle XBG + \angle XCG = \angle XGB + \angle XGC = 1 \text{ มุมฉาก} =$$

$$\angle BGC$$

Q.E.D.



Ex IV Given AE, BF และ CH ตั้งฉากกับเส้นที่ลากผ่าน O ซึ่งเป็นจุด

Centroid ของ $\triangle ABC$

Prove $AE = BF + CH$

Const. $XP \perp FH$ ที่ P, ลาก BH ตัด PX ที่ Q

Proof

$\therefore$ X เป็นจุดกึ่งกลาง BC และ $XQ \parallel CH$

$$\therefore XQ = \frac{1}{2} CH \text{ และ } PQ = \frac{1}{2} BF$$

$$\therefore CH + BF = 2(XQ + PQ)$$

$$= 2PX$$

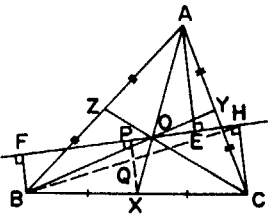
$$\therefore \triangle AOE \sim \triangle POX$$

$$\therefore \frac{AE}{PX} = \frac{AO}{OX} = \frac{2}{1}$$

$$\text{ได้ } AE = 2PX$$

$$\therefore (1) = (2)$$

$$\therefore AE = BF + CH$$



(1)

(2)

Q.E.D.

Ex V Given DE เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลม, H เป็นจุด Orthocentre

ของ $\triangle ABC$ มี F เป็นจุด Centroid

ลากเส้นจาก D ผ่าน F พบ HE ที่ Y

Prove DY แบ่งครึ่ง HE

Const แบ่งครึ่ง DE ที่ O ลาก HO

Proof

$\therefore$ O เป็นจุด ศ.ก. ของวงกลม $\therefore$ OH เป็น Euler Line

$\therefore$ OH ผ่านจุด F และ $OF = \frac{FH}{2}$ หรือ $\frac{OF}{HF} = \frac{1}{2}$

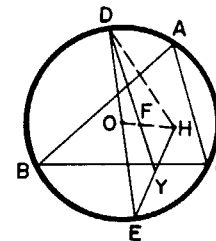
แต่ O เป็นจุดกึ่งกลาง DE

$\therefore$ F เป็นจุด Centroid ของ $\triangle DEH$

นั่นคือ DY เป็นเส้นมัธยฐานของ $\triangle DEH$

$\therefore$ DY แบ่งครึ่ง HE

Q.E.D.



Nine-point Circle

Given A', B', C' เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC, CA และ AB D, E และ F เป็นจุดปลายเส้นกึ่งกลาง

H เป็นจุด Orthocentre

P, Q, R เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AH, BH และ CH ตามลำดับ

Prove วงกลมที่ผ่านจุด A', B', C' จะผ่านจุด D, E, F และ P, Q, R ด้วย

Const ค่อย PC', CA', AB', BP

Proof $\because AP = PH, AC' = C'B \therefore PC' \parallel BH$

$\because AC' = C'B, BA' = A'C \therefore A'C' \parallel AC$

$\because BE \perp AC \therefore \text{มุม } A'CP = 90^\circ$

ทำนองเดียวกันมุม $A'BP = 90^\circ$

$\therefore A'DP = 90^\circ$ ด้วย นั่นคือ วงกลมที่ผ่าน A', B', C' จะผ่านจุด P และ D ด้วย

ในทำนองเดียวกันถ้าเราสร้างต่อจุด Q และ R กับจุด A', B', C' ก็จะได้ว่าวงกลมผ่าน Q และ

E และผ่าน R และ F นั่นคือ วงกลมที่ผ่าน A', B', C' จะผ่านจุด D, E, F และ P, Q, R ด้วย

Q.E.D.

วงกลมที่ผ่านจุดทั้งเก้าจุดนี้เราเรียกว่า Nine-point Circle ของ $\triangle$ และต่อไปจะใช้ชื่อว่า N.P.C

วิธีหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของ N.P.C.

จากรูป

Given O เป็นจุด Circumcentre, H เป็นจุด Orthocentre

Find จุด ศ.ก. และรัศมีของ N.P.C

Const ค่อย AD ถึง X ลาก OX ให้ N เป็นจุดกึ่งกลาง OH ลาก ND ให้ OX ยาว = R

Sol

$\because HD = DX, HN = NO \therefore ND \parallel$ และ $= \frac{1}{2} OX = \frac{1}{2} R$

ในทำนองเดียวกัน $NE = \frac{1}{2} R$ และ $NF = \frac{1}{2} R$

$\therefore ND = NE = NF = \frac{1}{2} R$

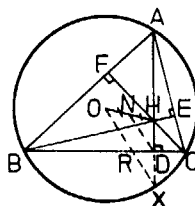
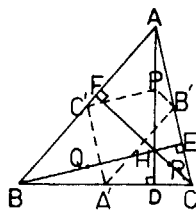
นั่นคือ N เป็นจุดศูนย์กลางของ วงกลม ที่ผ่านจุด $A', B', C',$

D, E, F และ P, Q, R มีรัศมี $= \frac{1}{2} R$

Ans.

สรุป

จุดศูนย์กลางของ N.P.C ของสามเหลี่ยมใดๆ คือ จุดกึ่งกลางของเส้นเชื่อมระหว่างจุด Circumcentre กับ Orthocentre ของ $\triangle$ นั้น และมีรัศมีเท่ากับครึ่งหนึ่งของรัศมีของ Circumcircle ของ $\triangle$ นั้น



Ex I Given O เป็นจุด Orthocentre ของ $\triangle ABC$

Prove $\triangle OBC, \triangle OCA$ และ $\triangle OAB$ มี N.P.C. เดียวกัน

Const ให้ P, Q, R และ X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC, CO, OB, AB, AC, OA ตามลำดับ

Proof $\because O$ เป็น Orthocentre ของ $\triangle ABC$ N.P.C ของ $\triangle BOC$

ผ่านจุด P, Q, R, D, E, F และ X, Y, Z

$\therefore C$ เป็น Orthocentre ของ $\triangle AOB$

$\therefore$ N.P.C ของ $\triangle BOA$ ก็ผ่านจุด X, R, Z, D, E, F และ P, Q, Y

ทำนองเดียวกัน N.P.C ของ $\triangle OCA$ ก็ผ่านจุด Y, Z, Q,

E, D, F, X, R, P นั่นคือ $\triangle OBC, \triangle OAC, \triangle OAB$ มี N.P.C

เดียวกัน

Q.E.D.

Ex II Given I เป็นจุด In-centre, H เป็นจุด orthocentre

Prove $IH = 2r^2 - 4R^2 \cos A \cos B \cos C$

Proof $AH = \frac{AE}{\sin \angle AHE} = \frac{AE}{\sin C}$

$= \frac{AB \cos A}{\sin C}$

$\therefore AH = 2R \cos A$

$AI = 4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ จากตัวอย่าง

$\angle HAI = \angle HAB - \angle IAB = 90^\circ - \angle B - \frac{\angle A}{2}$

$= \frac{1}{2} (\angle C - \angle B)$

จาก $\triangle HAI \therefore HI^2 = AH^2 + AI^2 - 2 AI \cdot AH \cos \angle HAI$

$= 4R^2 \cos^2 A + 16R^2 \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}$

$- 16R^2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos A \cos \frac{1}{2} (\angle C - \angle B)$

$= 4R^2 [\cos^2 A + 4 \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} - 4 \cos A$

$\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{1}{2} (\angle C - \angle B)]$

$= 4R^2 [\cos^2 A + (1 - \cos B)(1 - \cos C)$

$- 4 \cos A \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2}$

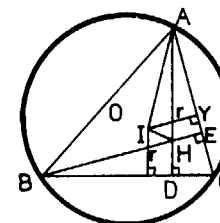
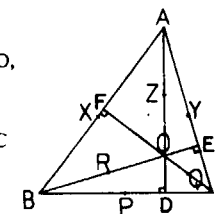
$- 4 \cos A \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}]$

$= 4R^2 [\cos^2 A + (1 - \cos B)(1 - \cos C) - \cos A$

$\sin B \sin C - \cos A (1 - \cos B)(1 - \cos C)]$

$= 4R^2 [\cos A (\cos A - \sin B \sin C) + (1 - \cos A)$

$(1 - \cos B)(1 - \cos C)]$



$$\begin{aligned}
 &= 4 R^2 [\cos A \{ \cos (180^\circ - \angle B + \angle C) - \sin B \sin C \} + (1 - \cos A) (1 - \cos B) (1 - \cos C)] \\
 &= 4 R^2 [-\cos A \cos B \cos C + 8 \sin^2 \frac{1}{2} A \sin^2 \frac{1}{2} B \sin^2 \frac{1}{2} C] \\
 &IY = AI \sin \frac{1}{2} A \\
 &r = 4 R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\
 \therefore HI^2 &= 2 r^2 - 4 R^2 \cos A \cos B \cos C
 \end{aligned}$$

Q.E.D.

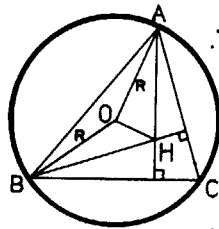
Ex III Given O เป็นจุด Circumcentre, H เป็นจุด Orthocentre ของ $\triangle ABC$

Find OH

Sol. จากทฤษฎี

$$AH = 2 R \cos A, AO = R$$

$$\begin{aligned}
 \angle HAO &= \angle HAB - \angle OAB = 90^\circ - \angle B - (90^\circ - \frac{\angle AOB}{2}) \\
 &= \angle C - \angle B
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \therefore OH^2 &= AO^2 + AH^2 - 2 AO \cdot AH \cos \angle HAO \\
 &= R^2 + 4 R^2 \cos^2 A - 4 R^2 \cos A \cos \angle HAO \\
 &= R^2 [1 + 4 \cos^2 A - 4 \cos A \cos (C - B)] \\
 &= R^2 [1 - 4 \cos A \{ \cos (B + C) + \cos (C - B) \}] \\
 &= R^2 [1 - 8 \cos A \cos B \cos C]
 \end{aligned}$$

$$\therefore OH = R \sqrt{1 - 8 \cos A \cos B \cos C}$$

ANS.

Ex IV Given O เป็นจุด Circumcentre ของ $\triangle ABC$, H เป็นจุด

Orthocentre AO พบ BC ที่ U, A' เป็นจุดกึ่งกลาง BC

Prove วงกลมที่มี AU เป็นเส้นผ่า ศ.ก. จะสัมผัส N.P.C. ของ

 $\triangle ABC$ ที่จุด D

Const แบ่งครึ่ง AU ที่ X ลาก DX ให้ P เป็นจุดกึ่งกลาง

AH ลาก PA' ตัด DX ที่ N, ลาก OA'

Proof

X เป็นจุด ศ.ก. ของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle AUD$ และ N.P.C. ของ

ผ่านจุด D ด้วย

$$\therefore AH = 2 OA' \therefore AP = OA' \text{ และ } // OA'$$

$$\therefore PA' // AU \text{ แต่ } DX \text{ แบ่งครึ่ง } AU$$

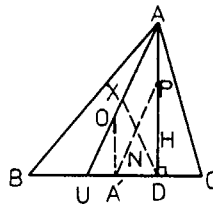
$$\therefore DN \text{ แบ่งครึ่ง } A'P \text{ ที่ N นั่นคือ N เป็นจุด ศ.ก. ของ N.P.C. ของ } \triangle ABC$$

ของ $\triangle ABC$

$$\therefore \text{วงกลมที่มี } AU \text{ เป็นเส้นผ่า ศ.ก. (คือ X เป็นจุด ศ.ก.)}$$

จะสัมผัส N.P.C. ของ $\triangle ABC$ ที่จุด D

Q.E.D.



ORTHOCENTRE & PEDAL TRIANGLE

ถ้าลากเส้นจากจุดยอดของ $\triangle$ มาถึงฉากกับด้านตรงข้าม ย่อมพบกันที่จุด ๆ หนึ่ง และจุดนั้นเรียกว่า จุด Orthocentre

ถ้าลากเส้นต่อจุดปลายเส้นตั้งฉากนั้นให้เกิด $\triangle$ ใหม่ อีกรูปหนึ่ง $\triangle$ นั้นเรียกว่า $\triangle$ พิเศษ

Ex I Given O เป็น Circumcentre ของ $\triangle ABC$, $OA = R$

H เป็น Orthocentre ของ $\triangle ABC$ ลาก OHProve $OH^2 = R^2 (1 - 8 \cos A \cos B \cos C)$ Const ลาก $OX \perp AD$ ที่ XProof $\therefore \angle AOC' = \angle C$

$$\therefore \angle BAO = 90^\circ - \angle C \text{ และ}$$

$$\angle DAC = 90^\circ - \angle C$$

$$\angle OAX = \angle A - 2 (90^\circ - \angle C)$$

$$= \angle A + 2\angle C - (\angle A + \angle B + \angle C) = \angle C - \angle B$$

$$(\text{ถ้า } \angle C > \angle B)$$

$$\text{จาก } \triangle AOX \quad OX = R \sin (C - B)$$

$$AX = R \cos (C - B)$$

$$AH = \frac{AE}{\sin \angle AHE} = \frac{AB \cos A}{\sin C} = 2 R \cos A$$

$$HX = AH - AX$$

$$= 2 R \cos A - R \cos (C - B)$$

$$= R [2 \cos A - \cos (C - B)]$$

$$OH^2 = OX^2 + HX^2$$

$$= R^2 [\sin^2 (C - B) + \{2 \cos A - \cos (C - B)\}^2]$$

$$= R^2 [\sin^2 (C - B) + 4 \cos^2 A - 4 \cos A \cos (C - B) + \cos^2 (C - B)]$$

$$= R^2 [1 - 4 \cos A \{ \cos (C - B) + \cos (B + C) \}]$$

$$= R^2 [1 - 8 \cos A \cos B \cos C]$$

Q.E.D.

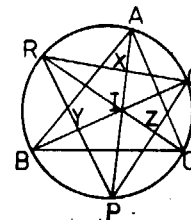
Ex II Given I เป็นจุด In-centre ของ $\triangle ABC$

Prove I เป็นจุด Orthocentre ของ $\triangle PQR$

$$\therefore \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ \text{ และ}$$

$$\angle BAI = \angle CAI, \angle ABI = \angle CBI, \angle ACI = \angle BCI$$

$$\therefore \angle BCI + \angle ABI + \angle BAI = 90^\circ$$



$\therefore \angle BCI = \angle BQR, \angle ABI = \angle APQ, \angle BAI = \angle BQP$
 $\therefore \angle BQR + \angle APQ + \angle BQP = 90^\circ$
 $\therefore \angle PXQ = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$
 $\therefore PX \perp RQ$ ทำนองเดียวกัน $QY \perp PR$ และ $RZ \perp PQ$
 $\therefore I$ เป็นจุด Orthocentre ของ $\triangle PQR$. **Q.E.D.**

Ex III Given O เป็นจุด Circumcentre ของ $\triangle ABC$

I เป็นจุด In-centre ของ $\triangle ABC$

H เป็นจุด Orthocentre ของ $\triangle ABC$

และ $BCIO$ มีวงกลมผ่านได้

Prove วงกลมที่ผ่าน $BCIO$ ผ่านจุด H ด้วย

Proof $\therefore \angle BOC = 2\angle A \therefore \angle BIC = 2\angle A$

$$\therefore \angle BIC + \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = 180^\circ$$

$$\text{และ } \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$$

$$\therefore 2\angle A + 90^\circ - \frac{\angle A}{2} = 180^\circ$$

$$\therefore \angle A = 60^\circ$$

$$\therefore \angle BOC = 120^\circ$$

$$\therefore \angle BHC = \angle DHE \text{ และ } \angle DHE + \angle A = 180^\circ$$

$$\therefore \angle BHC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\therefore \angle BHC = \angle BOC \therefore BCHO \text{ มีวงกลมผ่านได้}$$

นั่นคือ $BCHIO$ มีวงกลมผ่านได้

Ex IV Given $\triangle ABC$ แนบในวงกลมมี H เป็นจุด Orthocentre

Prove A เป็นจุด Circumcentre ของ $\triangle HH_1H_2$

Const ลาก AH_1

Proof

$$\therefore \angle AHD = \angle DBC \text{ แต่ } \angle DBC = \angle AH_1C$$

$$\therefore \angle AHD = \angle AH_1D$$

$$\therefore AD \text{ เป็นด้านร่วม และ } \angle ADH = \angle ADH_1 = 90^\circ$$

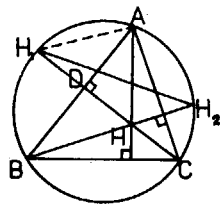
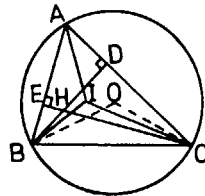
$$\therefore \triangle ADH \cong \triangle ADH_1 \text{ (ม.ก.ม.)}$$

$$\therefore AH_1 = AH \text{ ทำนองเดียวกัน } AH = AH_2$$

$$\therefore AH = AH_1 = AH_2$$

$$\therefore A \text{ เป็นจุด Circumcentre ของ } \triangle HH_1H_2$$

Q.E.D.



Ex V Given $\triangle$ พื้แตก XYZ ของ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

Prove $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

Proof

$$\therefore 2\angle CZY = 2\angle BYZ$$

$$\therefore \angle CZY = \angle BYZ$$

$$\therefore \angle CZY = \angle CAX, \angle BYZ = \angle BAX$$

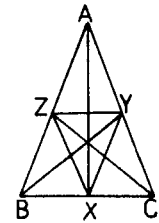
$$\therefore \angle CAX = \angle BAX$$

$$\therefore \angle BXA = \angle CXA = 1 \text{ มุมจาก และ } AX \text{ เป็นด้านร่วม}$$

$$\therefore \triangle ABX \cong \triangle ACX \text{ (ม.ก.ม.)}$$

$$\therefore AB = AC$$

$$\therefore ABC \text{ เป็น } \triangle \text{ หน้าจั่ว}$$



Q.E.D.

Ex VI Given $\triangle ABC$ มี DEF เป็น $\triangle$ พื้แตก

Prove $\triangle DEF = 2 \triangle ABC \cos A \cos B \cos C$

Const $EG \perp DF$ ที่ G

Proof

$$\therefore \triangle BFD \sim \triangle ABC \therefore \frac{DF}{AC} = \frac{BD}{BA} = \cos B$$

$$\therefore DF = AC \cos B$$

ทำนองเดียวกัน $DE = AB \cos C$

$$\therefore \triangle DEF = \frac{1}{2} DF \cdot EG$$

$$= \frac{1}{2} AC \cos B \cdot ED \sin \angle EDF$$

$$\text{แต่ } \angle EDF = 2\angle ABE \text{ และ } \angle ABE + \angle A = 90^\circ$$

$$\therefore \angle EDF = 180^\circ - 2\angle A$$

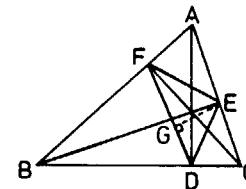
$$\therefore \triangle DEF = \frac{1}{2} AC \cdot \cos B \cdot AB \cos C \cdot \sin (180^\circ - 2\angle A)$$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot \sin 2A$$

$$= AC \cdot (AB \sin A) (\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$$

$$= AC \cdot BE (\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$$

$$= 2 \triangle ABC (\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C) \text{ Q.E.D.}$$



ExVII Given H เป็นจุด Orthocentre ของ $\triangle ABC$

X,Y,Z เป็นจุด Circumcentre ของ $\triangle ABH, \triangle BHC$

และ $\triangle AHC$ ตามลำดับ XY, YZ, ZX ตัดกันที่ BH,

CH และ AH ที่ P,Q และ R ตามลำดับ

Prove H เป็นจุด Circumcentre ของ $\triangle XYZ$

Const ลาก HX, HY, PQ, QR, PR

Proof

XY, YZ, ZX ย่อมแบ่งครึ่งและ $\perp$ กับ BH, CH และ AH

ที่ P,Q และ R ตามลำดับ

$\therefore XZ \parallel BC$ และ $QP \parallel BC$

$\therefore QP \parallel XZ \quad \therefore \angle YQP = \angle YZX$

$\therefore \angle YQP = \angle YHP \quad \therefore \angle YHP = \angle YZX$

ทำนองเดียวกัน $\angle PHX = \angle YZX$

$\therefore \angle YHP = \angle PHX \quad \therefore HP$ เป็นด้านร่วม,

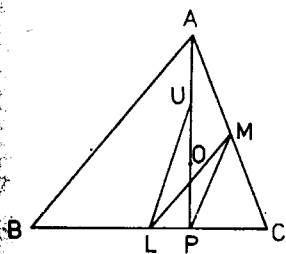
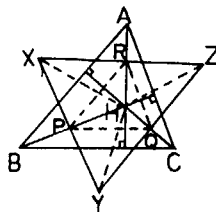
$\angle HPX = \angle HPY = 1$ มุมฉาก

$\therefore \triangle HPX \cong \triangle HPY$ (ม.ค.ม.) $\therefore XP = YP$

$\therefore HP \perp$ และแบ่งครึ่ง XY ทำนองเดียวกัน HQ และ HR

แบ่งครึ่งและ $\perp$ กับ YZ และ ZX

นั่นคือ H เป็นจุด Circumcentre ของ $\triangle XYZ$ Q.E.D.



ExVIII Given O เป็นจุด Orthocentre ของ $\triangle ABC$ มี $AB > AC$

L,U,M เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC, AO, AC, P อยู่บน BC

Prove $\angle LUP = \angle LMP = \angle C - \angle B$

Proof

$\therefore L,P,M,U$ มี N.P.C ผ่านได้ $\therefore \angle LUP = \angle LMP$

$\angle LUP = 180^\circ - 90^\circ - \angle PLU = 90^\circ - \angle PLU$

$\angle PLU = \angle MLU + \angle PLM = \angle MPU +$

$\angle LBA$ ($\angle B$)

แต่ $\angle MPU = \angle MAP = 90^\circ - \angle C$

$\therefore \angle LUP = 90^\circ - (90^\circ - \angle C + \angle B)$

$= \angle C - \angle B$

Q.E.D.

เส้นซิมสัน (Simson's line)

[เรื่องนี้ได้อธิบายไว้อย่างละเอียดแล้วในหลักสูตรชั้น ม.ศ. 4 จึงจะขอกล่าวเพียง ทวนทบทวนนำไปใช้อ้างอิงได้]

จากรูป ถ้า P เป็นจุดใดๆ บนส่วนโค้งของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle ABC$

และ L, M, N เป็นจุดปลายเส้นที่ลากจากจุด P มายังด้าน BC,

AB, CA ตามลำดับแล้ว จะได้จุด L, M, N อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

เส้นตรง LMN นี้เรียกว่า เส้นซิมสันหรือเส้นพิเทเกส ของจุด P

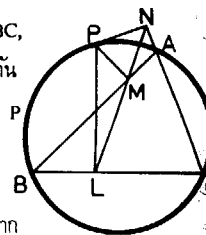
สำหรับ $\triangle ABC$

บทกลับ

ถ้า P เป็นจุดๆ หนึ่งซึ่งทำให้จุดปลายเส้นที่ลากจากจุด P ที่ลาก

ไปยังด้านทั้ง 3 ของ $\triangle ABC$ อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันแล้ว จะได้ว่า

จุด P อยู่บนส่วนโค้งของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle ABC$



ExI Given P เป็นจุดๆ ใดๆ บนเส้นรอบวงของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle ABC$

$PX \perp BC$ ที่ X ตัดเส้นรอบวงที่ R, XYZ เป็นเส้นซิมสันของ P

Prove $AR \parallel XYZ$

Const ลาก PB

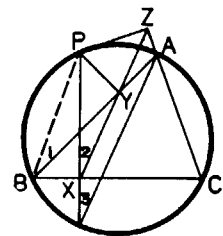
Proof $\therefore \square PBXY$ concyclic $\therefore \angle 1 = \angle 2$

$\therefore \angle 1 = \angle 3 \quad \therefore \angle 2 = \angle 3$

$\therefore \angle 2 = \angle 3 \quad \therefore AR \parallel XY$

นั่นคือ $AR \parallel XYZ$

Q.E.D.



Ex II Given $\triangle ABC$ บรรจุในวงกลม, $AD \perp BC$ และเลื่อยออกไปตัด

เส้นรอบวงที่ P, XY สัมผัสวงกลมที่ A และ EDF เป็น

เส้นซิมสันของจุด P สำหรับ $\triangle ABC$

Prove $XY \parallel EDF$

Const ลาก PB, PC

Proof $\therefore \square ABPC$ บรรจุในวงกลม $\therefore \angle 1 = \angle 2$

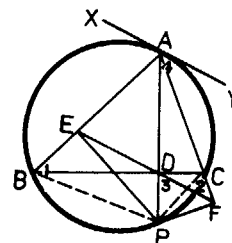
$\therefore \square PFCD$ concyclic $\therefore \angle 2 = \angle 3$

$\therefore \angle 1 = \angle 3$

$\therefore \angle 1 = \angle 4 \quad \therefore \angle 3 = \angle 4$

นั่นคือ $XY \parallel EDF$

Q.E.D.



Ex III Given $\triangle ABF$, $\triangle AED$, $\triangle BEC$, $\triangle CFD$

Prove วงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle$ ที่กำหนดให้ ตัดกันที่จุดเดียวกัน

Const ให้วงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle AED$ และ $\triangle ABF$ ตัดกันที่

P ลากเส้น PX, PW, PY, PZ ทั้งจากกับเส้น ABE, DCE, BCF, ADF ตามลำดับ

Proof $\therefore$ XYZ เป็นเส้นสัมผัสของจุด P สำหรับ $\triangle ABF$

$\therefore$ XYZ อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

$\therefore$ XWZ เป็นเส้นสัมผัสของจุด P สำหรับ $\triangle AED$

$\therefore$ XWZ อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

$\therefore$ X, W, Y, Z อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

จากบทกลับของเส้นสัมผัส

$\therefore$ X, W, Y อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน $\therefore$ P อยู่บน

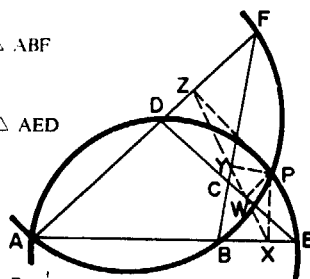
ส่วนโค้งของวงกลมที่ล้อม $\triangle BEC$

$\therefore$ Y, Z, W อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน $\therefore$ P อยู่บน

ส่วนโค้งของวงกลมที่ล้อม $\triangle CFD$

นั่นคือวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle ABF$, $\triangle AED$, $\triangle BEC$,

$\triangle CFD$ ตัดกันที่จุดเดียวกัน คือ จุด P Q.E.D.



Ex IV Given LMN เป็นเส้นสัมผัสของจุด P สำหรับ $\triangle ABC$, H เป็น

จุด Orthocentre ของ $\triangle ABC$, ลาก PH

Prove LMN แบ่งครึ่ง PH

Const ลาก $AD \perp BC$ เลยออกไปตัดส่วนโค้งของวงกลมที่ E

ลาก PE ตัด BC ที่ X ต่อ HX ออกไปพบ PL ที่ต่อออกไปที่ F ให้ PF ตัดเส้นรอบวงที่ G ลาก AG

Proof $\therefore$ HD = DE $\therefore$ $\angle 1 = \angle 5$

$\therefore$ PF // AE $\therefore$ $\angle 4 = \angle 5 \therefore \angle 1 = \angle 4$

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2 \therefore \angle 2 = \angle 4 \therefore$ GA // FH

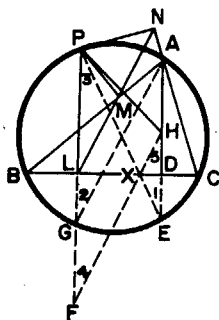
$\therefore$ LMN // GA $\therefore$ LMN // FH

$\therefore$ $\angle 3 = \angle 1 \therefore \angle 3 = \angle 4 \therefore$ PL = LF

$\therefore$ L เป็นจุดกึ่งกลางกัน PF และ LMN // FH

$\therefore$ LMN แบ่งครึ่ง PH

Q.E.D.



จุดรวม

Ex V Given $\triangle ABC$, $\triangle DBE$, $\triangle XCE$, $\triangle XDA$

Prove จุด Orthocentre ของ $\triangle$ ที่กำหนดให้อยู่ในแนวเส้นตรงตรงเดียวกัน

Const ให้ P เป็นจุดตัดของ Circumcircle ของ $\triangle ADX$ และ

$\triangle CXE$, $PL \perp BC$, $PM \perp DE$, $PN \perp AC$, $PO \perp AB$

Proof จาก Ex III เราได้ LN เป็นเส้นสัมผัสของ $\triangle$ ทั้ง 4

และวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle ABC$, $\triangle DBE$ ย่อมผ่านจุด P

ด้วย นั่นคือ LN เป็นเส้นสัมผัสของ $\triangle$ ทั้ง 4 รูป

และจาก Ex IV เราได้ว่า เส้นสัมผัสของจุด P สำหรับ

$\triangle$ นั้น ย่อมแบ่งครึ่งเส้นที่ต่อระหว่างจุด P กับจุด

Orthocentre ของ $\triangle$ นั้น

ดังนั้นถ้าเราต่อ PL ออกไปถึง X' โดยให้ $PL = LX'$

แล้วลากเส้นจาก X' ถึงจุด Orthocentre ของ $\triangle$ ทั้ง 4 รูป

เส้น LN ก็จะแบ่งครึ่งเส้นที่ต่อจุด P กับจุด Orthocentre

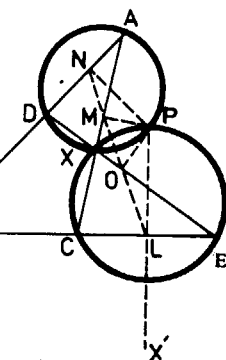
ของ $\triangle$ ทั้ง 4 รูป นั่นคือเส้นที่ลากจาก X' ไปถึงจุด

Orthocentre ทั้ง 4 จะขนานกับเส้น LN

$\therefore$ จุด Orthocentre ของ $\triangle$ ทั้ง 4 นี้จะเรียงกันอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน Q.E.D.

EXERCISES

1. จุด P, Q อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle ABC$ ซึ่ง $PQ \perp BC$ จงพิสูจน์ว่ามุมที่เกิดขึ้นระหว่างเส้นสัมผัสของจุด P, Q สำหรับ $\triangle ABC$ เท่ากับ $\angle PAQ$
2. เส้นสัมผัสของ P สำหรับ $\triangle ABC$ // เส้นผ่า ศ.ก. ของ วงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle$ ซึ่งลากจาก A จงพิสูจน์ว่า $PA \parallel BC$
3. ถ้า I เป็นจุด In-centre ของ $\triangle ABC$ และ AI ต่อออกไปพบเส้นรอบวงของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle ACB$ ที่ X จงพิสูจน์ว่าเส้นสัมผัสของจุด X สำหรับ $\triangle ABC$ ตั้งฉากกับ AX
4. $\triangle ABC$ มี $\angle A = 1$ มุมฉาก เส้นสัมผัสของ P ตัด AP ที่ Q จงพิสูจน์ว่า $PA \perp$ เส้นผ่า ศ.ก. ที่ผ่านจุด Q
5. ถ้า PQ เป็นออร์ธของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle ABC$ และ // BC จงพิสูจน์ว่า เส้นสัมผัสของจุด P สำหรับ $\triangle ABC \perp AQ$
6. AD เป็นส่วนสูงของ $\triangle ABC$ และต่อออกไปพบเส้นรอบวงของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle$ ที่ X ต่อจุด X กับจุด P บนเส้นรอบวงของวงกลมให้ PX ตัด BC ที่ U ต่อจุด H ซึ่งเป็นจุด Orthocentre ของ $\triangle ABC$ กับจุด U จงพิสูจน์ว่า $UH \parallel$ เส้นสัมผัสของจุด P สำหรับ $\triangle ABC$



7. $\triangle BAC$ บรรจุในวงกลม เส้นตรงที่ลากจาก A โดยไม่แบ่งครึ่งมุม BAC ตัด BC ที่ D และตัดเส้นรอบวงที่จุด E ทำให้ $AB \cdot AC = AD \cdot AE$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว
8. ABCD เป็น $\square$ ใด ๆ บรรจุในวงกลม มี $AB \parallel CD$ ถ้า P เป็นจุดใด ๆ บนเส้นรอบวงของวงกลมจงพิสูจน์ว่า จุดปลายเส้นที่ลากจาก P มาถึง AC, AD, BC, BD, มีวงกลมผ่านได้
9. AB, AC, AD เป็นคอร์ดของวงกลม วงกลมที่มี AB, AC และ AD เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ตัดกันที่ P, Q, R จงพิสูจน์ว่า P, Q, R อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
10. $\triangle ABC$ แนบในวงกลม P เป็นจุดบนเส้นรอบวง เส้นตรงที่ลากจาก P มาถึงจาก AB, BC, CA ตัดเส้นรอบวงที่จุด N, M, L ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $AL \parallel BM \parallel CN$ (จุด P อยู่บนส่วนโค้งน้อย AC)
11. ถ้า L, M, N เป็นจุดปลายเส้นที่ลากจาก P ซึ่งอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมที่ล้อม $\triangle ABC$ มาถึง BC, CA, AB ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า

$$(i) \triangle PLN \sim \triangle PAC$$

$$(ii) (PL \cdot MN) : (PM \cdot NL) : (PN \cdot LM) = BC : CA : AB$$

$$(iii) PA \cdot PL = PB \cdot PM = PC \cdot PN$$

ต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่นอกเหนือไปจากหลักสูตรเรขาคณิตของชั้น ม.ศ. ปลาย ซึ่งปกติจะไม่ค่อยได้พบ ถึงแม้จะมีได้ใช้ประโยชน์ในการศึกษาชั้นนี้ก็ตาม แต่ก็เป็นการปูพื้นฐานความเข้าใจเล็ก ๆ น้อย ๆ ไปก่อน เพื่อจะได้ศึกษาได้สะดวกในชั้นสูงต่อไป

ทั้งนี้จึงจะพิสูจน์ทฤษฎีบทแต่ละทฤษฎีให้เห็น เพราะจะได้พบการพิสูจน์ที่แปลก ๆ เป็นการฝึกฝนความคิดไปด้วย

แต่ก่อนที่จะเริ่มทฤษฎี จะขอทำความเข้าใจเรื่องอัตราส่วนเล็ก ๆ น้อย ๆ เสียก่อน เพราะมีความสัมพันธ์และสำคัญต่อทฤษฎีที่จะกล่าวต่อไป

การแบ่งเส้นตรง

เส้นตรงมีวิธีการแบ่งได้ 2 แบบคือ การแบ่งแบบภายในและภายนอก

→ AB เป็นเส้นตรงที่กำหนด จุด X แบ่งเส้น AB แบบภายในทำให้เกิดส่วนแบ่ง AX และ XB

→ AB เป็นเส้นตรงที่กำหนด จุด X แบ่งเส้น AB แบบภายนอกทำให้เกิดส่วนแบ่ง AX และ XB

จากกรณี 1 ถ้าเราเขียนส่วนแบ่งให้อยู่ในรูปของอัตราส่วน เราจะได้เครื่องหมายค่าของอัตราส่วนเป็น บวก โดยการพิจารณาทิศทางการเรียกชื่อ เช่น AX และ XB มีทิศการเรียกไปทิศทางเดียวกันก็มีเครื่องหมายเหมือนกัน

$$A \xrightarrow{\quad X \quad} B$$

จากกรณี 2 ทิศทางการเรียกชื่อส่วนแบ่งไปคนละทางกัน จึงมีเครื่องหมายต่างกัน

$$A \xrightarrow{\quad \quad \quad} B \quad X$$

ทำให้อัตราส่วนมีค่าเป็น ลบ

$$A \xrightarrow{\quad \quad \quad} B \quad X$$

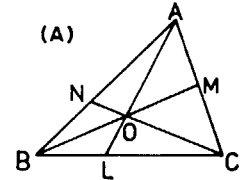
เรื่องเครื่องหมายนี้สำคัญมากในการทำ ความเข้าใจกับทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีของซีวา (Ceva's Theorem)

ถ้า O เป็นจุดจบของเส้นที่ลากจากจุด A, B, C ของ $\triangle ABC$ มาพบกัน BC, CA, AB ที่จุด L, M, N ตามลำดับแล้วจะได้ว่า

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$$

(A)



Given O เป็นจุดตัดของ AL, BM, CN

$$\text{Prove } \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$$

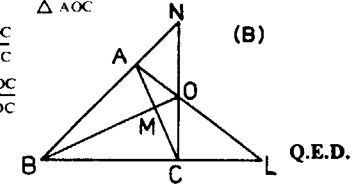
$$\text{Proof } \frac{BL}{LC} = \frac{\triangle ABL}{\triangle ACL} = \frac{\triangle BOL}{\triangle OLC} = \frac{\triangle ABL - \triangle BOL}{\triangle ACL - \triangle OLC} = \frac{\triangle AOB}{\triangle AOC}$$

$$\text{ในทำนองเดียวกัน } \frac{CM}{MA} = \frac{\triangle BOC}{\triangle AOB} \text{ และ } \frac{AN}{NB} = \frac{\triangle AOC}{\triangle BOC}$$

$$\therefore \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = \frac{\triangle AOB}{\triangle AOC} \times \frac{\triangle BOC}{\triangle AOB} \times \frac{\triangle AOC}{\triangle BOC}$$

$$\therefore \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$$

(B)



หมายเหตุ

(i) จุด O จะไม่อยู่บนด้านใดด้านหนึ่งของ $\triangle$

(ii) จากรูป (A) ค่าของอัตราส่วนเป็นบวก ดังนั้นผลคูณจึงเป็นบวก

จากรูป (B) ค่าของอัตราส่วนเป็นลบ 2 ค่าคือ

$\frac{BL}{LC}$ และ $\frac{AN}{NB}$ ส่วน $\frac{CM}{MA}$ เป็นบวก ดังนั้นผลคูณจึงเป็นบวก

(iii) บทกลับของ ทบ. นี้คือ ถ้า AL, BM และ CN ตัดกันทำให้

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1 \text{ จะได้ว่า } AL, BM, CN \text{ พบกันที่จุด } O \text{ หนึ่ง}$$

Ex 1 Given วงกลมตัด $\triangle ABC$ ที่ $P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2$

ทำให้ AP_1, BQ_1 และ CR_1 พบกันที่จุด ๆ หนึ่ง

Prove AP_2, BQ_2 และ CR_2 ย่อมพบกันที่จุด ๆ หนึ่ง

Proof

$$\left(\frac{BP_1}{P_1C} \cdot \frac{CQ_1}{Q_1A} \cdot \frac{AR_1}{R_1B} \right) \left(\frac{BP_2}{P_2C} \cdot \frac{CQ_2}{Q_2A} \cdot \frac{AR_2}{R_2B} \right) = \frac{BP_1 \cdot BP_2}{R_1B \cdot R_2B} \cdot \frac{CQ_1 \cdot CQ_2}{P_1C \cdot P_2C} \cdot \frac{AR_1 \cdot AR_2}{Q_1A \cdot Q_2A} = 1$$

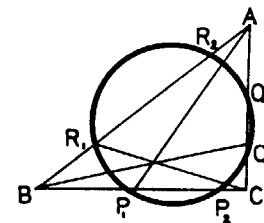
$$\therefore BP_1 \cdot BP_2 = R_1B \cdot R_2B \text{ และทำนองเดียวกัน}$$

$$\text{แต่ } \frac{BP_1}{P_1C} \cdot \frac{CQ_1}{Q_1A} \cdot \frac{AR_1}{R_1B} = 1$$

$$\therefore \frac{BP_2}{P_2C} \cdot \frac{CQ_2}{Q_2A} \cdot \frac{AR_2}{R_2B} = 1$$

$\therefore AP_2, BQ_2$ และ CR_2 ย่อมพบกันที่จุด ๆ หนึ่ง (จากบทกลับของทฤษฎีของซีวา)

Q.E.D.



Ex II Given $AD \perp BC, BE \perp AC, CF \perp AB$

Prove AD, BE, CF ย่อมพบกันที่จุด ๆ หนึ่ง โดยบทกลับ
ของทฤษฎีของซีว้า

Proof

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle BCF \therefore \frac{BD}{FB} = \frac{AD}{CF} \dots\dots\dots(1)$$

$$\therefore \triangle BCE \sim \triangle ACD \therefore \frac{CE}{DC} = \frac{BE}{AD} \dots\dots\dots(2)$$

$$\therefore \triangle ACF \sim \triangle ABE \therefore \frac{AF}{EA} = \frac{CF}{BE} \dots\dots\dots(3)$$

$$\therefore (1) \times (2) \times (3)$$

$$\frac{BD}{FB} \cdot \frac{CE}{DC} \cdot \frac{AF}{EA} = \frac{AD}{CF} \times \frac{BE}{AD} \times \frac{CF}{BE} = 1$$

$$\therefore \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

$\therefore$ จากบทกลับของทฤษฎีของซีว้า จะได้ AD, BE และ CF ย่อมพบกันที่จุด ๆ หนึ่ง Q.E.D.

ทฤษฎีของ Menelaus (Menelaus's Theorem)

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดด้าน BC, CA, AB ของ $\triangle ABC$ ที่ D, E, F ตามลำดับแล้ว

จะได้ $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$

Given เส้นตรงตัด $\triangle ABC$ ที่ D, E, F

Prove $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$

Const ลากเส้น AX, BY, CZ ตั้งฉากกับเส้น DEF ที่ X, Y, Z ตามลำดับ

Proof จากรูป 1

$$\therefore \triangle BYD \sim \triangle CDZ \therefore \frac{BD}{DC} = -\frac{BY}{CZ} \dots\dots\dots(1)$$

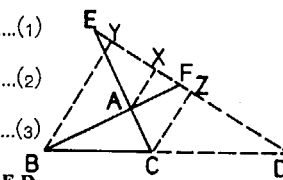
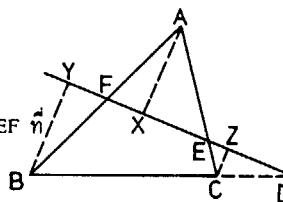
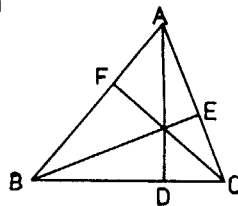
$$\therefore \triangle CZE \sim \triangle AXE \therefore \frac{CE}{EA} = +\frac{CZ}{AX} \dots\dots\dots(2)$$

$$\therefore \triangle AFX \sim \triangle BYF \therefore \frac{AF}{FB} = +\frac{AX}{BY} \dots\dots\dots(3)$$

$$\therefore (1) \times (2) \times (3), \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1 \quad \text{Q.E.D.}$$

หมายเหตุ

- (I) จากรูปที่ 2 ค่าของอัตราส่วน $\frac{CZ}{AX}$ และ $\frac{AX}{YB}$ จะเป็นลบด้วย ดังนั้นผลคูณจึงได้ ลบ เช่นกัน
- (II) เส้น DEF จะไม่ผ่านจุดยอดของ $\triangle$ ใดๆใดจุดหนึ่งเลย
- (III) บทกลับของ ทบ. นี้ก็คือ ถ้าจุด D, E, F อยู่บนด้านของ BC, CA, AB ของ $\triangle ABC$ แล้วทำให้ $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$ แล้วจะได้ว่า จุด D, E, F อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน



(IV) บทกลับนี้มีความสำคัญต่อการพิสูจน์ให้จุด 3 จุดอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันมาก

Ex I Given $\triangle ABC$ แนบในวงกลม PA, QB, RC สัมผัสวงกลมพ

กับส่วนของ BC, CA, BA ตามลำดับ

Prove P, Q, R อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

Const ลาก PR, RQ

Proof $\therefore \triangle ABP \sim \triangle ACP \therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AP}{CP} = \frac{AB}{AC}$

$\therefore \triangle ABP$ กับ $\triangle ACP$ มีจุดยอด A ร่วมกัน

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AP}{CP} \Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}$$

ในทำนองเดียวกันได้ $-\frac{CQ}{QA} = \frac{BC}{AB^2}$ และ $-\frac{AR}{RB} = \frac{AC}{BC^2}$

$$\therefore \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = -1$$

นั่นคือ จากบทกลับของทฤษฎีของ Menelaus จะได้ว่าจุด

P, R, Q จะอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

Q.E.D.

Ex II Given D, E, F เป็นจุดสัมผัสของวงกลมที่แนบใน $\triangle ABC$ ต่อ

FE, FD, ED พบด้าน BC, AC, AB ที่ P, Q, R

Prove P, Q, R อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

Proof จาก $\triangle ABC$, PEF เป็นเส้นผ่าน, QDF เป็นเส้นผ่าน

และ EDR เช่นกัน

$$\therefore \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1 \dots\dots\dots(1)$$

$$\therefore \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1 \dots\dots\dots(2)$$

$$\therefore \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AR}{RB} = -1 \dots\dots\dots(3)$$

$$(1) \times (2) \times (3);$$

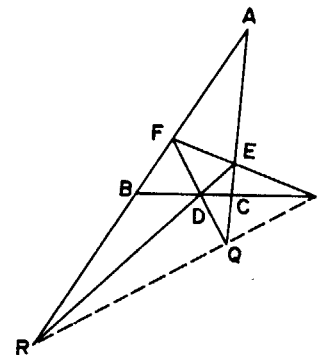
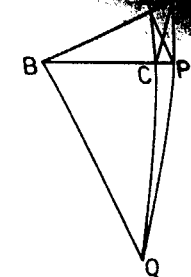
$$\left[\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} \right] \left[\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AF}{FB} \right] \left[\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AR}{RB} \right] = -1 \dots\dots\dots(4)$$

$\therefore$ D, E, F เป็นจุดสัมผัสของวงกลมที่แนบใน $\triangle ABC$

$$\therefore BD = BF, CD = CE, AF = AE$$

$$\therefore \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = -1$$

$\therefore$ จากบทกลับ ทบ. ของ Menelaus จะได้ P, Q, R อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน Q.E.D.



ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของการใช้ทฤษฎีของซีวาและมินเอสร่วมกัน

Ex III Given ABC เป็น Δ , $\frac{AX}{XC} = \frac{BY}{YA} = \frac{1}{2}$

Find BP:PX

Const ลาก AP เลยออกไปตัด BC ที่ Z

จาก Ceva's Theorem $\frac{BZ}{ZC} \cdot \frac{CX}{XA} \cdot \frac{AY}{YB} = 1$

$$\therefore \frac{BZ}{ZC} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} = 1 \quad \therefore \frac{BZ}{ZC} = \frac{1}{4}$$

จาก ΔBCX โดย Menelaus's Theorem จะได้ว่า

$$\frac{BZ}{ZC} \cdot \frac{CA}{AX} \cdot \frac{XP}{PB} = -1$$

$$\therefore \frac{1}{4} \cdot (-3) \cdot \frac{XP}{PB} = -1$$

$$\therefore XP:PB = 4:3$$

$$\therefore BP:PX = 3:4$$

Ans.

The Euler Line

เส้นตรงที่ลากต่อระหว่างจุด Orthocentre กับจุด Circumcentre ของ Δ รูปหนึ่งย่อมผ่านจุด

Centroid ของ Δ รูปนั้นด้วย และเส้นนี้จะถูกจุด Centroid แบ่งออกเป็นอัตราส่วน 1:2

Given O เป็นจุด Orthocentre ของ ΔABC ที่มี S เป็นจุด

Circumcentre, ลาก SO

Proof (i) SO ผ่านจุด Centroid ของ ΔABC

(ii) จุด Centroid แบ่ง SO ออกเป็นอัตราส่วน 1:2

Const ลาก $SL \perp BC$ ลาก AL ตัด SO ที่ G

ให้ U เป็นจุดกึ่งกลาง AO และ J เป็นจุดกึ่งกลาง SO

Proof

$\therefore LU$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของ N.P.C. ของ ΔABC

$\therefore LU$ แบ่งครึ่ง SO ที่ J

$\therefore SL \parallel AO \quad \therefore \Delta SLJ \cong \Delta JOU$

$$\therefore OU = SL \quad \therefore AO = 2 SL \quad \therefore \frac{AO}{SL} = 2$$

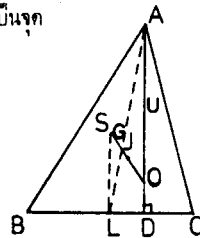
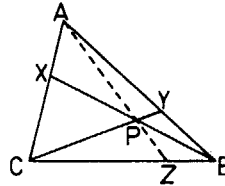
$$\therefore \Delta SLG \sim \Delta AOG \quad \therefore \frac{AO}{SL} = \frac{AS}{GL} = \frac{OG}{GS} = 2$$

$\therefore AG = 2 GL \quad \therefore AL$ แบ่งครึ่ง BC

$\therefore G$ เป็นจุด Centroid ของ ΔABC

$$\text{และ } \frac{GS}{OG} = \frac{1}{2}$$

Q.E.D.



EXERCISES

1. ΔABC มีเส้น AD, BE, CF ลากไปพบกันที่จุด O ตัดกัน

ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1$

2. แบ่งเส้น AB, BC ที่ F, D ทำให้ $AF = \frac{5}{3} AB$, $BD = \frac{3}{4} BC$ ถ้า FD ตัดกัน AC ที่ E

ของ ΔABC จงหาค่าของ AE:AC

3. ABC เป็น Δ แบ่ง BC อย่างภายนอกที่ L ทำให้เกิดอัตราส่วนแบ่ง = 5:2 และแบ่ง CA อย่างภายนอกที่ M ในอัตราส่วน 4:3 ถ้า AL และ BM แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่ O จงหาค่าของอัตราส่วนซึ่ง CO ตัด AB

4. ΔABC มี BE, CF พบกันที่ E, F ทำให้ $EF \parallel BC$ ถ้า BE, CF แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่ X จงพิสูจน์ว่า AX เป็นเส้นมัธยฐานของ ΔABC

5. เส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอก A ของ ΔABC พบ BC ที่ L และเส้นแบ่งครึ่งมุมภายใน B พบ CA ที่ M ถ้า LM ตัด AB ที่ R จงพิสูจน์ว่า CR แบ่งครึ่งมุม C

6. สี่เหลี่ยมคางหมู ABCD มี $AB \parallel CD$ ถ้า AD, BC ถูกตัดไปพบกันที่ X และเส้นทแยงมุมทั้ง 2 ตัดกันที่ Y จงพิสูจน์ว่า XY แบ่งครึ่ง AB

7. G เป็นจุด Centroid ของ ΔABC ต่อ AG ถึง P ทำให้ $AG = GP$ ลากเส้นจาก P ขนานกับ BC, CA, AB พบกันที่ L, M, N ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า จุด L, M, N อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

8. วงกลมสัมผัสด้าน BC, CA, AB อย่างภายในของ ΔABC ที่ X, Y, Z ถ้าต่อ YZ ออกไปพบกัน BC ที่ L จงพิสูจน์ว่า $BX:XC = BL:CL$

9. ถ้าลากเส้นจากจุด A, B, C ของ ΔABC ไปพบกันตรงข้ามที่จุด D, E, F ทำให้ AD, BE, CF พบกันที่จุด ๆ หนึ่ง ถ้า EF พบ BC ที่ K จงพิสูจน์ว่า $BD:DC = BK:KC$

10. เส้นสัมผัสวงกลมที่ล้อมรอบ ΔABC ที่จุด A, B, C พบกันตรงข้ามที่จุด P, Q, R จงพิสูจน์ว่า (i) $\frac{BP}{CP} = \frac{AB^2}{AC^2}$ (ii) P, Q, R อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

11. X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลางของ BC, CA, AB ของ ΔABC AP, BQ, CR พบกันที่จุด ๆ หนึ่งโดย AP, BQ, CR พบกันที่ CB, CA, AB ที่จุด P, Q, R ถ้า ZQ พบกัน BC ที่ D, XR พบกัน CA ที่ E และ YP พบกัน AB ที่ F จงพิสูจน์ว่า

$$(i) \frac{BD}{CD} = \frac{AO}{OC} \quad (ii) D, E, F \text{ อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน}$$

12. ABCD เป็น $\square$ โดย X, Y, Z เป็นจุดใด ๆ บน BC, AD, AB YZ ตัด BD ที่ R, RX ตัด DC ที่ S, ZX พบ AC ที่ Q จงพิสูจน์ว่า Y, Q, S อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

13. P เป็นจุดใด ๆ ใน $\triangle ABC$ ลากเส้นจากจุด A', B', C' ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC, CA, AB ขนานกับ PA, PB, PC ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่าเส้นเหล่านี้ (ที่ลากจาก A', B', C') ย่อมพบกันที่จุด ๆ หนึ่ง

14. P เป็นจุดใด ๆ ใน $\triangle ABC$ AP, BP, CP ตัดด้าน BC, CA, AB ที่จุด L, M, N ตามลำดับ MN, NL, LM ตัดด้าน BC, CA, AB ที่ X, Y, Z ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า X, Y, Z อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

Euler ninepoint

1. ถ้า Euler line ของ $\triangle$ ผ่านจุดยอดจุดหนึ่งของ $\triangle$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $\triangle$ นั้นต้องเป็น $\triangle$ หน้าจั่วหรือ $\triangle$ มุมฉาก
2. จงพิสูจน์ว่า nine-point circle ของ $\triangle$ ที่มีฐานครึ่งแน่น มุมยอดคงที่สัมผัสวงกลมอีกวงหนึ่งที่ตั้งครึ่งแน่นด้วย

สรุปเกี่ยวกับจุดรวม

เส้นตรงจะพบกันที่จุด ๆ หนึ่งเมื่อ

- ก. เป็นเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้านทั้ง 3 ของ $\triangle$
- ข. เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในทั้ง 3 ของ $\triangle$
- ค. เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอก 2 มุมกับเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในที่เหลือหนึ่งมุม
- ง. เป็นเส้นมัธยฐานของ $\triangle$
- จ. เป็นเส้นตั้งฉากทั้งลากจากมุมทั้ง 3 ของ $\triangle$ ไปยังด้านตรงข้าม

ข้อควรจำ

1. จุดตัดของข้อ ก. เรียกว่า จุด ศ.ก. ของวงกลมที่ล้อม $\triangle$ (circumcentre)
2. จุดตัดของข้อ ข. เรียกว่า จุด ศ.ก. ของวงกลมที่แนบใน $\triangle$ (In-centre)
3. จุดตัดของข้อ ค. เรียกว่า จุด ศ.ก. ของวงกลมที่แนบนอก $\triangle$ (Ex-centre)
4. จุดตัดของข้อ ง. เรียกว่า จุด Centroid
5. จุดตัดของข้อ จ. เรียกว่า จุด Orthocentre
6. $\triangle$ ที่เกิดจากการต่อจุดปลายเส้นตั้งฉากในกรณีข้อ จ. เรียกว่าสามเหลี่ยมพีคัล (Pedal Triangle)
7. วงกลมที่ผ่านจุดปลายเส้นตั้งฉาก ในกรณีข้อ จ. จะผ่านจุดกึ่งกลางของจุดยอดของสามเหลี่ยมกับจุด Orthocentre กับผ่านจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม วงกลมนี้เรียกว่า Nine-point Circle
8. เส้นต่อจุดระหว่าง จุด Circumcentre กับจุด Orthocentre ของ $\triangle$ ใดๆ ย่อมผ่านจุด Centroid ของ $\triangle$ นั้น เส้นนี้เรียกว่า Euler Line

EXERCISES

1. วงกลม O บรรจุใน $\triangle$ ด้านทำ ABC รัศมี $OP \parallel BC$, วงกลมซึ่งมี AP เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ตัด AC, AB ที่ M, N จงพิสูจน์ว่า MN แบ่งครึ่งรัศมี OA
2. $ABCD$ เป็น $\square$ ใดๆ ที่มีวงกลมแนบใน จงพิสูจน์ว่า วงกลมที่แนบใน $\triangle ABD$ และ $\triangle CBD$ สัมผัส BD ที่จุดเดียวกัน
3. เส้นสัมผัสวงกลมที่ B และ C ซึ่งล้อมรอบ $\triangle ABC$ พบกันที่ T ถ้าวงกลมที่มี T เป็นจุด ศ.ก. ผ่าน B, C ตัด AB, AC ที่ P, Q ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า
 - (i) PQ เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ของวงกลมที่ T เป็นจุด ศ.ก.
 - (ii) จุด Orthocentre ของ $\triangle APQ$ อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมที่ล้อม $\triangle ABC$
4. เส้นสัมผัส TB และ TC สัมผัสวงกลมที่ล้อม $\triangle ABC$ ลากเส้นขนานกับเส้นสัมผัสวงกลมที่ A ผ่านจุด T ตัด AC ที่ Y, AB ที่ Z จงพิสูจน์ว่า $TY = TC = TB = TZ$ และถ้า E เป็นจุดกึ่งกลาง BC จงพิสูจน์ว่า $\angle BAE = \angle CAT$
5. จงพิสูจน์ว่า N.P.C. ของ $\triangle$ มุมฉากจะสัมผัสกับวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle$ นั้นที่มุมฉาก
6. $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมใด ๆ มี A', B', C' เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC, CA, AB ตามลำดับ และ A'', B'', C'' เป็นจุดกึ่งกลางของ DA, DB, DC จงพิสูจน์ว่า $A'A'', B'B'', C'C''$ จะพบกันที่จุด ๆ หนึ่งและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน
7. วงกลมแนบใน $\triangle ABC$ สัมผัสด้าน BC, CA, AB ที่ X, Y, Z, YZ ตัด BC ที่ X' ลากเส้นผ่านจุด $B \parallel AC, AX$ พบกัน AX' ที่ K, M จงพิสูจน์ว่า $AM = MK$
8. O เป็นจุด ศ.ก. ของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle ABC$ วงกลมที่มี O เป็นจุด ศ.ก. ตัดด้าน AB ที่ P, Q และด้าน AC ที่ R, S, PS, RQ ตัดกันภายในวงกลมและพบกัน BC ที่ K, L จงพิสูจน์ว่า $BK = CL$
9. ถ้าเส้นแบ่งครึ่งมุมภายใน A ของ $\triangle ABC$ พบด้าน BC ที่ D และพบเส้นรอบวงของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle$ ที่ E จงพิสูจน์ว่า $AD^2 = BA \cdot AC - BD \cdot DC$
10. จงพิสูจน์ว่า จุด Centroid ของ $\triangle$ ใดๆ จะแบ่งเส้นเชื่อมระหว่างจุด Orthocentre กับจุด Circumcentre ออกเป็นอัตราส่วน 2:1
11. จงพิสูจน์ว่าจุด Circumcentre ของ $\triangle ABC$ จะเป็นจุด Orthocentre ของ $\triangle A'B'C'$ ซึ่ง A', B', C' เป็นจุดกึ่งกลางของด้านของ $\triangle ABC$
12. ถ้า H เป็น Orthocentre และ O เป็นจุด Circumcentre ของ $\triangle ABC$ ถ้า AO และ AH ถูกต่อออกไปพบเส้นรอบวงของวงกลมที่ล้อม $\triangle ABC$ ที่ X และ Y ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า
 - (i) $\angle BAX = \angle CAY$ (ii) $BX = CY = HC$ (iii) HX แบ่งครึ่ง BC

13. ถ้าเส้นแบ่งครึ่งมุม A อย่างภายในพบเส้นรอบวงของวงกลมที่ล้อม $\triangle ABC$ ที่ P และ M, N เป็นจุดปลายเส้นทั้งฉากที่ลากจาก P ไปยัง AB, AC ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า

$$(i) \triangle BPM \cong \triangle CPN \quad (ii) AM = AN = \frac{1}{2}(AB+BC)$$

14. G เป็นจุด Centroid ของ $\triangle ABC$ จงพิสูจน์ว่า กำลังสองของความยาวเส้นสัมผัสจากจุด A ไปยังวงกลมที่ล้อม $\triangle BGC = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

15. H เป็นจุด Orthocentre, O เป็นจุด Circumcentre ของ $\triangle ABC$ AO พบเส้นรอบวงที่ P จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABC, \triangle AHP$ มีจุด Centroid ร่วมกัน

16. ถ้าลากเส้นจากจุด Orthocentre ไปยังฉากกับเส้นแบ่งครึ่งมุม A ของ $\triangle ABC$ จงพิสูจน์ว่า จุดกึ่งกลางของด้าน BC, จุดปลายเส้นตั้งฉากจากจุดนี้และจุด ศ.ก. ของ N.P.C. ของ $\triangle ABC$ อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

17. ถ้า O เป็นจุด Orthocentre ของ $\triangle ABC$ ซึ่ง $AB > AC$ และ L, U, M เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC, AO, AC ถ้า $AP \perp BC$ ที่ P จงพิสูจน์ว่า $\angle LUP = \angle C - \angle B$

18. ถ้า J เป็นจุด ศ.ก. ของ N.P.C ของ $\triangle ABC$ และ I, I₁ เป็นจุด ศ.ก. ของวงกลมที่แนบในและแนบนอก $\triangle$ ตรงข้ามมุม A จงพิสูจน์ว่า $IJ = \frac{1}{2}R - r$

เมื่อ R เป็นรัศมีของ Circumcircle และ r เป็นรัศมีของ Inscribed circle

19. จงพิสูจน์ว่า N.P.C ของ $\triangle$ ใดๆ จะสัมผัสกับ Inscribed circle ของ $\triangle$ นั้น

20. ABCD เป็นสี่เหลี่ยมบรรจุในวงกลม E, F เป็นจุด Orthocentre ของ $\triangle ABC, \triangle ABD$ จงพิสูจน์ว่า CDFE เป็นสี่เหลี่ยมคางหมู

21. ถ้า S เป็นจุด Circumcentre, I เป็นจุด ศ.ก. ของ Escribed circle ของ $\triangle ABC$ ตรงข้ามมุม A มีรัศมี = r จงพิสูจน์ว่า $SI^2 = R^2 + 2Rr$

22. ถ้า ABC เป็น $\triangle$ มุมฉากที่ B ถ้าวงกลมที่แนบในสามเหลี่ยมนี้ สัมผัสด้าน AC ที่ Y จงพิสูจน์ว่า $2AY \cdot YC = AB \cdot BC$

23. ถ้า O เป็นจุด Circumcentre และ G เป็นจุด Centroid ของ $\triangle ABC$

$$\text{จงพิสูจน์ว่า } OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$

24. ถ้า H เป็นจุด Orthocentre ของ $\triangle ABC$ จงพิสูจน์ว่า รัศมีของ Circumcircle ของ $\triangle ABC, \triangle HCA$ เท่ากัน และถ้า O, S เป็นจุด ศ.ก. ของวงกลมทั้ง 2 นี้ จงพิสูจน์ว่า OS และ AC ตัดกันเป็นมุมฉาก

25. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $PA^2 + BC^2 = PB^2 + CA^2 = PC^2 + AB^2$ โดย P เป็นจุดใด ๆ ใน $\triangle ABC$ แล้ว P จะเป็นจุด Orthocentre ของ $\triangle ABC$

26. ถ้าวงกลมที่เท่ากันสามวงกักันที่จุด A จงพิสูจน์ว่า A จะเป็นจุด Orthocentre ของ $\triangle$ ที่เกิดจากการต่อจุดตัดที่เหลือ

27. ถ้า PQ เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ของ Circumcircle ของ $\triangle ABC$ จงพิสูจน์ว่าเส้นสัมผัสของ P และ Q สำหรับ $\triangle ABC$ จะกักันเป็นมุมฉากบนเส้นรอบวงของ N.P.C ของ $\triangle ABC$ นั้น

28. ใน $\triangle$ ใดๆ จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ เมื่อ r_a, r_b, r_c เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของ $\angle A, \angle B, \angle C$ ตามลำดับ

29. H เป็นจุด Orthocentre ของ $\triangle ABC$ D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB ต่อ HC ถึง P ทำให้ $CP = CH$ ต่อ CD ถึงจุด Q ทำให้ $DQ = DC$ ถ้า O เป็นจุด Circumcentre ของ $\triangle ABC$ จงพิสูจน์ว่าจุด P, O, Q อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

30. ถ้า r = รัศมีวงกลมแนบใน $\triangle ABC$ r_a, r_b, r_c = รัศมีแนบนอก $\triangle ABC$ สัมผัส a, b, c ตามลำดับ h_a, h_b, h_c = ส่วนสูงที่ลากจากจุด A, B, C ตามลำดับ และ S = พ.ท. $\triangle ABC$ จงพิสูจน์ว่า

$$1) r r_a r_b r_c = S^2$$

$$2) \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

จุดจบ

31. เส้นแบ่งมุมครึ่งภายในและภายนอกของ $\angle A$ ของ $\triangle ABC$ พบฐาน BC ที่ D, E ทำให้ $AD = AE$ ถ้าเส้นรอบวงของวงกลมที่มี BC เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ตัด AB, AC ที่จุด P, Q จงพิสูจน์ว่า $CP = CQ$

32. ABCD เป็น $\square$ ด้านขนาน ต่อ AB ถึง E ให้ $BE = BC$ ที่จุด E ลากเส้น ตั้งฉาก AE พบเส้นที่ลากผ่าน C และตั้งฉากกับ BD ที่ F จงพิสูจน์ว่า FA แบ่งครึ่ง $\angle A$

33. AE, BF, CH ตั้งฉากกับเส้นตรงใด ๆ ที่ผ่านจุด Centroid ของ $\triangle ABC$ ที่จุด E, F, H จงพิสูจน์ว่า $AE = BF = CH$

34. $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ ใดๆ มี AD, BE, CF เป็นเส้นมัธยฐาน จงพิสูจน์ว่า $AD + BE + CF < \frac{3}{4}(AB + BC + CD)$ แต่ $> \frac{1}{2}(AB + BC + CD)$

35. จงพิสูจน์ว่า พ.ท. ของ $\triangle$ ที่เกิดจากการเชื่อมจุดปลายเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด Centroid ของ $\triangle$ ที่กำหนดให้มายังด้านทั้งสามของ $\triangle$ จะเท่ากับ $\frac{4s^3(a^2 + b^2 + c^2)}{9a^2b^2c^2}$

เมื่อ a, b, c เป็นด้านของ $\triangle$ ที่กำหนดให้

.. S .. พ.ท. ..

36. $\triangle ABC$ มี $\angle B > \angle C$ จงพิสูจน์ว่า เส้นแบ่งครึ่ง $\angle B <$ เส้นแบ่งครึ่ง $\angle C$

37. $\triangle ABC$ เคลื่อนที่ได้แต่มีวงกลมล้อมรอบและวงกลมแนบในคงที่แน่นอน จงพิสูจน์ว่าผลบวกของรัศมีของวงกลมแนบนอก $\triangle ABC$ มีค่าคงที่

38. O เป็นจุด ศ.ก. ของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle ABC$ DE, PQ เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ของวงกลมที่แนบใน $\triangle ABC$ และ DE ผ่านจุด O ด้วย ถ้า $DE \perp PQ$ จงพิสูจน์ว่า เส้นรอบรูป $\triangle PQO =$ เส้นผ่า ศ.ก. ของวงกลม ABC

39. ถ้า p, q, r เป็นเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดหนึ่งใน $\triangle ABC$ มายังด้าน BC, CA, AB และ h_a, h_b, h_c เป็นส่วนสูงที่ลากจากจุด A, B, C จงพิสูจน์ว่า $(p:h_a) + (q:h_b) + (r:h_c) = 1$

40. H เป็นจุด Orthocentre ของ $\triangle ABC$ ลาก $HP \perp CH$ พบเส้นรอบวงของวงกลม BCH ที่จุด P จงพิสูจน์ว่า ABPH เป็น $\square$ ด้านขนาน

41. ถ้า H เป็นจุด Orthocentre และ O เป็นจุด Circumcentre ของ $\triangle ABC$ ต่อ AH, BH, CH พบเส้นรอบวงกลมที่จุด D, E, F จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงที่ลากผ่าน D, E, F และขนานกับ OA, OB, OC พบกันที่จุด ๆ หนึ่ง

42. $\triangle ABC$ มี D, E, F เป็นจุดปลายเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด A, B, C มายังด้านตรงข้าม CQ $\perp ED$ ที่ Q, BP $\perp DF$ ที่ P จงพิสูจน์ว่า $EQ = FP$

43. $\triangle ABC$ มี $AD \perp BC$ ที่ D DP, DQ $\perp AC, AB$ ที่ P, Q จงพิสูจน์ว่า B, C, P, Q concyclic และ $\angle DPB = \angle CQD$

44. ใน $\triangle$ มุมแหลม จงพิสูจน์ว่า เส้นรอบรูปของ $\triangle$ ที่เกิดน้อยกว่า 2 เท่าของส่วนสูงของ $\triangle$ มุมแหลมนั้นเสมอ (ส่วนสูงนี้ลากจากมุมใดของ $\triangle$ ก็ได้)

45. DE เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle ABC$ ซึ่งมี H เป็นจุด Orthocentre และ F เป็นจุด Centroid จงพิสูจน์ว่า DF แบ่งครึ่ง EH

46. $\triangle ABC$ แนบในวงกลมเส้นแบ่งครึ่ง $\angle A$ พบ BC ที่ D จงพิสูจน์ว่าเส้นผ่า ศ.ก. ที่ผ่านจุด A, เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AD และเส้นตั้งฉาก BC ที่จุด D พบกันที่จุด ๆ หนึ่ง

47. O เป็นจุด ศ.ก. ของวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$ เส้นแบ่งครึ่ง $\angle A$ พบ BC ที่จุด D ลาก $DE \perp AO$ ที่ E ต่อ DE พบ AC ที่ F จงพิสูจน์ว่า $AF = AB$

48. AD เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ของวงกลมมี BC เป็นคอร์ด ลาก BE, CF $\perp AD$ ที่ E, F ถ้า AQ $\perp BC$ ที่ Q และ P เป็นจุดกึ่งกลาง BC จงพิสูจน์ว่า P เป็นจุด Circumcentre ของ $\triangle EFQ$

49. D, E, F เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB, BC, CA ของ $\triangle ABC$ เส้นแบ่งครึ่ง $\angle B$ พบ FE, FD ที่ P, Q จงพิสูจน์ว่า CP, AQ ตั้งฉากกับเส้นแบ่งครึ่ง $\angle B$ และ $FP = FQ$

50. D เป็นจุด In-centre ของ $\triangle ABC$ ต่อ AD พบ BC ที่ E ถ้า DE แบ่งครึ่ง $\angle BDC$ จงพิสูจน์ว่า ABC เป็น $\triangle$ หนักรั่ว

บรรดาขั้นสูงต่ำ

Definition

ค่าของสิ่งต่าง ๆ เช่นความยาวเส้นตรง ขนาดของมุม ขนาดของพื้นที่ ฯลฯ มีการเปลี่ยนแปลงไปได้ 2 ทางคือ

1. การแปรในทางสูงขึ้นเรื่อย ๆ จนถึงขีดสูงสุดขีดหนึ่งซึ่งเป็นขีดจำกัด ขีดนี้เรียกว่า

Maximum (ค่าสูงสุด)

2. การแปรไปในทางต่ำลงเรื่อย ๆ จนถึงขีดต่ำสุดขีดหนึ่งซึ่งเป็นขีดจำกัด ขีดนี้เรียกว่า Minimum (ค่าต่ำสุด)

วิธีการคิดโจทย์เกี่ยวกับ Maxima และ Minima

I ฟังก์ชันใด ๆ ใน function ชุดหนึ่ง ๆ จะมีค่า Maximum หรือ Minimum อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงค่าเดียวเท่านั้น เช่น

1.1 $y = ax^2 + bx + c$ ($a =$ จำนวนจริง + ไก ๆ) จะมีค่าต่ำสุด ค่าเดียวเท่านั้น

1.2 $y = -ax^2 + bx + c$ ($a =$ จำนวนจริง + ไก ๆ) จะมีค่าสูงสุด ค่าเดียวเท่านั้น

II ต้องรู้การหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดจาก function ต่าง ๆ อาจโดยวิธี

2.1 ลองแทนค่าแล้ว plot เป็นกราฟ อ่านค่าจากกราฟ

2.2 โดยใช้วิธีทางพีชคณิต เช่น การ Completing the square หรือ การหา

discriminants

2.3 โดยการ differentiate ฟังก์ชันนั้น โดย $\frac{dy}{dx} = 0$ ดังนี้เช่น

จาก 1.1 $\frac{dy}{dx} = 2ax + b = 0$

$$x_{\min} = -\frac{b}{2a}$$

จาก 1.2 $\frac{dy}{dx} = -2ax + b = 0$

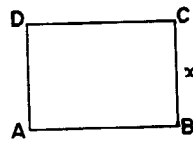
$$x_{\max} = \frac{b}{2a}$$

เนื่องจากการ differentiate เป็นเรื่องที่ย้อนอกหลักสูตรของ ม.ศ. 5 แต่เป็นเรื่องที่

ประโยชน์ ทำให้หาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดได้รวดเร็ว จึงนำตัวอย่างที่นำเสนอการจาก 1.1 และ 1.2 มาใช้

Ex I จะล้อมรั้วที่ยาว 120 เมตร บนฝั่งโดยให้ด้านหนึ่งติดน้ำ และไม่ต้องล้อมรั้ว ล้อมเพียง 3 ด้าน ของ □ ผืนผ้า จึงหา พ.ท. สูงสุดที่ล้อมได้

วิธีทำ



ให้ $AD = BC = x$ เมตร $\therefore CD = 120 - 2x$ เมตร

$$\text{พ.ท. (A)} = x(120 - 2x) = 120x - 2x^2$$

$$\frac{dA}{dx} = 120 - 4x = 0$$

$$x = 30$$

$$\therefore \text{พ.ท. สูงสุด} = 30 \times 60 = 1800 \text{ ตร. เมตร}$$

Ans.

Ex II ลวดยาว 86 นิ้ว ถ้าเป็นรูป □ 3 มิติ ให้ฐานเป็น □ จักรูต จึงหาปริมาตรสูงสุดที่ได้

$$V = x^2(9 - 2x)$$

$$\frac{dV}{dx} = 18x - 6x^2 = 0$$

$$x = 3$$

$$V_{\max} = 9 \times 3 = 27$$

$$\therefore \text{ปริมาตรสูงสุด} = 27 \text{ ลบ.นิ้ว}$$

Ans.

III พิจารณาจากโจทย์ที่กำหนดให้ สร้างรูปแล้วคิดถึงสิ่งที่โจทย์ต้องการ สังเกตหาค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดจากรูป แล้วพิสูจน์ให้เป็นจริง ซึ่งในการพิสูจน์เกี่ยวกับเรื่องนี้นั้นเราควรคำนึงถึง

3.1 ต้องมีการเปรียบเทียบเพื่อให้เห็นจริง อย่างน้อยระหว่าง 2 สิ่ง แต่โจทย์บางข้ออาจจะต้องเปรียบเทียบถึง 3 สิ่ง

3.1 ควรใช้ทฤษฎีที่ใช้ในการอ้างในเรื่องนี้บ่อย ๆ ได้แก่

ในรูป $\triangle$ ใด ๆ มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านยาวย่อมใหญ่กว่ามุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านสั้น (ทบ. 8)

ในรูป $\triangle$ ใด ๆ ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมใหญ่ย่อมยาวกว่าด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมเล็ก (ทบ. 10)

ในรูป $\triangle$ ใด ๆ ผลบวกของด้าน 2 ด้านย่อมยาวกว่าด้านที่ 3 (ทบ. 11)

เส้นตรงทั้งหลายที่ลากจากจุด ๆ หนึ่งไปยังเส้นตรงที่กำหนดให้เส้น 1 เป็นเส้นสั้นที่สุด (ทบ. 12)

ถ้า $\triangle$ 2 รูปมีด้านเท่ากัน 2 ด้าน ด้านต่อด้าน แต่มุมในระหว่างด้านเท่าของรูปหนึ่งใหญ่กว่า

มุมในระหว่างด้านเท่าของอีกรูปหนึ่งแล้ว ฐานของรูปที่มีมุมใหญ่ย่อมยาวกว่าฐานของรูปที่มีมุมเล็ก และข้อความของทฤษฎีนี้กลับกันได้ (ทบ. 19)

ภายในวงกลมคอร์ดที่อยู่ใกล้จุด ศ.ก. ย่อมยาวกว่าคอร์ดที่อยู่ไกลจุด ศ.ก. และคอร์ดที่ยาว

ยอมอยู่ใกล้จุด ศ.ก. มากกว่าคอร์ดที่สั้น (ทบ. 35)

ถ้าลากเส้นตรงจากจุดใด ๆ ภายในวงกลมไปยังเส้นรอบวง

ศ.ก. เส้นที่สั้นที่สุดคือเส้นที่เป็นส่วนต่อของเส้นนั้น และเส้นซึ่งมีมุมเล็กที่สุด

ที่มีมุมเล็ก (ทบ. 36)

ถ้าลากเส้นตรงจากจุดใด ๆ ภายนอกวงกลมไปยังเส้นรอบวง เส้นที่ยาวที่สุดคือเส้นที่ลากผ่าน

จุด ศ.ก. เส้นที่สั้นที่สุดคือเส้นที่มีส่วนต่อผ่านจุด ศ.ก. และเส้นซึ่งมีมุมใหญ่ที่สุด ศ.ก. ย่อมยาวกว่าเส้น

ที่มีมุมเล็ก (ทบ. 37)

ในวงกลมเดียวกันหรือวงกลมที่เท่ากัน มุมที่จุด ศ.ก. หรือมุมที่เส้นรอบวงบนคอร์ดที่ยาวจะโตกว่ามุมบนคอร์ดที่สั้นกว่า เมื่อเป็นมุมในส่วนของวงกลมซีกใหญ่กว่าเหมือนกัน และจะเล็กกว่ามุมบนคอร์ดที่สั้นกว่าหากเป็นมุมในส่วนของวงกลมซีกเล็กกว่าเหมือนกัน

คอร์ดที่ยาวที่สุดภายในวงกลม คือเส้นผ่า ศ.ก.

ใน $\triangle$ มุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉากย่อมยาวที่สุด

(3.3) ควรจำสัจพจน์ที่นำไปอ้างอิงในเรื่องนี้บ่อย ๆ คือ

□ ผืนผ้าที่เกิดจากผลคูณของส่วนแบ่งของเส้นตรงที่กำหนดความยาวให้เส้นหนึ่ง มี พ.ท. มากที่สุด เมื่อจุดแบ่งเส้นตรงนั้นเป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง

เส้นตรงเส้นหนึ่งที่กำหนดความยาวให้ จะรับมุมที่จุด ๆ หนึ่งบนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งที่กำหนดให้ได้โตที่สุดเมื่อจุดนั้นเป็นจุดสัมผัสของเส้นตรงเส้นหลัง และวงกลมที่สัมผัสนั้นมีเส้นตรงเส้นแรกเป็นคอร์ด

กำหนดจุด 2 จุดอยู่ภายนอกเส้นตรงเส้นหนึ่งและอยู่ข้างเดียวกัน จากจุดทั้งสองนี้ ลากเส้นมายังจุดบนเส้นตรงที่สามเท่ากัน ความยาวของเส้นตรงที่ลากจากจุดภายนอกมายังจุดนั้นย่อมสั้นที่สุด

กำหนดเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน และจุด ๆ หนึ่งภายในเขตมุมที่เกิดจากการตัดของเส้นตรงทั้งสองนั้น มีเส้นตรงเส้นที่ 3 ลากผ่านจุดที่กำหนดให้ และตัดเส้นตรง 2 เส้นแรกเป็น $\triangle$ รูป $\triangle$ ที่เกิดขึ้นจะมี พ.ท. น้อยที่สุด เมื่อเส้นตรงเส้นที่ 3 นั้นถูกแบ่งครึ่งโดยจุดภายในเขตมุมจุดนั้น

ผลบวก □ จักรูตที่เกิดจากส่วนแบ่งบนเส้นตรงที่กำหนดให้ จะน้อยสุดเมื่อจุดแบ่งคือจุดกึ่งกลางของเส้นนั้น

เมื่อกำหนด ขนาดและส่วนสูง $\triangle$ หน้าจั่วจะมี พ.ท. มากที่สุด

.. ฐานและพื้นที่ .. เส้นรอบรูปสั้นที่สุด

.. มุมยอดและส่วนสูง .. พ.ท. น้อยที่สุด

$\triangle$ ที่บรรจุในวงกลมที่กำหนดให้ $\triangle$ ด้านเท่ามีเส้นรอบรูปยาวที่สุด

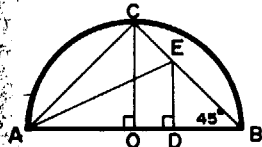
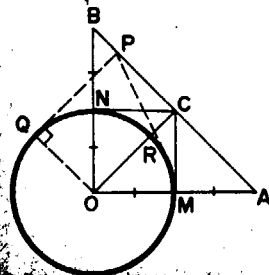
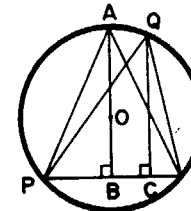
$$A.M. \geq G.M. \geq H.M. \left(\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \right)$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \left\{ \text{จาก } (a-b)^2 \geq 0 \text{ ยกกำลัง 2 แล้วย้ายข้าง} \right\}$$

3.4 พิจารณาจากสูตรที่เกี่ยวข้องในรูปนี้ ๆ

Q.E.D.

Q.E.D.


$$\therefore QP > MC$$

$$BQ > QC \quad \therefore BA > QC$$


$\triangle PAR > \triangle PQR$ (ฐานร่วมกันแต่สูง $BA > QC$)
 $\therefore \triangle PQR$ ไม่ใช่ $\triangle$ แนบในวงกลมที่มี พ.ท. มากที่สุด
 และ $\triangle$ ทุกรูปที่แนบในวงกลมจะสามารถสร้าง $\triangle$ ให้
 มี พ.ท. มากกว่าได้เสมอ ยกเว้นเมื่อ $\triangle$ นั้นเป็น $\triangle$
 ด้านเท่า

ดังนั้น $\triangle$ ด้านเท่า มี พ.ท. มากที่สุด

Q.E.D.

Ex VI Given O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่มี C เป็นจุด ศ.ก.

Find ลากเส้นตรงจาก O ไปตัดวงกลมที่ A และ B ทำให้ $\triangle ABC$ มีพื้นที่มากที่สุด

Const ลากรัศมี CP, CR ทั้งจากกัน โยง PR ใช้ C เป็นจุด
 ศ.ก. รัศมีเหล่านี้เส้นตั้งฉากที่ลากจาก C ไปยัง PR
 เชื่อมวงกลม ลากเส้นตรงจาก O ไปสัมผัสวงกลมวงนี้
 และตัดวงกลมซึ่งกำหนดให้ที่ A และ B

Proof จากการสร้างจะได้ $\angle ACB = 1$ มุมฉาก
 $\therefore AC, BC$ ยาวคงที่ ให้ AC เป็นฐาน $\triangle ABC$
 มี พ.ท. มากที่สุด เมื่อจุด B อยู่สูงที่สุด ซึ่งก็คือเมื่อ
 $BC \perp AC$ นั่นเอง

Q.E.D.

Ex VII Given A, B, C เป็นจุดครึ่ง 3 จุด ลาก $BM, CN \perp$ เส้นตรง AD ใดๆ

Find AD ต้องอยู่ในแนวใดที่ทำให้ $BM + CN$ มีค่ามากที่สุด

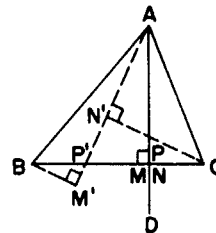
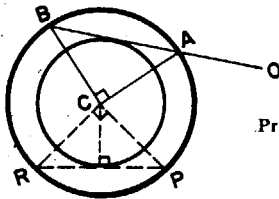
Const ลาก $AD \perp BC$ ที่ P ให้ AD เคลื่อนมาที่ AD' ลาก
 $BM', CN' \perp AD'$ ที่ M', N' ตามลำดับ

Proof $BM' + CN'$ มีค่ามากที่สุดเมื่อ BM', CN' ยาวที่สุด
 $\therefore BM', CN'$ ต่างก็เป็นคอร์ดของวงกลมที่มี BP'
 CP' เป็นเส้นผ่า ศ.ก.

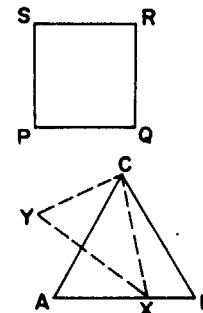
ดังนั้น $BM' + CN'$ จะมากที่สุดเมื่อ BM' และ CN'
 เป็นเส้นผ่า ศ.ก. เอง ก็คือเมื่อ $AD \perp BC$ ที่ P
 (P, M, N , จะเป็นจุดเดียวกัน)

นั่นคือ $BM + CN$ มากที่สุดเมื่อ $AD \perp BC$

Q.E.D.



Ex VIII



Proof

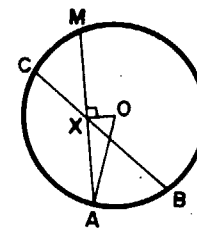
จากการสร้างทำให้ $\square BCXY$ มี พ.ท. = $\triangle ABC$ และ $\square BCXY$ มีเส้นรอบรูปยาว
 = $\square PQRS$

$\therefore \square PQRS$ จะมีพื้นที่มากกว่า $\square BCXY$ (จากการพิสูจน์แล้วว่า

$\square$ ใดๆก็ตามที่มีเส้นรอบรูปยาวเท่ากัน $\square$ จตุรัสมี พ.ท. มากที่สุด)

$\therefore \square PQRS > \triangle ABC$ ($\square BCXY$ มี พ.ท. = $\triangle ABC$) Q.E.D.

Ex IX



Given สามเหลี่ยม A และ B เป็นจุดครึ่ง และ $BX \cdot XC = AX^2$

Find ตำแหน่งของ X ที่ทำให้ $BX \cdot XC$ มีค่ามากที่สุด

Const $\therefore BX \cdot XC = AX \cdot XM$ (ทบท. 75)

และ $BX \cdot XC = AX^2$ (โจทย์)

$\therefore AX = XM$

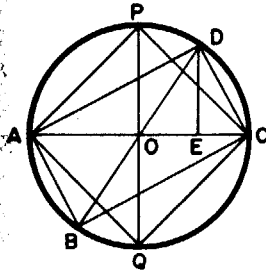
ลาก XO, OA จะได้ $\angle AXO = 1$ มุมฉาก

$\therefore$ ทางเดินของจุด X ที่ทำให้ $BX \cdot XC = AX^2$ คือ
 เส้นรอบวงกลมที่มี AO เป็นเส้นผ่า ศ.ก.

เมื่อ $BX \cdot XC$ มีค่ามากที่สุด AX จะยาวที่สุดด้วย และ
 นั่นก็คือเมื่อ X ทับจุด O พอดี

Q.E.D.

Ex X



Given O เป็นจุดศ.ก. ของวงกลม ABCD เป็น $\square$ ผืนผ้าที่แนบในวงกลม และ APCQ เป็น $\square$ จตุรัสที่แนบในวงกลม

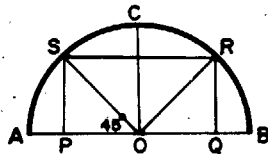
Prove พ.ท. $\square$ จตุรัส APCQ มากกว่าที่สุด

Const ลาก $DE \perp AC$

Proof $OD > DE$ (ทบท. 12)
 $OD = OP \therefore OP > DE$
 พ.ท. $\triangle APC >$ พ.ท. $\triangle ADC$ ($AC = AC, OP > DE$)
 พ.ท. $\square APCQ >$ พ.ท. $\square ABCD$
 พ.ท. $\square APCQ$ มากกว่าที่สุด

Q.E.D.

Ex XI



Given O เป็นจุดศ.ก. ของครึ่งวงกลมที่มี AB เป็นเส้นผ่าศ.ก.

Find $\square$ ผืนผ้าแนบในครึ่งวงกลมนี้ให้มี พ.ท. มากกว่าที่สุด

Const ลาก $OC \perp AB$ พบส่วนโค้งของวงกลมที่ C สร้าง $\angle AOS = 45^\circ$ แขน OS พบส่วนโค้งของวงกลมที่ S

ลาก $SP \perp AB$ ที่ P ลาก $SR \parallel AB$ พบส่วนโค้งของวงกลมที่ R

ลาก $RQ \perp AB$ ที่ Q $\therefore \square PQRS$ เป็น $\square$ ที่ต้องการ

Proof PQRS เป็น $\square$ ผืนผ้า (มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก)

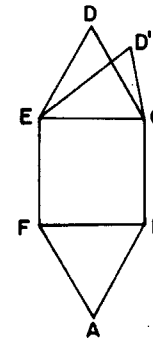
$\square$ ผืนผ้า PQRS เป็น $\frac{1}{2}$ ของ $\square$ จตุรัสซึ่งแนบในวงกลม (พิสูจน์ได้)

ในบรรดา $\square$ ผืนผ้าที่แนบในวงกลม $\square$ จตุรัสมี พ.ท. มากกว่าที่สุด (จาก Ex X)

$\square$ ผืนผ้า PQRS ที่ พ.ท. มากกว่าที่สุดในครึ่งวงกลม (จากข้อ 2,3)

Q.E.D.

Ex XII



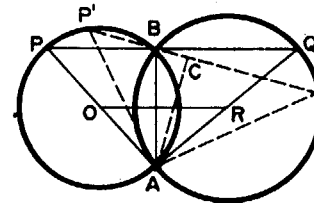
Given ABCDEF เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งมีเส้นรอบรูปเท่ากับของหกเหลี่ยม ABCD'EF

Prove หกเหลี่ยม ABCDEF > หกเหลี่ยม ABCD'EF

Proof $DE = DC$ (จากโจทย์)
 $\triangle DEC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว ($DE = DC$)
 $DE + DC = D'E + D'C$ (จากโจทย์)
 พ.ท. $\triangle DEC >$ พ.ท. $\triangle D'EC$ ($\triangle$ ที่มีเส้นรอบรูปยาวเท่ากัน หน้าจั่วมี พ.ท. มากกว่าที่สุด)
 พ.ท. หกเหลี่ยม ABCDEF > พ.ท. หกเหลี่ยม ABCD'EF

O.E.D.

Ex XIII



Given วงกลม 2 วงตัดกันที่ A, B PQ เป็นเส้นที่ลากผ่านจุด B พบเส้นรอบวงที่ P, Q

Find $\triangle APQ$ ให้มี พ.ท. มากกว่าที่สุด

Const ค่อย OR จาก B ลาก $PQ \parallel OR$ พบเส้นรอบวงที่ P, Q ค่อย AP, AQ

$\therefore \triangle APQ$ จะเป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

P เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่ง ค่อย P'B ออกไปพบเส้นรอบวงของอีกวงหนึ่งที่ Q ค่อย AP', AQ' ลาก $AC \perp P'Q$ ที่ C ค่อย AB

Proof $PQ > P'Q'$ (เส้นที่ลากผ่านจุดที่วงกลมตัดกัน $\parallel$ กับเส้นเชื่อมจุด ศ.ก. ย่อมยาวที่สุด)

$AB > AC$ (จาก ทบท. 12)

พ.ท. $\triangle APQ >$ พ.ท. $\triangle AP'Q'$ ($PQ > P'Q', AB > AC$)

พ.ท. $\triangle APQ$ มี พ.ท. มากกว่าที่สุด

N.B. พ.ท. $\triangle APQ = OR \cdot AB$

Q.E.D.

EXERCISES

1. $\triangle ABC$ มีด้าน $AB = 9$, $BC = 12$ CA ยาวได้อย่างมากที่สุดได้เท่าไร และสั้นที่สุดได้อย่างมากเท่าไร มุมทั้งสามของ $\triangle$ จึงเป็นมุมแหลมทั้งสามมุม
2. A และ B เป็นจุดสองจุดภายนอกวงกลม จงหาจุด P บนเส้นรอบวง ซึ่งทำให้ $AP + PB$ มีค่าต่ำที่สุด
3. จงแบ่งเส้นตรงเส้นหนึ่งอย่างภายในทำให้พ.ท. สี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งเกิดจากส่วนแบ่งมากที่สุด
4. เส้นตรง AB จำกัดความยาว เส้นตรง CD ไม่จำกัดความยาว จงหาจุดบนเส้นตรง CD ซึ่งทำให้ AB ปักมุมได้มากที่สุด
5. A และ B เป็นจุด 2 จุดอยู่ข้างเดียวกันของเส้นตรง CD ซึ่งไม่จำกัดความยาว จงหาจุด P บน CD ซึ่งทำให้ $AP + PB$ สั้นที่สุด
6. เส้นตรงทั้งหลายที่ลากผ่านจุด ๆ หนึ่ง ซึ่งอยู่ระหว่างเส้นตรงสองเส้นคู่ขนาน จงหาค่าแห่งของเส้นที่ลากผ่านจุดนั้นและตัดเส้นทั้งสองทำให้เกิด $\triangle$ มี พ.ท. น้อยที่สุด
7. จงลากเส้นตรงผ่านจุดตัดจุดหนึ่งของวงกลมสองวง แล้วต่อปลายทั้งสองข้างออกไปพบเส้นรอบวงของวงกลมทั้งสอง โดยทำให้เส้นตรงนั้นยาวที่สุด
8. ไม่ทรงอันหนึ่งเลื้อยอยู่ระหว่างไม้บรรทัดสองอันที่วางทำมุมฉากซึ่งกันและกัน จงหาค่าแห่งของไม้ซึ่งทำให้เกิด $\triangle$ มี พ.ท. มากที่สุด
9. ในบรรดา $\triangle$ มุมฉากทั้งหลายที่ตั้งอยู่บนด้านตรงข้ามมุมฉากเดียวกัน $\triangle$ มุมฉากหน้าจั่ว จะมีเส้นรอบรูปยาวที่สุด
10. AD เป็นเส้นตรงที่ลากผ่านจุดยอด A ของ $\triangle ABC$ อยู่ภายนอก $\angle BAC$, BM และ CN เป็นเส้นที่ลากจาก B และ C ไปยังจุดบน AD ที่ M, N ตามลำดับ จงหาว่า AD จะต้องอยู่ในแนวใด จึงทำให้ผลต่าง BM, CN มีค่าต่ำที่สุด
11. A, B เป็นจุดคงที่สองจุดนอกวงกลมซึ่งมี O เป็นจุด ศ.ก. เขียนวงกลมโดยใช้ AB เป็นคอร์ด และสัมผัสวงกลมเดิมอย่างภายในที่จุด M จงพิสูจน์ว่า AB จะรองรับมุมที่จุด M เล็กที่สุดในบรรดามุมที่จุดทั้งหลายบนเส้นรอบวงของวงกลม O นั้น
12. $\triangle$ ด้านเท่า ABC มีด้านยาวค่าละ 3" มีวงกลมล้อมรอบ P อยู่บน $\widehat{AB}$ น้อย จงพิสูจน์ว่า $AP + PB$ จะมีค่ามากที่สุดเท่ากับ $2\sqrt{3}$

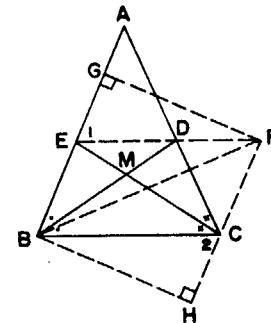
เบ็ดเตล็ด

Ex I ปัญหาเส้นแบ่งครึ่งมุม

“ถ้าเส้นแบ่งครึ่งมุม 2 มุมของ $\triangle$ รูปหนึ่งยาวเท่ากัน จงพิสูจน์ว่า $\triangle$ นั้นเป็น $\triangle$ หน้าจั่ว”

ปัญหาข้อนี้ถ้าทำเส้น ๆ ก็อาจจะคิดว่าเป็นปัญหาที่ง่าย ๆ ไม่น่าจะมีปัญหาอะไร แต่ถ้าท่านลองคิดดูให้ดี ท่านจะพบความยุ่งยากมาก ปัญหาข้อนี้เป็นปัญหาที่ซับซ้อนมากตั้งแต่สมัยกรีกโบราณ แม้กระทั่งยุคสมัยก็ยังคิดไม่ออก จนในที่สุด นักคณิตศาสตร์ 3 ท่านได้ช่วยกันคิด จึงสามารถพิสูจน์โจทย์ข้อนี้ได้ เราจะลองเสนอให้ท่านดูสัก 4 วิธี

วิธีที่ 1 (ของนักคณิตศาสตร์ 3 ท่าน)



Given $\triangle ABC$ มี BD, CE เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle B, \angle C$ ตัดกันที่จุด M โดยให้ $BD = CE$

Prove $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

Const สร้าง $\angle CEF = \angle CBD, \angle ECF = \angle BDC$ ให้ CF และ EF ตัดกันที่ F, ลาก $BH \perp FC$ ที่ต่อออกไปที่ H ลาก $FG \perp BA$ ต่อ BF

Proof 1. ใน $\triangle BCD$ และ $\triangle CEF$

มี $\angle CBD = \angle CEF, \angle BDC = \angle ECF, BD = CE$

$\therefore \triangle BCD \cong \triangle CEF$ จะได้ว่า $CD = CF, BC = EF$

2. $\angle BEC + \angle EBD = \angle BDC + \angle DCE$ (ทำ $\angle = \angle BMC$)

หรือ $\angle BEC + \angle CEF = \angle ECF + \angle BCE$

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ [$\angle 1 = 180^\circ - (\angle CEF + \angle BEC), \angle 2 = 180^\circ - (\angle ECF + \angle BCE)$]

3. ใน $\triangle BCH$ และ $\triangle EFG$ มี $\angle 1 = \angle 2, \angle H = \angle G, BC = EF$ (จากข้อ 1)

$\therefore \triangle BCH \cong \triangle EFG$ จะได้ว่า $BH = FG, EG = CH$

4. ใน $\triangle BFG$ และ $\triangle BFH$ มี $\angle H = \angle G, BF$ ด้านร่วม, $BH = FG$

$\therefore \triangle BFG \cong \triangle BFH$ จะได้ว่า $BG = FH$

5. $BG - EG = FH - CH$ [$\because BG = FH, EG = CH$ (ข้อ 3)] $BE = CF$
 นั่นคือ $BE = CD$ ($\because CF = CD$)
6. ใน $\triangle BCD$ และ $\triangle BCE$ มี $BE = CD$, BC ด้านร่วม, $BD = CE$ (โจทย์)
 $\therefore \triangle BCD \cong \triangle BCE$ จะได้ว่า $\angle B = \angle C$
 นั่นคือ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

Q.E.D.

วิธีที่ II (ศิษย์เก่า ค.อ.)

Proof $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$ (n)

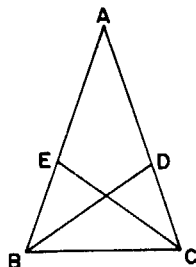
$$\frac{AB+BC}{BC} = \frac{AD+CD}{CD} \quad [\text{Compo}]$$

$$\frac{c+a}{a} = \frac{b}{CD}$$

$$\therefore CD = \frac{ab}{a+c} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{BC+AB}{AB} = \frac{AD+CD}{AD} \quad [\text{จาก (n) Inver et Compo}]$$

$$\therefore AD = \frac{bc}{a+c} \quad \dots\dots\dots (2)$$



$$BD^2 + AD \cdot CD = AB \cdot BC \quad (\text{ทบท. 76})$$

$$BD^2 + \frac{bc \cdot ab}{(a+c)^2} = ca$$

$$BD^2 = ca - \frac{b^2 ca}{(a+c)^2} = ca \left[1 - \frac{b^2}{(a+c)^2} \right]$$

$$BD^2 = ca \left[\frac{(a+c)^2 - b^2}{(a+c)^2} \right] \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{ทำนองเดียวกัน } CE^2 = ab \left[\frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2} \right] \quad \dots\dots\dots (4)$$

แต่ $BD = CE$ $\therefore (3) = (4); \frac{4ca(s)(s-b)}{(a+c)^2} = \frac{4ab(s)(s-c)}{(a+b)^2}$

$$c(s-b)(a+b)^2 = b(s-c)(a+c)^2$$

$$csa^2 + 2abcs + b^2cs - cba^2 - 2ab^2c - b^3c = bsa^2 + 2abcs + bc^2s - a^2bc - 2abc^2 - bc^3$$

$$bsa^2 - csa^2 - b^2cs + bc^2s + 2ab^2c - 2abc^2 + b^3c - bc^3 = 0$$

$$sa^2(b-c) - bcs(b-c) + 2abc(b-c) + bc(b^2-c^2) = 0$$

$$(b-c)[sa^2 - bcs + 2abc + bc(b+c)] = 0$$

$$\therefore b = c \quad \text{นั่นคือ } \triangle ABC \text{ เป็น } \triangle \text{ หน้าจั่ว}$$

Q.E.D.

วิธีที่ III

Proof $\triangle ABD + \triangle DBC = \triangle ACE + \triangle ECB = \triangle ABC$

$$\frac{1}{2} AB \cdot BD \sin \alpha + \frac{1}{2} BD \cdot BC \sin \alpha$$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot EC \sin \beta + \frac{1}{2} EC \cdot BC \sin \beta$$

$$BD = EC$$

$$\therefore AB \sin \alpha + BC \sin \alpha = AC \sin \beta + BC \sin \beta \quad \dots\dots\dots (1)$$

ใน $\triangle ABC$, ได้ว่า $\frac{AB}{\sin 2\beta} = \frac{AC}{\sin 2\alpha}$

$$\frac{AB}{2 \sin \beta \cos \beta} = \frac{AC}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\therefore \frac{AB \sin \alpha}{\cos \beta} = \frac{AC \sin \beta}{\cos \alpha}$$

ให้ $\frac{AB \sin \alpha}{\cos \beta} = \frac{AC \sin \beta}{\cos \alpha} = k \quad \dots\dots\dots (2)$

$$\therefore AB \sin \alpha = k \cos \beta, \quad AC \sin \beta = k \cos \alpha$$

เนื่องจาก $BD = CE$ ดังนั้น $2\alpha < \frac{\pi}{2}$ และ $2\beta < \frac{\pi}{2}$ เช่นกันจะเห็นว่าค่า k ต้องมากกว่า 0 เสมอ หรือ k เป็นบวกเสมอ แทนค่าที่ไดลงใน (1) จะได้ว่า

$$k \cos \beta + BC \sin \alpha = k \cos \alpha + BC \sin \beta$$

$$\therefore BC(\sin \alpha - \sin \beta) = k(\cos \alpha - \cos \beta)$$

$$BC \cdot 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} = k \cdot 2 \sin \frac{\beta-\alpha}{2} \sin \frac{\beta+\alpha}{2}$$

$$BC \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} = -k \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \sin \frac{\beta+\alpha}{2}$$

กรณีที่ 1 $\sin \frac{\alpha-\beta}{2} = 0 = \sin 0^\circ \quad \therefore \frac{\alpha-\beta}{2} = 0 \quad \alpha = \beta$

นั่นคือ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

กรณีที่ 2 $\sin \frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0$ เอา $\sin \frac{\alpha-\beta}{2}$ ทหารตลอดจะได้ $BC \cos \frac{\alpha+\beta}{2} = -k \sin \frac{\alpha+\beta}{2}$

$$\therefore \tan \frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{BC}{k}$$

$\therefore$ ทั้ง BC และ k ต่างก็เป็นค่าบวกเสมอ $\therefore \tan \frac{\alpha+\beta}{2} < 0$

$\therefore$ ใน $\triangle ABC, 0 < 2\alpha + 2\beta < 180^\circ$

$$0 < \frac{\alpha+\beta}{2} < 45^\circ$$

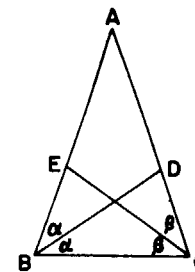
เป็นไปไม่ได้ที่ค่า $\tan$ ในช่วง $0 \rightarrow 45^\circ$ จะมีค่าลบ

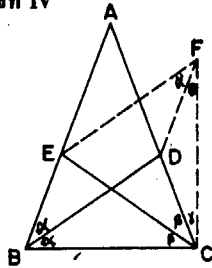
$\therefore \tan \frac{\alpha+\beta}{2} < 0$ เป็นเงื่อนไขที่ผิด กรณีที่ 2 จึงใช้ไม่ได้

นั่นคือ จะถูกต้องในกรณีที่ 1 หรือ $\sin \frac{\alpha-\beta}{2} = 0$ เท่านั้น

$\therefore \triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

Q.E.D.





Const □ ด้านขนาน BDFE บนด้าน BD, โยง FC

Proof $CE = BD, BD = EF$

$$\therefore CE = EF$$

นั่นคือ $\angle ECF = \angle EFC$

$$\theta + \alpha = \beta + \gamma$$

$$\text{สมมติ } \alpha < \beta$$

$$\therefore \theta > \gamma$$

$$DC > DF$$

$$\text{แต่ } DF = BE$$

$$\therefore DC > BE$$

ใน $\triangle EBC$ และ $\triangle DBC$, BC ด้านร่วม $CE = BD, BE < DC$

$\therefore \alpha > \beta$ ซึ่งขัดแย้งกับที่สมมติไว้ว่า $\alpha < \beta$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราให้ $\alpha > \beta$ ผลการพิสูจน์จะได้ $\alpha < \beta$ ซึ่งขัดแย้งกันอีก เมื่อเป็นไปไม่ได้ทั้ง 2 กรณี ก็เหลือกรณีสุดท้ายคือ $\alpha = \beta$ นั่นคือ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว Q.E.D.

Ex II

Given XYZ เป็น $\triangle$ ใดๆ, XPY, YZR, XZQ เป็น $\triangle$ ด้านเท่าที่อยู่บนด้านทั้งสามของ $\triangle XYZ$ โยง PZ, XR ตัดกันที่ O โยง QO, OY

Prove ก. QO, OY เป็นเส้นตรงเดียวกัน

$$\text{ข. } PZ = XR = QY$$

Proof $\triangle XYR \cong \triangle PYZ$ ($XY = PY, \angle XYR = \angle PYZ, YR = YZ$)

$$\angle 1 = \angle 2 \text{ (จากข้อ 1)}$$

$$\therefore O, Y, R, Z \text{ concyclic (ผล ทบ. 39)}$$

$$\therefore \angle ROZ = \angle ZYR = 60^\circ$$

$$\angle ROY = \angle RZY = 60^\circ \therefore \angle ZOY = 120^\circ$$

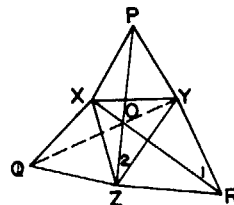
$$\therefore \angle XOY = 120^\circ \therefore \angle XOZ = 120^\circ$$

$$X, O, Z, Q \text{ concyclic } (\angle XOZ + \angle XQZ = 180^\circ) \therefore \angle QOZ = \angle QXZ = 60^\circ$$

$$\angle QOZ + \angle ROZ + \angle ROY = 180^\circ \therefore QOY \text{ เป็นเส้นตรงเดียวกัน} \dots (ก)$$

$$PZ = XR, QY = XR \therefore PZ = XR = QY \dots (ข)$$

Q.E.D.



Ex III

Given □ ABCD เป็น □ ใดๆ ต่อด้านตรงข้ามออกไปพบกันที่จุด X, Y และจากจุดให้ $XN = CD$,

$$XM = AB, QY = BC, PY = AD$$

Prove $MN = PQ$ และขนานกันด้วย

Const ลาก $AX \parallel CD$ และยาว = CD ด้วย โยง CX, BX

Proof $AX = CD$ และขนานกัน $\therefore \square ADCX$ เป็น □ ด้านขนาน (ทบ. 21)

$$\triangle NXM \cong \triangle ABX \text{ (} XM = AB, \angle NXM = \angle XAB, AX = NX \text{)}$$

$$\therefore MN = BX$$

$$\triangle BCX \cong \triangle PQY \text{ (} BC = QY, \angle BCX = \angle PYQ, CX = PY \text{)}$$

$$\therefore BX = PQ$$

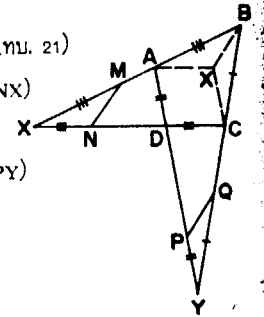
$$\therefore PQ = MN \text{ (ต่าง = BX)}$$

$$\angle PQY = \angle XBC$$

$$\therefore BX \parallel PQ$$

$$BX \parallel MN \text{ (ทำนองเดียวกัน)}$$

$$\therefore PQ \parallel MN \text{ และขนานกันด้วย}$$



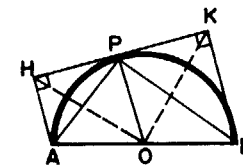
Q.E.D.

Ex IV

Given AB เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ของวงกลม O, P เป็นจุดใดๆ บนเส้นรอบวง ลาก AH, BK $\perp$ เส้นสัมผัสวงกลมที่จุด P ที่ H, K ตามลำดับ ต่อ AP, BP

Prove $AP \cdot BP = AB \cdot PK$

Const โยง OH, OK



Proof $AH \parallel OP \parallel BK$

$$HP = PK \text{ (ทบ. 22)}$$

$$\text{พ.ท. } \triangle HOP = \text{พ.ท. } \triangle AOP \dots (1)$$

$$\text{พ.ท. } \triangle OPK = \text{พ.ท. } \triangle OPB \dots (2)$$

$$(1) + (2); \therefore \text{พ.ท. } \triangle HOK = \text{พ.ท. } \triangle APB$$

$$\frac{HK \cdot OP}{2} = \frac{AP \cdot BP}{2}$$

$$2 PK \cdot OP = AP \cdot BP \text{ (} HK = 2 PK \text{)}$$

$$AB \cdot PK = AP \cdot BP \text{ (} 2 OP = AB \text{)}$$

Q.E.D.

Ex

Given วงกลม 2 วงตัดกันที่ P, Q ลากเส้นตรง APB, XPY ให้ปลายทั้งสองข้างของเส้นตรงจากที่เส้นรอบวงของวงกลมทั้งสอง ทำให้ $\angle APQ = \angle YPQ$

Prove $AB = XY$

Const ลากเส้นตรง MQN // XPY ให้ปลายทั้งสองข้างจากที่เส้นรอบวงของวงกลมทั้งสองต่อ OA, OP, OM และ OQ

Proof $\angle OAP = \angle OPA, \angle OPQ = \angle OQP, \angle OMQ = \angle OQM$

แต่ $\angle OPA + \angle OPQ = \angle OQP + \angle OQM$

$\therefore \angle OPA = \angle OQM$

$\angle OAP = \angle OMQ$

$OA = OM$

$\therefore \triangle OAP \cong \triangle OMQ$ (ม.ก.ม.)

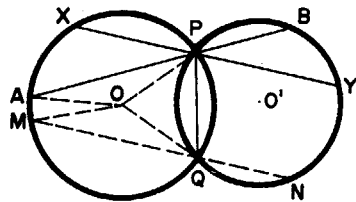
$AP = MQ$

$PB = QN$ (ทำนองเดียวกัน)

$\therefore AB = MN$

$MN = XY$ ($MN \parallel XY$)

$\therefore AB = XY$ **Q.E.D.**



$$AP + PB = MQ + QN$$

Ex VI

Given O เป็นจุด ค.ก. ของวงกลม $\angle AOD = 90^\circ$ $PQ \perp AO$

Prove $\widehat{BR} = 3 \widehat{PA}$

Const ไขว่ OP, BP

Proof $\angle AOP + \angle POQ = 90^\circ$ $\angle AOP = 2 \angle OPB$

$\angle POQ = \angle PQO$ ($PO = PQ$)

$\angle OPB + \angle BPR = 180^\circ - 2 \angle POQ$

แต่ $\angle POQ = 90^\circ - \angle AOP$

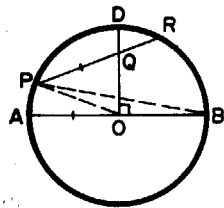
$= 90^\circ - 2 \angle OPB$

$\therefore \angle OPB + \angle BPR = 180^\circ - 2(90^\circ - 2 \angle OPB)$

$\angle OPB + \angle BPR = 4 \angle OPB$

$\angle BPR = 3 \angle OPB$

$\therefore \widehat{BR} = 3 \widehat{PA}$ **Q.E.D.**



เบ็ดเตล็ด

Ex VII

Given $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่วมี $\angle A$ เป็นมุมยอด $= 20^\circ$ BY ตัด AC ที่ Y ทำให้ $\angle CBY = 60^\circ$

CX ตัด AB ที่ X ทำให้ $\angle BCX = 50^\circ$ ไขว่ XY

Find $\angle BYX$

Const ลาก BZ ตัด AC ที่ Z ทำให้ $BZ = BC$ ไขว่ XZ

Proof $\angle CZB = 80^\circ$ ($BZ = BC, \angle ZCB = 80^\circ$)

$\angle CBZ = 20^\circ$

$\therefore \angle ZBY = 40^\circ$

$BZ = ZY$

$\angle BXC = 50^\circ = \angle BCX$

$\therefore BX = BC$

$\angle XBZ = 60^\circ, BX = BZ$ ($BC = BZ$)

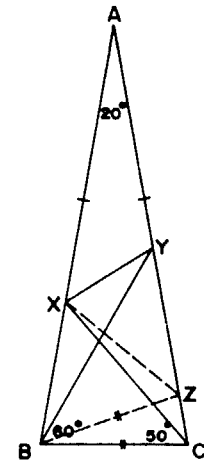
$\therefore BX = BZ = XZ$

$\angle YZX = 40^\circ$

$YZ = XZ$

$\angle ZXY = \angle ZYX = 70^\circ$

$\angle BYX = 30^\circ$



Q.E.D.

Ex VIII

Given วงกลม 3 วงเท่ากันสัมผัสกันภายนอก

Find 1. รัศมีของวงกลมวงเล็ก (r) ที่สัมผัสวงกลมทั้งสามในทอมนของ R

2. พ.ท. วงกลมวงเล็ก : พ.ท. วงกลมวงใหญ่

Solve ให้ $PF = d$

O เป็นจุด centroid ของ $\triangle ABC$

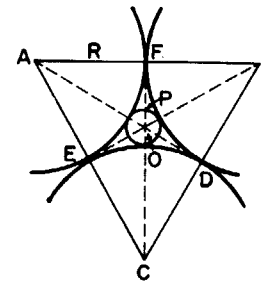
$OC = 2OF, R + r = 2r + 2d$

$$d = \frac{R-r}{2}$$

จาก $\triangle OBF; (R+r)^2 = R^2 + (r+d)^2$

แทนค่า d; $(R+r)^2 = R^2 + \left(\frac{R+r}{2}\right)^2$

$$3r^2 + 6Rr - R^2 = 0$$



4

Ans.

Ans.

$$\text{พ.ท. วงกลมเล็ก} : \text{พ.ท. วงกลมใหญ่} = \frac{7-4\sqrt{3}}{3}$$

Find AN ในเทอมของ R, r และ d

$$MN = R + r, \quad ML = R - r$$

$$= (\mathbf{R} + \mathbf{r})^2 - (\mathbf{R} - \mathbf{r})^2$$

$$= 4 R_f$$

$$\therefore NL = 2 \sqrt{R_f}$$

$$BC = 2 \sqrt{Rr}$$

$$\Delta C = d + 2 \sqrt{Rr}$$

แทนค่า AC ใน (1); $AN^2 = (d + 2\sqrt{Rr})^2 + r^2$

$$= d^2 + 4d\sqrt{Rr} + 4Rr + r^2$$

$$AN = \sqrt{d^2 + 4d\sqrt{Rr} + 4Rr + r^2} \quad \text{Q.E.D.}$$

Q.E.D.

中

$\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ ด้านเท่าที่มีจุดยอด A,B, C อยู่บน XY,RS, PQ ตามลำดับ

ให้ DC ตัก RS ที่ M จาก B, M ลากเส้น

Solve $\angle ADC = \angle ABC = 60^\circ$, $\angle BDC = \angle BAC = 60^\circ$

ใน $\triangle$ มุมฉาก BED; $\frac{BE}{ED} = \tan \angle BDE = \tan 50^\circ$

.....(1)

$$\therefore DA + BD = DC \quad (AB = BC = AC)$$

.....(2)

$$\therefore BD = DM$$

જાન (2); $DA = (DM + MC) - BD$

$$= MC \cdot (DM = BD)$$

ใน $\triangle$ มุมฉาก MFC; $\frac{MC}{FM} = \operatorname{cosec} \angle FCM = \operatorname{cosec} 60^\circ$

$$MC = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad FM = \frac{2}{\sqrt{3}} b$$

$$\text{777 (3) } DA = MC = \frac{2}{\sqrt{3}} b$$

၅၈ (၁) နှင့် (၄); $AE = ED + DA$

$$= \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} b$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} (a + 2b)$$

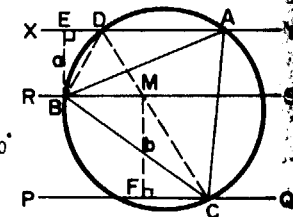
ใน $\triangle$ มุมฉาก ABE; $AB^2 = AE^2 + BE^2$

$$= \frac{(a+2b)^2}{3} + a^2$$

$$= \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2}{3}$$

$$\therefore AB = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{a^2 + ab + b^2}$$

Q.E.D.



Ex XI Given จากรูป OD = DA = AB และ BA สัมผัสวงกลมที่ A

Find ก. $\frac{\widehat{AE}}{\widehat{EF}}$ ข. ถ้า OD = 6 ซม. จงหาความยาว $\widehat{AE}$

Solve $\angle OAB = 90^\circ, \angle OAD = 60^\circ$

$$\therefore \angle DAB = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

$$\angle ADB = \frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ$$

$$\angle AOE = 2\angle ADB = 30^\circ$$

$$\text{แต่ } \angle AOB = \angle ABO = 45^\circ$$

$$\therefore \angle BOE = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$$

$$\therefore \frac{\widehat{AE}}{\widehat{EF}} = \frac{30^\circ}{15^\circ} = 2 \dots\dots\dots(ก)$$

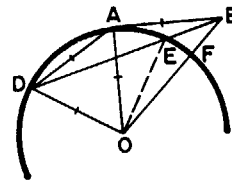
$$\frac{\widehat{AE}}{\text{เส้นรอบวง}} = \frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{12}$$

$$\therefore \widehat{AE} = \frac{1}{12} \text{ เส้นรอบวง} = \frac{1}{12} (2\pi r)$$

$$= \frac{1}{12} \times 2\pi \cdot 6$$

$$= \pi \dots\dots\dots(ข)$$

Q.E.D.



Ex XII Given $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ ด้านเท่า มีด้านยาวด้านละ 6" P,Q,R เป็นจุด ต.ก. ของวงกลมเท่ากัน 3 วงบรรจุอยู่ใน $\triangle ABC$

Find 1. พท. $\triangle PQR$ 2. พท. แรเงา

Const ลาก QN, RM $\perp$ BC ที่ N,M ตามลำดับ

Solve สมมติรัศมีวงกลม = r

$$MR = r \text{ และ } CM = 3 - r$$

$$\text{ใน } \triangle \text{ มุมฉาก } MRC; \tan 30^\circ = \frac{r}{3-r}$$

$$\therefore r = \frac{3}{2}(\sqrt{3}-1) \left(\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

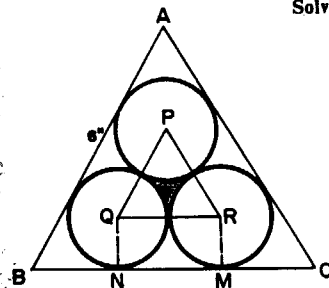
$$\text{จาก } \triangle ABC \sim \triangle PQR; \therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle PQR} = \frac{BC^2}{QR^2}$$

$$\therefore \triangle PQR = \left(\frac{QR}{BC} \right)^2 \triangle ABC$$

$$= \left(\frac{2r}{6} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} (6)^2$$

$$= \left(\frac{3(\sqrt{3}-1)}{6} \right)^2 \cdot (9\sqrt{3})$$

$$= 9\sqrt{3} - 13\frac{1}{2} \dots\dots\dots(1)$$



พท. แรเงา = $\triangle PQR - 3 \left(\frac{1}{6} \text{ พท. วงกลมรัศมี } r \right)$

$$= (9\sqrt{3} - 13\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \pi \left[\frac{3}{2}(\sqrt{3}-1) \right]^2$$

$$= (9\sqrt{3} - 13\frac{1}{2}) - \frac{9}{4} \pi (2 - \sqrt{3}) \dots\dots(2)$$

Ans.

Ex XIII

Given $\angle BAX = \angle ACB$ $AD \perp BC$ ที่จุด D

Prove $BX = BC$

Proof 1. $\triangle ABX \sim \triangle ABC$ ($\angle ABX = \angle ABC$; $\angle BAX = \angle ACB$)

$$2. \frac{\triangle ABX}{\triangle ABC} = \frac{AX^2}{AC^2}$$

$$3. \frac{\triangle ABX}{\triangle ABC} = \frac{BX}{BC}$$

$$4. \frac{AX^2}{BC^2} = \frac{BX}{BC}$$

$$5. \frac{AX^2}{BX} = \frac{AC^2}{BC}$$

$$6. AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BD$$

$$7. AX^2 = AB^2 + BX^2 - 2BX \cdot BD$$

$$8. \frac{AB^2 + BX^2 - 2BX \cdot BD}{BX} = \frac{AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BD}{BC}$$

$$9. \frac{AB^2}{BX} + BX - 2BD = \frac{AB^2}{BC} + BC - 2BD$$

$$10. \frac{AB^2}{BX} + BX = \frac{AB^2}{BC} + BC$$

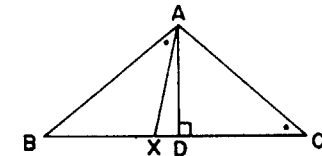
$$11. \frac{AB^2}{BX} - BC = \frac{AB^2}{BC} - BX$$

$$12. \frac{AB^2 - BX \cdot BC}{BX} = \frac{AB^2 - BX \cdot BC}{BX \cdot BC}$$

$$13. \therefore BX = BC$$

ท่านทราบหรือไม่ว่า ผิดที่ไหน ??

Q.E.D.



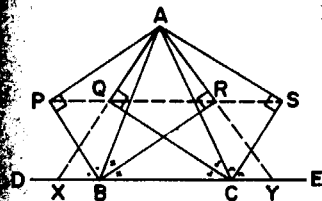
Ex XIV

Given ค่อยฐาน BC ของ $\triangle ABC$ ออกไปทั้งสองข้างถึง D, E ลาก AP, AQ, AR, AS $\perp$ เส้นแบ่งครึ่ง

$\angle ABD, \angle ACD, \angle ABE, \angle ACE$ ที่ P, Q, R, S ตามลำดับของ PQ, QR และ RS

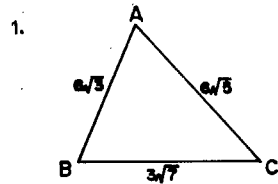
Prove P, Q, R, S อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

Const ค่อย AQ, AR พบ BC ที่ X, Y

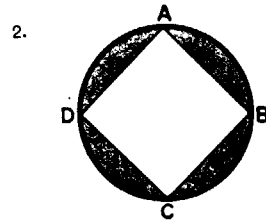


Proof $\triangle ACQ \cong \triangle CQX$ ($\angle ACQ = \angle QCX$, QC ก้านร่วม,
 $\angle AQC = \angle CQX$)
 $\therefore AQ = QX$
 $\therefore AR = RY$ (ทำนองเดียวกัน)
 $QR \parallel XY$ (เส้นต่อจุดกึ่งกลางด้าน 2 ด้านของรูป $\triangle$)
 $PQ \parallel XY, RS \parallel XY$ (ทำนองเดียวกัน)
 $\therefore PQ \parallel QR \parallel RS$
 $\therefore P, Q, R, S$ อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน **Q.E.D.**

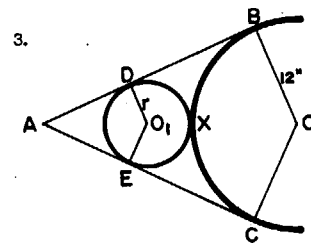
EXERCISES



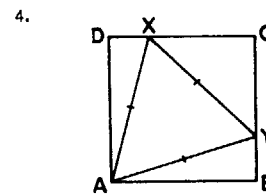
1. จากรูป จงหา พ.ท. $\triangle ABC$ ($\frac{9\sqrt{335}}{4}$ ตร. หน่วย)



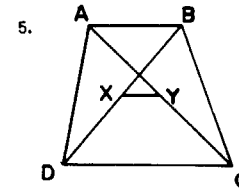
2. จากรูป พ.ท. แรเงา = 56 ตร. ซม. จงหาพ.ท. $\square$ จัตุรัส (98 ซม.²)



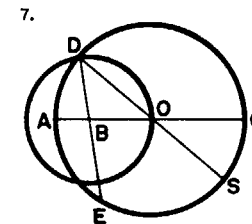
3. จากรูป AB, AC เป็นเส้นสัมผัสวงกลมยาว 16" วงกลม O รัศมียาว 12" จงหา r (3")



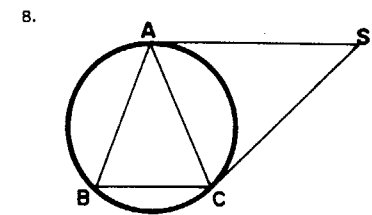
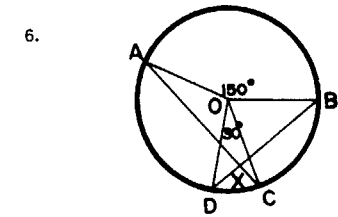
4. จากรูป $\square ABCD$ เป็น $\square$ จัตุรัส $\triangle AXY$ เป็น $\triangle$ ด้านเท่าที่บรรจุอยู่ใน $\square ABCD$ ถ้า $AB = a$ จงหา พ.ท. $\triangle AXY$ [$a^2(2\sqrt{3}-3)$]



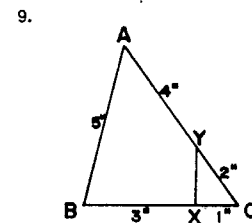
5. จากรูป X, Y เป็นจุดกึ่งกลาง BD, AC , $AB \parallel CD$ $AB = 4"$, $CD = 8"$ จงหาค่า XY (2")



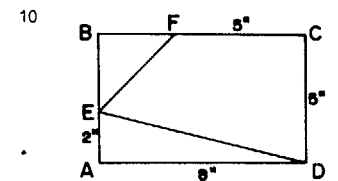
6. จากรูป $\angle AOB = 150^\circ$, $\angle COD = 30^\circ$ ถ้า AC, BD ตัดกันที่ X จงหาค่า $\angle AXB$ (90°)



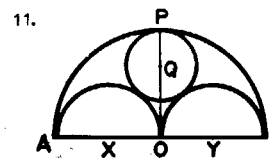
8. จากรูป ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วบรรจุอยู่ในวงกลม มี A เป็นมุมยอด AP และ CP เป็นเส้นสัมผัสถ้า $\angle B = \angle C = 2\angle A$ จงหา $\angle ASC$ (36°)



9. จากรูป จงหาค่า XY

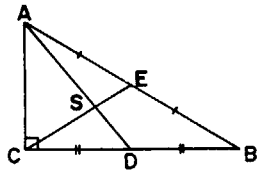


10. จากรูป $\square ABCD$ เป็น $\square$ ผืนผ้า มี $AD = 8$ ซม., $AB = 5$ ซม. จงหา พ.ท. $\square DEFC$ (27.5 นิ้ว²)



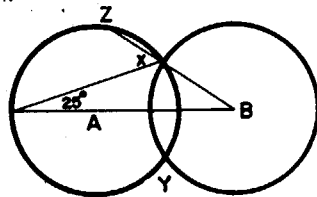
11. จากรูป ถ้า $AB = 24"$ $AO = OB$ จงหาพื้นที่วงกลม Q (4")

12.



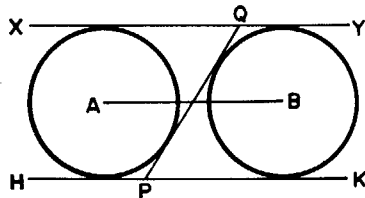
จากรูป $\triangle ABC$ มี $\angle C = 90^\circ$ AD และ CE เป็นเส้นมัธยฐานตัดกันที่จุด S ถ้า $AB = 12$ ซม.
CS = ? (4 ซม.)

14.



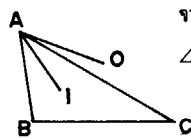
จากรูป Y เป็นจุดตัดจุดหนึ่งของวงกลมที่เท่ากัน 2 วง ซึ่งมี A และ B เป็นจุด ต.ก. จงหา x (75°)

16.



จากรูป $XY \parallel HK$, A และ B เป็นจุด ต.ก. ของวงกลม ถ้า AB ยาว 12" จงหา PQ (12")

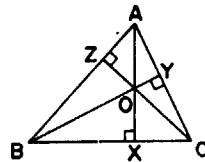
18.



จากรูป O เป็นจุด Circumcentre I เป็นจุด In-centre ถ้า $\angle IAO = x$, $\angle IAB = y$ จงหา $\angle B$ และ $\angle C$ ในเทอมของ x และ y

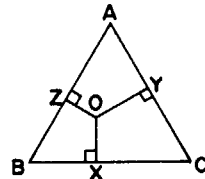
$$[90^\circ + x - \frac{y}{2}, 90^\circ - x - \frac{y}{2}]$$

13.



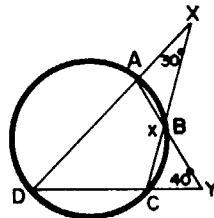
จากรูป O เป็นจุด orthocentre $AO = 3$ ซม., $BO = 3.5$ ซม., $CO = 1.5$ ซม., $BC = 4$ ซม., $OX = 0.7$ ซม., จงหา OY, OZ และรัศมีวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$
(0.6 ซม., 1.4 ซม., 2.5 ซม.)

15.



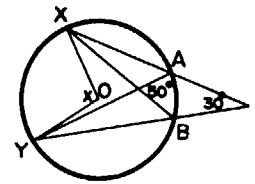
จากรูป $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ ด้านเท่า $AB = 4$ " O เป็นจุดใด ๆ ภายใน $\triangle$ จงหาค่า $OX + OY + OZ$ ($2\sqrt{3}$ นิ้ว)

17.



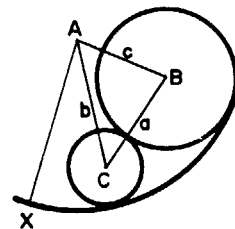
จากรูป จงหาค่า x (55°)

19.



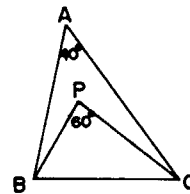
จากรูป จงหาค่า x (80°)

21.



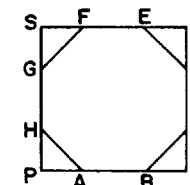
จากรูป จงหา AX ในเทอมของ a, b, c ($\frac{a+b+c}{2}$)

23.



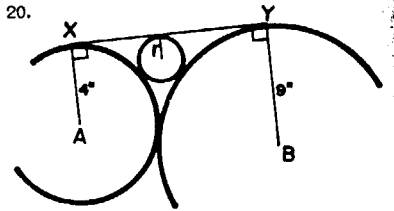
จากรูป $\triangle ABC$ มี $\angle A = 40^\circ$, P เป็นจุดใด ๆ ทำให้ $\angle P = 60^\circ$ จงหาค่า $\angle ABP + \angle APC$ (20°)

25.



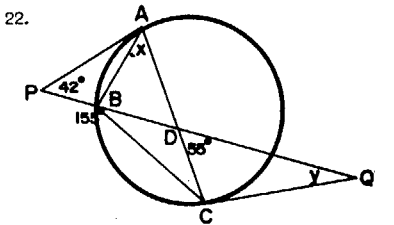
จากรูป $\square PQRS$ เป็นรูป $\square$ จักรยาวด้านละ m หน่วย ถ้าตัดมุมออกทุกมุมเพื่อทำให้เป็นรูป 8 เหลี่ยมด้านเท่า จงหาความยาวแต่ละด้านของรูป 8 เหลี่ยมด้านเท่า $[m(\sqrt{2} - 1)]$

20.



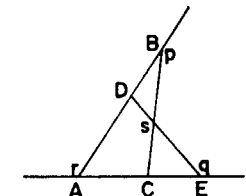
จากรูป จงหาค่า r (1.44")

22.



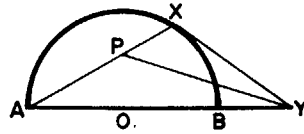
จากรูป PA, CQ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม จงหาค่า x, y ($53^\circ, 28^\circ$)

24.



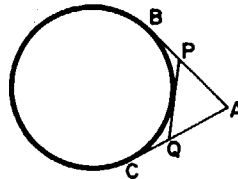
จากรูป จงหาค่า $p + q + r + s$ (540°)

26.



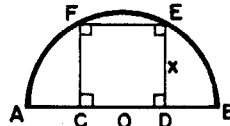
จากรูป AB เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลม O, ต่อ AB ถึง Y ลาก YX สัมผัสวงกลมที่ X โยง AX ตัดเส้นแบ่งครึ่ง $\angle Y$ ที่ P จงหาค่า $\angle XPY$ (45°)

28.



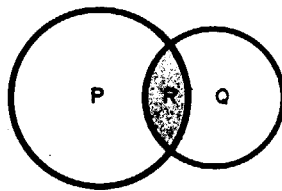
จากรูป เส้นสัมผัส AB = 17 ซม. จงหาความยาวเส้นรอบรูป $\triangle APQ$ (34 ซม.)

30.



จากรูป $\square CDEF$ เป็น $\square$ จักรัศที่บรรจุในครึ่งวงกลม $AO = OB = r$ จงหา $\frac{x}{r}$ ($\frac{2}{\sqrt{5}}$)

32.

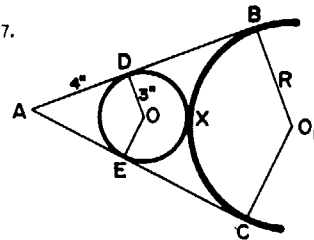


รัศมีวงกลมวงหนึ่งเป็น n เท่าของอีกวงหนึ่ง ถ้า พ.ท. รูป $P = a$, พ.ท. รูป $Q = b$ จงหา พ.ท. รวม R ในเทอม a , b และ n

$$\frac{a-bn^2}{n^2-1}$$

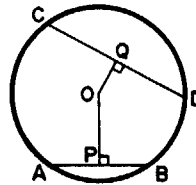
เมื่อกด

27.



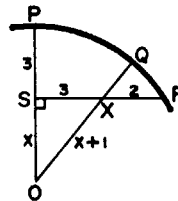
จากรูป AD, AE เป็นเส้นสัมผัสวงกลมยาว 4" วงกลม O รัศมียาว 3" จงหา R (12°)

29.



จากรูป $OP = AB = 2a$ $OQ = a$ จงหาค่าของ $\frac{CD}{AB}$ (2)

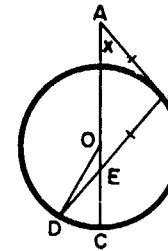
31.



จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งมีส่วนโค้ง PQR เป็นส่วนหนึ่งของเส้นรอบ $XS = 3$, $XR = 2$, $RS \perp PO$ จงหา OP (4)

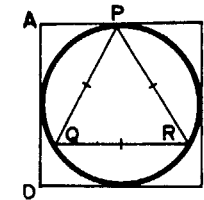
เมื่อกด

33.



AB เป็นเส้นสัมผัส O เป็นจุดศูนย์กลาง BE = BA และ $\angle A = x^\circ$ จงหา $\angle AOD$ ในเทอมของ x [$3(90-x)$]

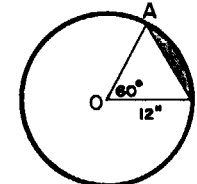
35.



จากรูป จงหา พ.ท. $\square$ จักรัศ: พ.ท. $\triangle$ ด้านเท่า ($\frac{16\sqrt{3}}{9}$)

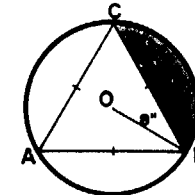
จงหาพ.ท. แรเงาจากรูปต่อไปนี้

1.



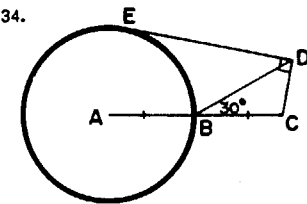
[$24\pi - 36\sqrt{3}$ ซม.²]

3.



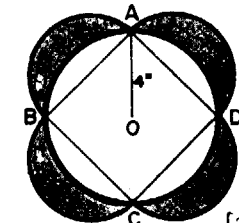
[$\frac{1}{3}(64\pi - 48\sqrt{3})$ ซม.²]

34.



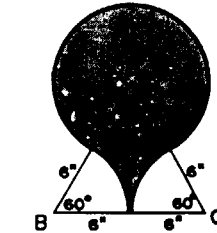
DE เป็นเส้นสัมผัส, $AB = BC$, $\angle CDE = 90^\circ$, $\angle CBD = 30^\circ$ จงหา C (100°)

2.



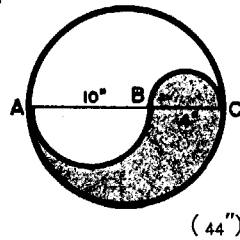
[32 ซม.²]

4.

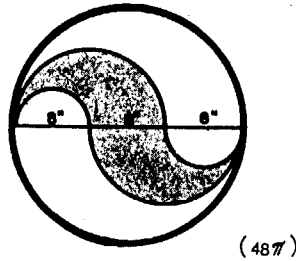


[$18\pi + 36\sqrt{3}$ ซม.²]

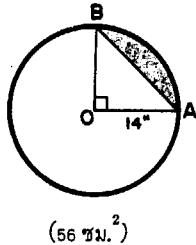
5.



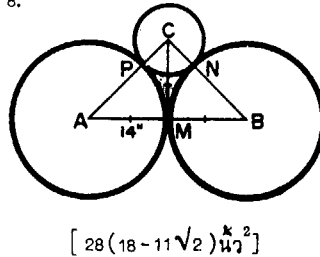
6.



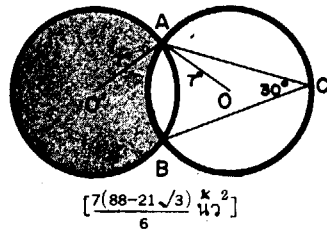
7.



8.



9.



1. พ.ท. 12 เหลี่ยมที่บรรจุอยู่ในวงกลมรัศมี 4 นิ้ว = ? (48 ตารางนิ้ว)
2. ในวงกลมจงหาค่าของ พ.ท. $\square$ จัตุรัส: พ.ท. $\triangle$ ด้านเท่าที่บรรจุอยู่ในวงกลมเดียวกัน (8:3 $\sqrt{3}$)
3. วงกลม 2 วงรัศมี 2 และ 7 นิ้ว จุดศ.ก. ห่างกัน 10 นิ้ว เส้นสัมผัสร่วมของวงกลมทั้งสองยาวเท่าไร ($5\sqrt{3}$ นิ้ว, $\sqrt{19}$ นิ้ว)
4. วงกลม 3 วงไม่ตัดกัน เขียนเส้นสัมผัสวงกลมได้ทั้งหมดกี่เส้น (12)
5. ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง ลากเส้นจากจุด B, C ไป $\perp$ กับด้านตรงข้ามที่จุด E, F ตามลำดับ

เส้นแบ่งครึ่ง $\angle ACF$ พบกันที่จุด P โยง PE, PF ถ้า PE = 1 ซม. จงหาค่าของ $\angle BPC$ และ SF (90° , 1 ซม.)

6. จงพิสูจน์ว่าใน $\square$ ใด ๆ เส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามและเส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมจะแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุดเดียวกัน

7. วงกลม 3 วงไม่เท่ากันสัมผัสกันได้กี่แบบ (8 แบบ)

8. $\square$ ผืนผ้า 2 รูป ที่มีควมกว้างและความยาวเป็นจำนวนเต็ม ทั้ง พ.ท. และเส้นรอบรูปก็เป็นจำนวนเดียวกัน จงหาความยาวของด้านของทั้ง 2 รูป (6, 3 และ 4, 4)

9. $\triangle ABC$ มี AB = 29 ซม., BC = 36 ซม., CA = 25 ซม. O เป็นจุดภายใน $\triangle$ ห่าง BC 5 ซม. และห่าง CA 10 ซม. จงหาว่า O ห่างจาก AB เท่าไร ถ้าต่อ AO พบ BC ที่จุด X จงหาความยาว BX

10. E เป็นจุดบนด้าน BC ของ $\triangle$ ด้านเท่า ABC ทำให้ BC = 3 BE D เป็นจุดบนด้าน AB ทำให้ AD = DE จงพิสูจน์ว่า CD = DB + BE

11. P เป็นจุดบนรัศมี OA ที่ตัดออกไป ของวงกลมที่มี O เป็นจุดศ.ก. จาก P ลากเส้นสัมผัส PT ต่อกับ OP ออกไปถึงจุด Q ทำให้ PQ = PT จาก Q ลากเส้นสัมผัส QV $VR \perp OA$ ที่ R จงพิสูจน์ว่า PR = PQ = PT

12. I เป็นจุด In-center ของ $\triangle ABC$ วงกลมที่ผ่านจุด I สัมผัส AB ที่จุด B ตัด AC ที่ H, K จงพิสูจน์ว่า CI แบ่งครึ่ง $\angle HIK$

13. เส้นแบ่งครึ่ง $\angle A$ ของ $\triangle ABC$ พบด้าน BC ที่ M ลาก MQ, MR $\perp AC$, AB ที่ จุด Q, R ตามลำดับ ลาก MN $\perp BC$ พบ QR ที่ N จงพิสูจน์ว่าจุด N อยู่บนเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุด A

14. $\square$ จัตุรัส ABCD มี E เป็นจุดกึ่งกลาง AD BE ตัด AC ที่ F จงพิสูจน์ว่า $\triangle AEF : \triangle CEF : \triangle ABE : \triangle BCF = 1 : 2 : 3 : 4$

15. เส้นแบ่งครึ่ง $\angle B$ ของ $\triangle ABC$ พบ AC ที่ D ลาก AE $\perp BD$ ที่ตัดออกไปที่ E ถ้า BD = BC จงพิสูจน์ว่า 2 BE = AB + BC

16. E, F เป็นจุดใด ๆ บนด้าน AB, CD ของ $\square$ ด้านขนาน ABCD ลาก ED, EC, FA, FB ตัดกันที่จุด G และ H ต่อกับ GH พบ BC, DA ที่ I, J จงพิสูจน์ว่า IJ แบ่งครึ่งพื้นที่ $\square$ ABCD

17. ABCDE เป็นรูป 5 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ต่อกับ CD ถึงจุด F และต่อกับ DC ถึงจุด G ให้ CF = DG = AC จงพิสูจน์ว่า

1. พ.ท. $\triangle AFG =$ พ.ท. รูป 5 เหลี่ยม ABCDE

2. EF สัมผัสวงกลม ABCDE

18. $\triangle ABC$ มี $\angle C = 90^\circ$ ลาก CD $\perp AB$ ที่ D ถ้า P, Q, R เป็นจุด In-center ของ $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle BCD$ ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า PC = QR

19. AD เป็นส่วนสูงของ $\triangle ABC$ B เป็นจุดใด ๆ บน AD ต่อกับ BE, CE พบ AC, AB ที่ P, Q

ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า AD แบ่งครึ่ง $\angle PDQ$

20. $\square$ ด้านไม่เท่า ABCD มี $AB + CD = BC + DA$ จงพิสูจน์ว่า $\square$ ABCD มีวงกลมแนบในได้

21. AD เป็นส่วนสูงของ $\triangle ABC$ ถ้า $2(CD^2 - DB^2) = BC^2$ จงหาค่าของ $CD : CB$

22. เส้นแบ่งครึ่ง $\angle C$ ของ $\triangle ABC$ พบฐาน AB ที่ F จงพิสูจน์ว่า

$$CF^2 = \frac{ab}{(a+b)^2} (a+b+c)(a+b-c)$$

23. X เป็นจุดบนฐาน BC ของ $\triangle ABC$ ทำให้ $p \cdot BX = q \cdot XC$ จงพิสูจน์ว่า

$$(p+q)^2 AX^2 = (p+q)(p \cdot AB^2 + q \cdot AC^2) - pq \cdot BC^2$$

24. P เป็นจุดบนฐาน BC ของ $\triangle ABC$ ทำให้ $BP : PC = m : n$ จงพิสูจน์ว่า

$$nAB^2 + mAC^2 = (m+n)AP^2 + \frac{2mn}{(m+n)^2} \cdot BC^2$$

25. วงกลมมีรัศมี r_1, r_2 ตัดกันที่ A, B PQ สัมผัสวงกลมที่จุด P และ Q ถ้าวงกลม PQB มีรัศมี r_3 จงพิสูจน์ว่า $r_1 r_2 = r_3^2$

26. P เป็นจุดบนส่วนโค้งน้อย AB ของวงกลมที่ล้อมรอบ 5 เหลี่ยมด้านเท่า ABCDE จงพิสูจน์ว่า $PA + PD + PB = PE + PC$