1. $\triangle$ ABC มี $AB = 2\,AC$ จุด M อยู่กลาง AB จงพิสูจน์ว่า $BC^2 = AC^2 + 2\,CM^2$

2. $\triangle$ ABC มีจุด P อยู่ภายใน $PL, PM, PN \perp AB, BC, CA$ ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $BL^2 - CL^2 = BP^2 - AC^2$

3. $\triangle$ ABC มี O เป็นจุด Orthocentre S เป็นจุด ศ.ก. วงกลมล้อมรอบ $\triangle$ ABC, $SX \perp BC$ จงพิสูจน์ว่า $AO^2 = 4\,SX^2$

4. วงกลมวงหนึ่งมีรัศมี = 13 ซม. AB เป็นคอร์ดยาว 10 ซม. O เป็นจุด ศ.ก. ของวงกลม $OP \perp AB$ ตัด AB ที่ M พบเส้นรอบวง ที่ P จงหาความยาวของ PM.

5. $\triangle$ ABC มี M เป็นจุดกึ่งกลาง AC, L เป็นจุดกึ่งกลาง BM กำหนด $AB = 21''$, $AC = 26''$, $AL = 16''$ จงหาความยาว BM และ BC

6. $\triangle$ ด้านเท่า ABC มี P, Q อยู่บน BC ทำให้ $BP = PQ = QC$ จงพิสูจน์ว่า $9\,AP^2 = 7\,AB^2$

7. D เป็นจุดกึ่งกลาง AC ของ $\triangle$ ABC จุด E อยู่กึ่งกลาง BD จงพิสูจน์ว่า $3\,AB^2 + BC^2 = 4\,AE^2 + 3\,BD^2$

8. $\square$ จัตุรัส ABCD มี P, Q อยู่บน AC ทำให้ $AP = PQ = QC$, $QR \perp BC$ จงพิสูจน์ว่า

ก) $QR^2 = \frac{1}{9}AB^2$ ข) $BP^2 = \frac{5}{9}AB^2$

ค) $BP^2 + QR^2 = BR^2 + PQ^2$

9. $\square$ จัตุรัส PQMN ต่อด้าน NM ถึง S ทำให้ $NS = PM$, $NK \perp PS$ จงพิสูจน์ว่า $PS^2 = 9NK^2$

10. L, K อยู่บน BC ของ $\triangle$ ABC ทำให้ $BL = LK = KC$ จงพิสูจน์ว่า

ก) $AB^2 + AC^2 = AL^2 + AK^2 + 4\,LK^2$

ข) $2\,AB^2 + AC^2 = 3\,AL^2 + 2\,BL^2 + CL^2$

ค) $AK^2 = \frac{1}{3}AB^2 + \frac{2}{3}AC^2 - \frac{2}{9}BC^2$

11. AB เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ของวงกลม DE เป็นคอร์ด ลาก $AP, BQ \perp DE$ ที่ต่อออกไปทั้งสองข้าง จงพิสูจน์ว่า $PD^2 + DQ^2 = PE^2 + EQ^2$

12. $\square$ จัตุรัส ABCD มี E, F, G, H อยู่บน AB, BC, CD, DA ตามลำดับทำให้ $AE = BF = CG = DH$ จงพิสูจน์ว่า $FH^2 = 2(AE^2 + BE^2)$

13. $\triangle$ ABC บรรจุอยู่ในวงกลม มี BX เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม ABC จงพิสูจน์ว่า $BX^2 = 4\,AX^2$

14. G เป็นจุด Centroid ของ $\triangle$ ABC จงพิสูจน์ว่า

ก) $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$

ข) $AB^2 + AC^2 = BG^2 + CG^2 + 4\,AG^2$ และเมื่อ P เป็นจุดใด ๆ ใน $\triangle$

ค) $AP^2 + BP^2 + CP^2 = 3\,PG^2 + AG^2 + BG^2 + CG^2$

15. $\square$ ABCD มีด้านทั้งสี่ยาว a, b, c, d และมีเส้นทแยงมุมยาว x, y จงพิสูจน์ว่า $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + x^2 + y^2)$ เมื่อ O เป็นจุดตัดของเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านตรงข้ามของ $\square$

16. $\square$ ใด ๆ ABCD มี P เป็นจุดใด ๆ ใน $\square$ จงพิสูจน์ว่า $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 + 4\,OP^2$ เมื่อ O เป็นจุดตัดของเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านตรงข้ามของ $\square$

17. O เป็นจุด ศ.ก. วงกลมแนบนอก $\triangle$ ABC G เป็นจุด Centroid ของ $\triangle$ จงพิสูจน์ว่า $OG^2 = r^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$

18. ถ้า AA', BB' เป็นเส้นมัธยฐานของ $\triangle$ ABC จงพิสูจน์ว่า $A'A^2 - B'B^2 = \frac{3}{4}(AC^2 - BC^2)$

19. $\triangle$ ABC มีเส้นแบ่งครึ่งตั้งฉาก BC พบ AC ที่ P, AB ที่ Q จงพิสูจน์ว่า $OP.OQ = OA^2$ เมื่อ O เป็นจุด ศ.ก. วงกลมล้อมรอบ $\triangle$ ABC

20. $\triangle$ XYZ, $\angle$ X = 1 มุมฉาก PQ, PR $\perp$ XY ,XZ ตามลำดับ จงพิสูจน์ $PY.PZ = XY.XQ - XZ.XR - PX^2$

21. $\triangle$ ABC มี $\angle$ A = 1 มุมฉาก บน AB, AC มี $\square$ จัตุรัส ABDE และ ACFG จงพิสูจน์ว่า

1) DA, AF เป็นเส้นตรงเดียวกัน

2) $DF^2 = 2\,BC^2 + 4\,BC.AM$ เมื่อ M เป็นจุดปลายเส้นตั้งฉากลากจาก A ไป BC

22. $\triangle$ ABE มี AB = AE, C,D เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมล้อมรอบ $\triangle$ ABE AC, AD ตัด BE ที่ F, G จงพิสูจน์ว่า $AF^2 - AG^2 = FG.GE - BF.FG$

23. H เป็นจุด Orthocentre ของ $\triangle$ABC มี R เป็นรัศมีวงกลม ABC จงพิสูจน์ว่า $HA^2 + HB^2 + HC^2 = 12\,R^2 - (AB^2 + BC^2 + CA^2)$

24. ใน $\square$ ABCD ถ้า $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$ จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมทั้งสองตัดกันเป็นมุมฉาก

25. วงกลมวงหนึ่งถูกคอร์ดแบ่งเป็น 2 ส่วนโดยส่วนสูงของ segment ใหญ่ : segment เล็ก = 3 : 1 จงหาอัตราส่วนระหว่างเส้นผ่า ศ.ก. ของวงกลมนั้นกับคอร์ดเส้นนั้น

26. วงกลมวงหนึ่งมีคอร์ดเส้นหนึ่งยาว = รัศมี, จงพิสูจน์ว่าส่วนสูงของ segment ใหญ่ : ส่วนสูงของ segment เล็ก = $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

27. AB เป็นเส้นตรงที่ถูก C แบ่งอย่างภายในโดย $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$ จงพิสูจน์ว่า AC ยาว $\frac{am}{m+n}$, CB ยาว $\frac{an}{m+n}$ กำหนด AB ยาว a

28. $\triangle$ ABC ต่อ BA, CA ไปที่ X, Y ให้ $AX = 4''$, $AY = 2''$ และ XY//BC จงหาค่า CY กำหนด $AB = 6''$

29. เส้นตรง AB//CD ขนานกัน ต่อ AC, BD ตัดกันที่ O กำหนด $AC = 3'$, $BD = 4'$, $CO = 5'$ จงหา OB เป็น ฟุต และ นิ้ว

30. $\triangle$ ABC มี $AB = 4''$, $BC = 6''$, $CA = 5''$ ต่อ BA ถึง X ให้ $AX = 7.5''$ และต่อ CA ถึง Y ทำให้ C, X, Y, B concyclic จงหาความยาว AY และ XY

31. $\triangle$ ABC มี $\angle$ A เป็นมุมป้าน O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบ $\triangle$ ถ้าครึ่งวงกลมที่มี OA เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางตัด BC ที่ D จงพิสูจน์ว่า $AD^2 = BD.DC$

32. วงกลมวงหนึ่งมีรัศมี r คอร์ด AB อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลาง = d, x เป็นจุดกึ่งกลาง AB จงพิสูจน์ว่า $AX.XB = r^2 - d^2$

33. วงกลมวงหนึ่งมีรัศมี $11''$ คอร์ด AB ห่างจากจุดศูนย์กลาง $7''$, X เป็นจุดกลาง AB จงหาค่า AX.XB

34. $\triangle$ ABC มี $AB = 6''$, $BC = 8''$, $CA = 7''$ วงกลมวงหนึ่งสัมผัสจุดกึ่งกลาง BC และผ่านจุด A โดยตัด AB, AC ที่ E, F ตามลำดับ จงหาความยาว AE และ AF

35. เส้นตรง XY, AB ขนานกัน อยู่ห่างกัน $1\frac{1}{2}''$, AB ยาว $2''$ มีวงกลมวงหนึ่งสัมผัส XY และผ่านจุด A และ B จงหารัศมีของวงกลม

36. $\square$ ABCD มีวงกลมบรรจุอยู่ภายในโดยวงกลมสัมผัสด้าน AB, BC, CD, DA ที่ P, Q, R, S ตามลำดับ $PR \perp SQ$ จงพิสูจน์ว่า ถ้าเส้นทแยงมุม AC, BD ตัดกันที่ O จะได้ AO.OC = BO.OD

37. วงกลม 2 วงตัดกันที่ A, B มี QR เป็นเส้นสัมผัสร่วมทางตรงสัมผัสวงกลมทั้งสองที่ Q, R บน QR มี P เป็นจุดใด ๆ ต่อ PA ตัดวงกลมที่ X และ Y จงพิสูจน์ว่า $PR^2 - PQ^2 = AP.XY$ และถ้า P เป็นจุดกึ่งกลาง QR จงพิสูจน์ว่าตำแหน่งของ X และ Y อยู่ที่ A และ B

38. จากรูปจุด A, B และวงกลม fixed APQ เคลื่อนที่ได้ จงพิสูจน์ว่าวงกลม PQB ตัด AB ที่จุด Fixed จุดหนึ่ง

39. $\square$ ABCD แนบในวงกลมต่อ DC, AB พบกันที่ E ถ้า M, N เป็นจุดกลาง AE, DE ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า AM.EB = DN.EC

40. $\triangle$ ABC มี $\angle A = 90^\circ$ ต่อ AC ถึงจุด D ให้ CD = BC จงพิสูจน์ $BD^2 = 2\ BC.AD$

41. วงกลม 2 วงตัดกันที่ A และ B ลาก PQ ผ่าน B พบวงกลมทั้งสองที่ P, Q M เป็นจุดกลาง PQ โยง AM ตัดวงกลมที่ X, Y จงพิสูจน์ว่า 1) MX = MY 2) $PX^2 + XQ^2 + QY^2 + YP^2 = PQ^2 + XY^2$

42. $\triangle$PQR แนบในวงกลม TP, TR สัมผัสวงกลมที่ P, R TA // PR พบ QR ที่ต่อออกไปที่ A จงพิสูจน์ว่า Q, P, T, A concyclic และถ้า TQ, PR ตัดกันที่ B จงพิสูจน์ว่า AP สัมผัสวงกลม PBQ

43. A, B เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม 2 วงที่มีรัศมี r_1, r_2 ถ้า N อยู่บน AB โดย $AN^2 - BN^2 = r_1^2 - r_2^2$ และ P เป็นจุดใดๆ บนเส้น $\perp$ AB ที่ผ่านจุด N จงพิสูจน์ว่า เส้นสัมผัสจาก P ไปยังวงกลมทั้งสองยาวเท่ากัน

44. วงกลมมีรัศมี 4″ คอร์ด AP ยาว 7″ AB เป็นเส้นผ่า ศ.ก. PN $\perp$ AB เส้นสัมผัสวงกลมที่ P พบ AB ที่ต่อออกไปที่ T จงหาค่า $\angle$ PAB ความยาว PN และ PT

45. คอร์ด AB, CD ของวงกลมวงหนึ่ง ตัดกันเป็นมุมฉากที่ O โยง CA, BD เส้น ROS $\perp$ CA ที่ R และพบ BD ที่ S จงพิสูจน์ว่า 1) $\angle$ SOB = $\angle$ SBO 2) BS = SD

46. AB, XY เป็นคอร์ดของวงกลมวงหนึ่งตัดกันที่ P กำหนด AP = 5.1″, BP = 3.4″, PY = 6.8″ พ.ท. $\triangle$ PAX = 4.5 in^2 จงหา พ.ท. $\triangle$XPB และ $\triangle$ BPY

47. ABCD เป็น ▱ ด้านขนาน L, M เป็นจุดปลายเส้น $\perp$ ที่ลากจาก A,C ไปยัง BD และ X,Y เป็นจุดปลายเส้น $\perp$ ที่ลากจาก B,D ไปยัง AC จงพิสูจน์ว่า LXMY เป็น ▱ ด้านขนาน

48. วงกลมมี O เป็นจุดศูนย์กลาง AB, CD เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางที่ตั้งฉากกัน P อยู่บนเส้นรอบวงระหว่าง AC จงพิสูจน์ว่า $PB^2 - PA^2 = 4\ \triangle$ PDC

49. $\triangle$ ABC มี $\angle$ C = 1 มุมฉาก, C เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี AC เขียนวงกลมตัดส่วนต่อของ AB ที่ D, ED สัมผัสวงกลมที่ D พบส่วนต่อของ CB ที่ E จงพิสูจน์ว่า EBD เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

50. O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมมี AB เป็นคอร์ด M เป็นจุดกึ่งกลาง AB T เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมที่มี OM เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง จาก T ลากเส้นสัมผัสวงกลมวงในพบเส้นรอบวงของวงกลมวงนอกที่ E จงพิสูจน์ว่า$AE^2 + BE^2 = 4\ ET^2$

51. D เป็นจุดบนฐาน BC ของ $\triangle$ ABC ทำให้ BD = 2 DC จงพิสูจน์ว่า $AB^2 + 2\ AC^2 = 6\ CD^2 + 3\ AD^2$

52. X, Y เป็นจุดบนฐาน BC ของ $\triangle$ ABC ทำให้ BX = XY = YC จงพิสูจน์ $AX^2 + AY^2 + 4\ XY^2 = AB^2 + AC^2$

53. $\triangle$ ABC มี BE $\perp$ AC ที่ E, CF $\perp$ AB ที่ F จงพิสูจน์ BC^2 = AB.BF + AC.CE

54. AB เป็นเส้นผ่า ศ.ก. ของวงกลมมี O เป็นจุด ศ.ก. ต่อ AB ออกไปถึงจุด C ทำให้ $BC = BO$ D เป็นจุดใด ๆ บนเส้นรอบวง จงพิสูจน์ว่า $CD^2 + 2AD^2 = AC^2$

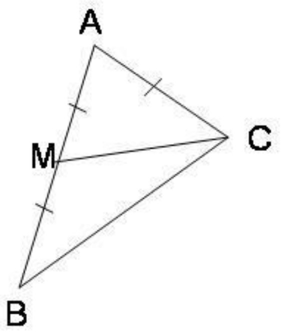
55. $\triangle$ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วมี BC เป็นฐาน DE // BC พบ AB, AC ที่ D, E ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $BE^2 = CE^2 + BC.DE$

56. วงกลม 2 วงรัศมี a, b มีจุดศูนย์กลางห่างกัน c จงหาความยาวของเส้นสัมผัสร่วม เมื่อ $c > (a + b)$ และเมื่อ $c > (a + b)$ ถ้าผลต่างของเส้นสัมผัสร่วมทั้ง 2 กรณีเท่ากับ 2l จงพิสูจน์ว่า
$$c^2 = \frac{a^2 + b^2 + l^2 + a^2b^2}{l^2}$$

57. ถ้า S_n เป็นด้านของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมที่กำหนด ถ้า S_{2n} เป็นด้านของรูป 2 n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมที่กำหนด จงพิสูจน์
$$S_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_n^2}}$$

ข้อ 1/57

จากกระบวนท่าที่ 56 ของคุณเล็ก จะได้ว่า



$$AC^2 + BC^2 = 2AM^2 + 2CM^2$$

แต่ AM = AC ดังนั้น

$$AC^2 + BC^2 = 2AC^2 + 2CM^2$$

$$BC^2 = 2AC^2 + 2CM^2 - AC^2$$

$$BC^2 = AC^2 + 2CM^2 \quad \textbf{Q.E.D.}$$

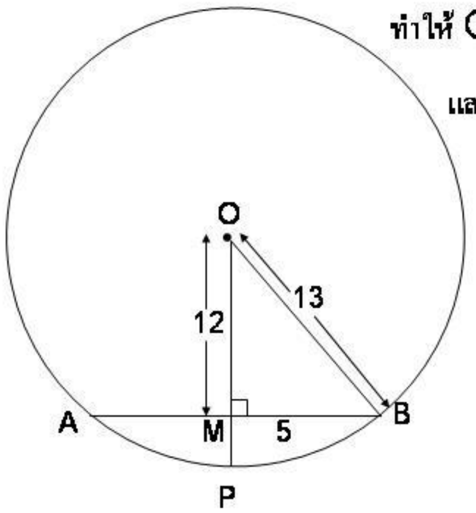
ข้อ 4/57 จาก ทบ.31 $MB = 10/2 = 5$ ขณะที่ $OB = 13$

ทำให้ $OM = 12$ (จาก ทบ. 29)

และเนื่องจาก $OP = OM + MP$

$$13 = 12 + MP$$

$$MP = 1$$

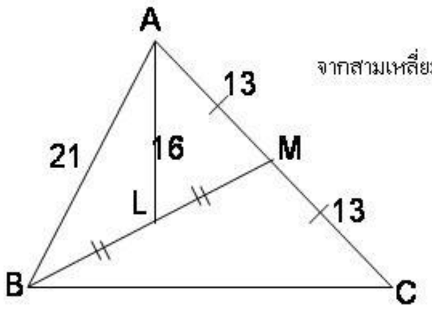


ข้อ **5/57** ทบ.ที่ 56 อีกแล้ว จากสามเหลี่ยม **ABM** , $AB^2 + AM^2 = 2BL^2 + 2AL^2$

$$21^2 + 13^2 = 2BL^2 + 2(16)^2$$

$$BL = 7$$

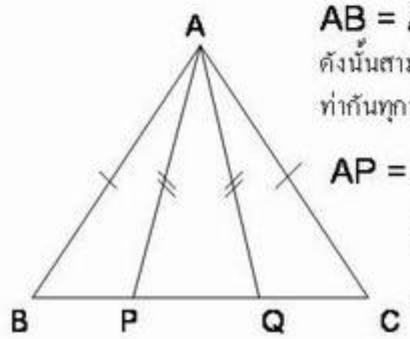
ดังนั้น $BM = 14$



จากสามเหลี่ยม **ABC** , $AB^2 + BC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

$$21^2 + BC^2 = 2(13)^2 + 2(14)^2$$

ดังนั้น $BC = 17$



ข้อ **6/57** เนื่องจาก ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

$AB = AC$ มุม B = มุม C , $BP = QC$

ดังนั้นสามเหลี่ยม ABP กับสามเหลี่ยม ACQ

ท่ากันทุกประการแบบ คมด. (ทบ.ที่ 4) ทำให้สรุปได้ว่า

$$AP = AQ$$

พิจารณาสามเหลี่ยม ABQ และ ทบ.ที่ 56 (อีกแล้ว)

จะได้ว่า $AB^2 + AQ^2 = 2BP^2 + 2AP^2$

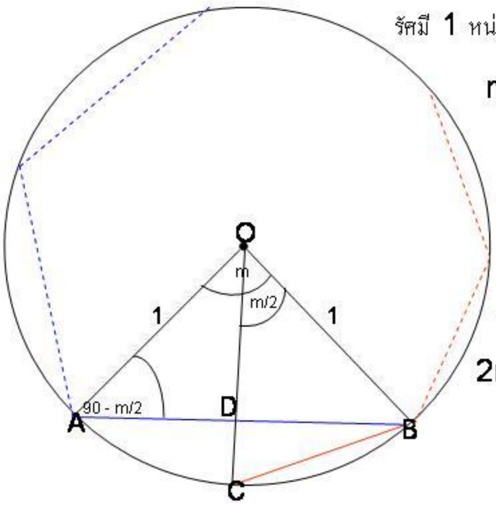
แต่ $AQ = AP$, $BP = AB/3$ ดังนั้น $AB^2 + AP^2 = 2(AB/3)^2 + 2AP^2$

$$AB^2 + AQ^2 = (2/9)AB^2 + 2AP^2$$

$$(7/9)AB^2 = AP^2$$

$$7AB^2 = 9AP^2 \qquad \text{Q.E.D.}$$

ข้อ **57** ให้ AB เป็นด้านของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่บรรจุในวงกลม



รัศมี 1 หน่วย ดังรูป ดังนั้น

$$m = 360/n$$

$$AB = S_n$$

ต่อไป ลาก OC ให้แบ่งครึ่งมุม m

ซึ่งจะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB ที่จุด D

ดังนั้น BC จะเป็นด้านของรูป

$2n$ เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่บรรจุในวงกลมเช่นกัน

$$BC = S_{2n}$$

$$AD = \cos(90 - m/2) = \sin(m/2)$$

ดังนั้น $S_n = 2\sin(m/2) \longrightarrow S^2_n = 4\sin^2(m/2)$

พิจารณาสามเหลี่ยม OCB , $BC^2 = OC^2 + OB^2 - 2\,OC\,OB\cos(m/2)$

$$S^2_{2n} = 2 - 2\cos(m/2)$$

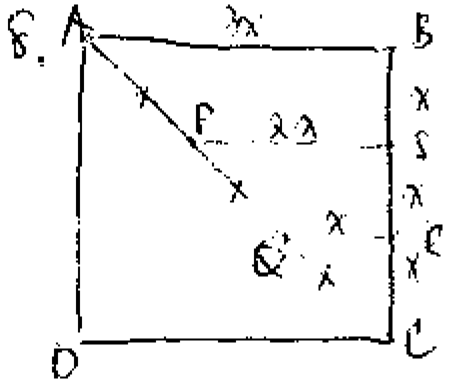
$$S^2_{2n} = 2 - 2\sqrt{1 - \sin^2(m/2)}$$

$$S^2_{2n} = 2 - \sqrt{4 - 4\sin^2(m/2)}$$

$$S^2_{2n} = 2 - \sqrt{4 - S^2n}$$

$$S_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S^2n}} \qquad \text{Q.E.D.}$$

8.



ABCD square

Construct $PS \perp BC$, $QR \perp BC$, Draw PB

Define $AP = PQ = QC = x = QR$

(since $AP = PQ = QC$)

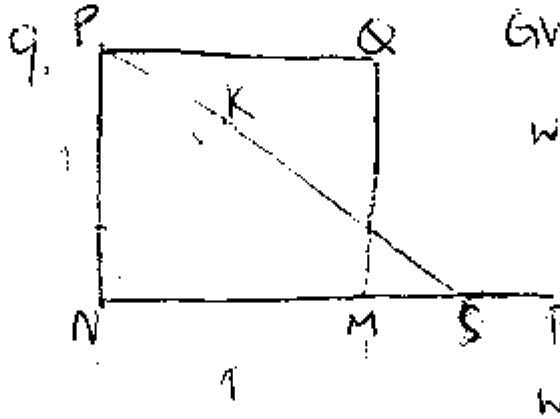
With these, we have

$\frac{QR^2}{AB^2} = \left(\frac{x}{3x}\right)^2 = \frac{1}{9}$, also (?)

$\left(\frac{PB}{AB}\right)^2 = \frac{x^2+2x^2}{9x^2} = \frac{5}{9}$, also (?)

$BP^2 + QR^2 = 5x^2 + x^2$, $BR^2 + RQ^2 = (2x)^2 + x^2 + x^2$, also (?)

9.



Given. □PQMN square, $NS = PM =: x$

$NK \perp PS$.

WLOG let $x = 1$, we have

$NS^2 = PM^2 = 2NM^2 = 2$

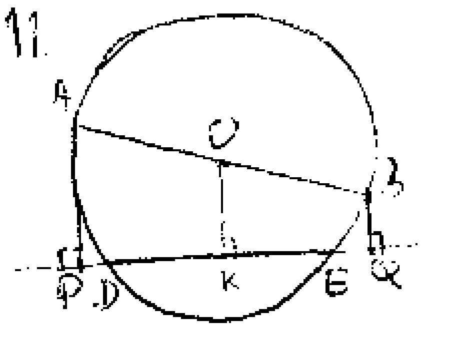
$PS^2 = NS^2 + PN^2 = 3$

From $\triangle PNS = \frac{1}{2} PN \cdot NS = \frac{1}{2} PS \cdot NK$

we have $NK = \frac{PN \cdot NS}{PS} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \frac{PS^2}{NK^2} = \frac{3}{2/3} = \frac{9}{2}$

11.



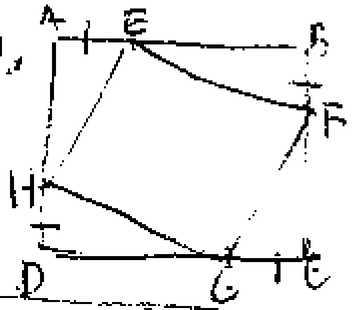
Draw OK.

Since $AO = AB$, $DK = KE$, $PK = KQ$

$\Rightarrow PD = QE$

$\Rightarrow DQ = PQ - PD = PQ - EQ = PE$

12.



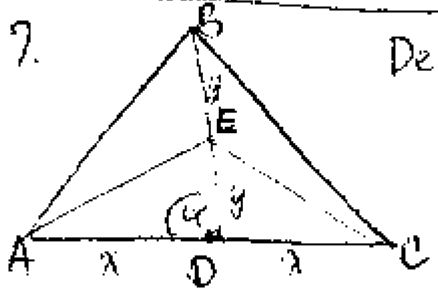
Let ABCD a square, $AE = BF = CG = DH = y$

$\Rightarrow EB = FC = DG = AH$

$\Rightarrow 2(AE^2 + EB^2) = 2(BF^2 + EB^2)$

$= 2EF^2 = FH^2$ ☒

7.



Define $AD = DC = x$; $BE = ED = y$; $\angle ADE = \alpha$

Cosine Law :

$AB^2 = x^2 + 4y^2 - 2x \cdot 2y \cos\alpha$

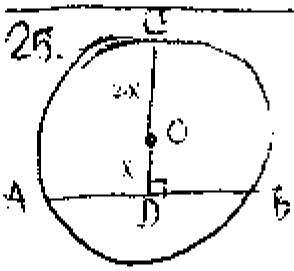
$BC^2 = x^2 + 4y^2 + 2x \cdot 2y \cos\alpha$

$AE^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos\alpha$

$BD^2 = 4y^2$

$\Rightarrow 3AB^2 + BC^2 = 4AE^2 + 3BD^2 = 4x^2 + 16y^2 + 8xy\cos\alpha$. ☒

25.



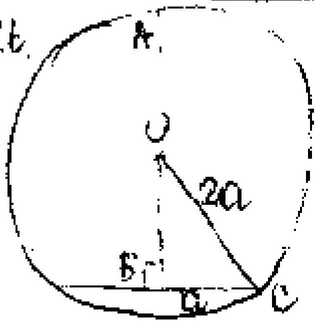
In Circle O let the Line $CD \perp DB$

and define $OD = x \Rightarrow OC = 2x$, $AD = DB$

$\Rightarrow AB = 2\sqrt{OB^2 - OD^2} = 2\sqrt{4x^2 - x^2} = 2\sqrt{3}\,x$

$\Rightarrow 2r : AB = 4x : 2\sqrt{3}x = 2 : \sqrt{3}$. ☒

26.

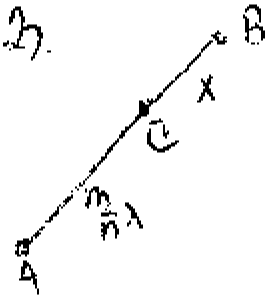


Let the radius be $2a \Rightarrow BC = \frac{1}{2} 2a = a$

$\Rightarrow BO = \sqrt{3}a$; ∴

$\Rightarrow \frac{AB}{OB} = \frac{AO + OB}{AO - OB} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ ☒

27.

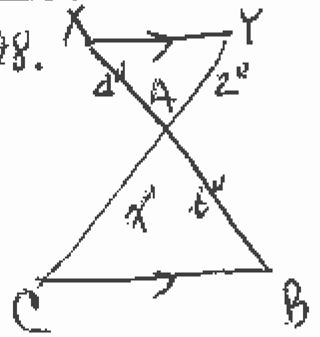


Let $CB = x \Rightarrow AC = \frac{m}{n}x$

$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{m}{n}x}{(1 + \frac{m}{n})x} = \frac{m}{m+n}$, $\frac{BC}{AB} = \frac{n}{m+n}$

$\Rightarrow AC = \frac{am}{m+n}$, $BC = \frac{an}{m+n}$. ☒

28.

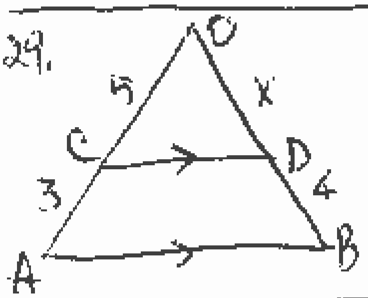


Let $AC = x''$. $XY \parallel CB \Rightarrow \triangle AXY \sim \triangle ABC$

$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AY}{AX} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{2}{4} \rightsquigarrow x = 3''$

$\Rightarrow CY = 2'' + 3'' = 5''$.

29.

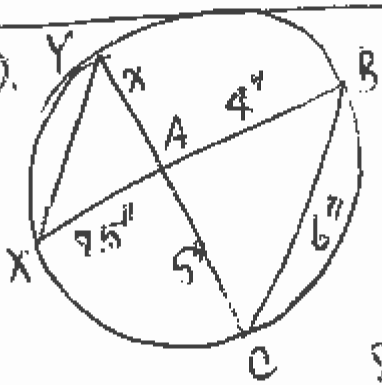


$AB \parallel CD \Rightarrow \triangle ODC \sim \triangle OAD$

$\Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{x}{x+4} \Rightarrow x = \frac{20'}{3}$

$OB = \frac{32'}{3}$.

30.



Let $AY = x$, C, B, X, Y concyclic

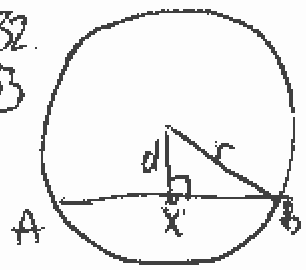
$(\Rightarrow \triangle AXY \sim \triangle ABC)$

$\Rightarrow AY \cdot AC = AX \cdot AB$

$\Rightarrow x = \frac{7.5'' \times 4''}{6''} = 5''$

Similarly, we obtain $XY = \frac{6''}{4} \cdot 6'' = 9''$.

32. +33

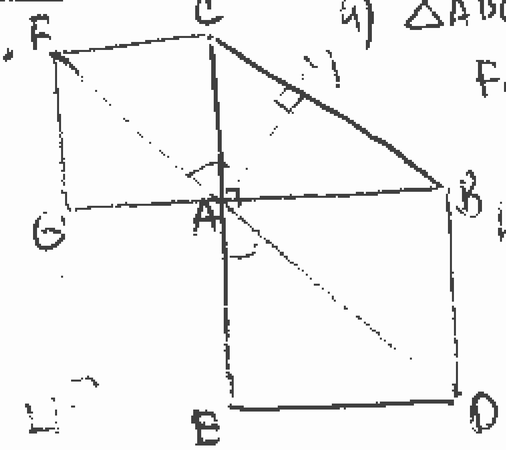


$r^2 - d^2 = \left(\sqrt{r^2-d^2}\right)^2 = XB^2 = AX \cdot XB$ 卍

Use this result, we get for (33):

$AX \cdot XB = 11^2 - 7^2 = 72''^2$.

21.



a) $\triangle ABC$ right $\triangle$, $\square ACFG$, $\square ABDE$ squares.

FA and AD diagonal of each square.

$\Rightarrow F\hat{A}C = E\hat{A}D = 45^\circ \Rightarrow F, A, D$ colinear.

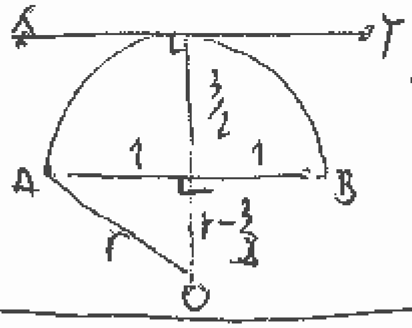
b) Use standard notation, we have;

$DF^2 = 2(b+c)^2 = 2a^2 + 2bc$

$= 2a^2 + 2 \cdot \frac{bc}{a} \cdot a$,

since $AM = bc/a$. 卍

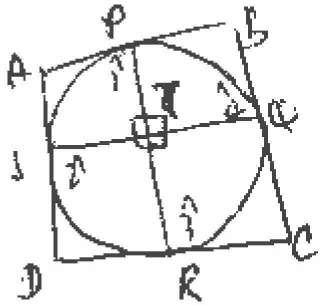
35.



$\rightsquigarrow 1+\left(r-\frac{3}{2}\right)^2 = r^2$

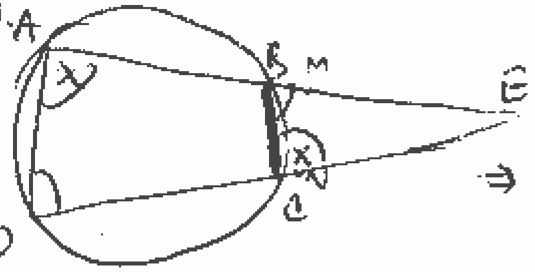
$\frac{13}{4} = 3r \Rightarrow r = \frac{13}{12}$

36.



It's enough to show that A, B, C, D concyclic.
(since the claim valids for A, B, C, D concyclic)
We have $P\hat{T}S = S\hat{T}R = R\hat{T}Q = Q\hat{T}P = 90^\circ$.
AB, BC, CD, DA tangents
$\Rightarrow \hat{1} = \hat{2} = \hat{3} = \hat{4} = 90 \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90$
Clearly, A, B, C, D is rectangular. ☒

37.

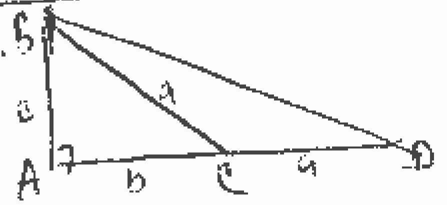


Clearly; $B\hat{C}N = D\hat{A}B$, $E\hat{B}C = A\hat{D}C$

$\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle BCN$

$\Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{1/2\,AE}{1/2\,DE} = \frac{AM}{DN} = \frac{EC}{BE}$. ☒

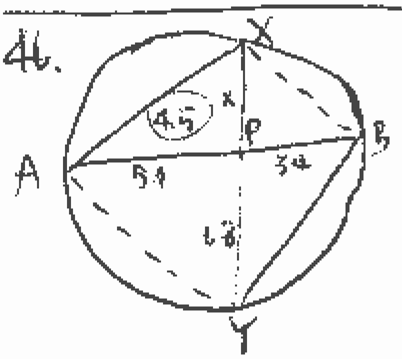
40.



Using standard notation, we have:

$BD^2 = c^2 + (b+a)^2 = (c^2+b^2) + a^2 + 2ab$
$= 2a^2 + 2ab$
$= 2a(a+b)$
$= 2BC \cdot AD$. ☒

46.

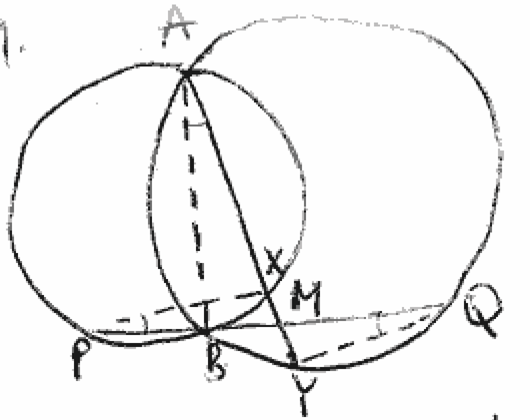


$x = \frac{5.1 \times 3.4}{6.5} = \frac{5.1}{2}$

$\triangle XPB = \frac{3.4}{5.1} \times 4.5 = 3 \text{ in}^2$

$\triangle BPY = \frac{6.8}{5.1/2} \times 3 = 8 \text{ in}^2$

41.



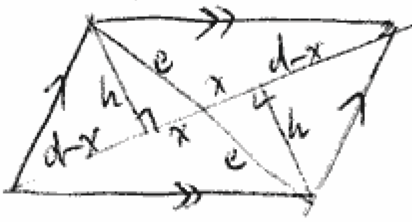
Draw AB, PX, QY

$\Rightarrow B\hat{P}X = B\hat{A}X = M\hat{Q}Y.$

$(X\hat{M}B = Y\hat{M}Q,\ MP = MQ)$

$\Rightarrow \triangle PMX \cong \triangle MQY \Rightarrow \underline{MX = MY}$

If QX, PY are drawn, we would have a parallelogram PXQY, which the claim easily be proved by means of these sketch:



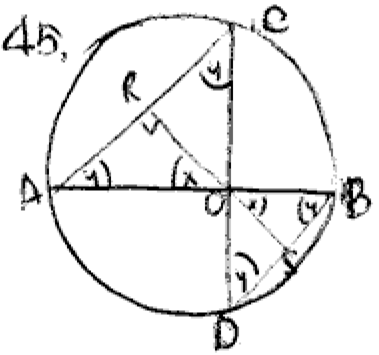
Let the figure in the left be an parallelogram, we have:

$2[(d-x)^2+h^2]+2[(d+x)^2+h^2]$

$=4[d^2+(x^2+h^2)]=4(d^2+e^2)$

This means the sum of the square of each side lenght is equals to the sum of the square of each diagonal. ☆

45.



Define $S\hat{O}B = \hat{x}$, $S\hat{O}B = \hat{y}$.

⇒ $R\hat{O}A = S\hat{O}B = \hat{x}$ (alternate angle)

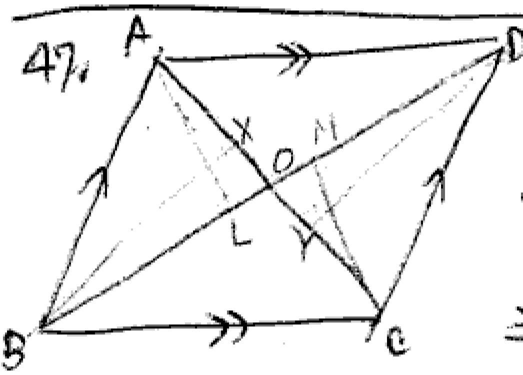
$A\hat{C}D = A\hat{B}D = \hat{y}$

$R\hat{A}O = 90° - \hat{x} = \hat{y} = O\hat{D}B$

→ △ODB is isosceles Triangle, AC // DB

ROS bisects AC, DB and $A\hat{O}C = 90°$ ⇒ $x = y = 45°$.

47.



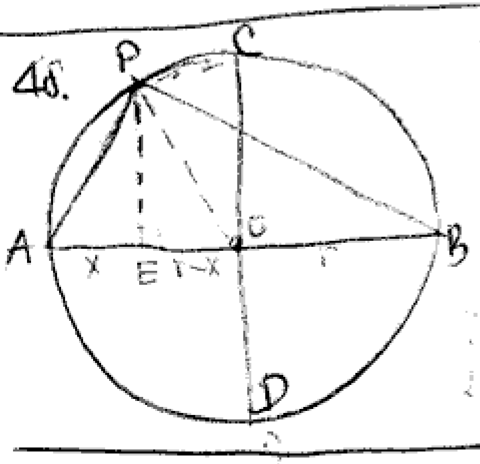
AL = MC, $L\hat{A}O = O\hat{C}M$ (∵ AL//LM), AO = OC ⇒ △ALO ≅ △OMC

DY = BX, $X\hat{B}O = O\hat{D}Y$ (∵ BX//DY)

BO = OD ⇒ △BXO ≅ △ODY

⇒ LM and XY bisect each other at O. Which concludes the proof.

48.



Diameter AB⊥CD ⇒ AB, CD from center O.

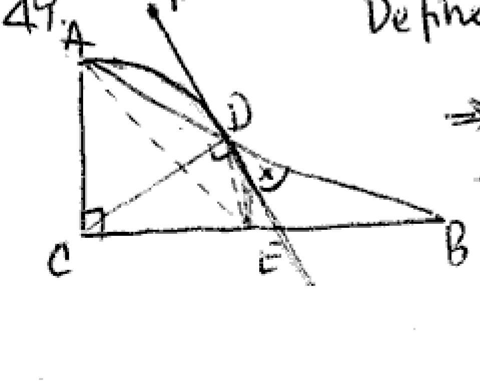
Draw PE, PO, PC. Define AE = x.

Let the radius be r. We have:

$PB^2 - PA^2 = (2r-x)^2 - x^2 = 4r(r-x)$

Area $\triangle PCD = 2r(r-x)/2$

49.



Define $E\hat{D}B = \hat{x}$. Draw CD ⇒ CD⊥FE.

Draw AE, DE

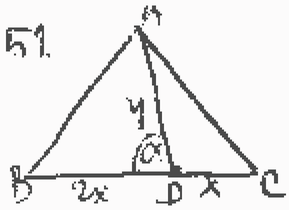
⇒ $F\hat{D}A = B\hat{D}E = A\hat{E}D = \hat{x}$

⇒ $A\hat{C}D = 2\hat{x}$ ⇒ $C\hat{A}B = C\hat{D}A = 90° - \hat{x}$ (Same Angle)

⇒ $A\hat{B}E = 90° - (90° - \hat{x}) = \hat{x}$

⇒ △EDB is isosceles.

51.



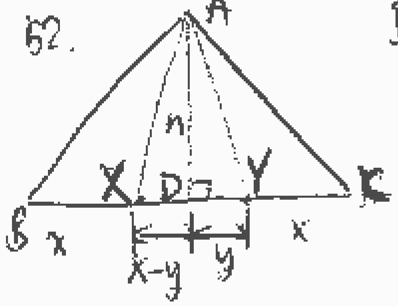
By cosine law: (define $DC = x$, $AD = y$), $\alpha = \angle ADB$

$$AB^2 = 4x^2 + y^2 - 4xy\cos\alpha$$

$$2AC^2 = 2x^2 + 2y^2 + 4xy\cos\alpha$$

$$AB^2 + 2AC^2 = 6x^2 + 3y^2 = 6CD^2 + 3AD^2. \quad ⌧$$

52.



Define height from A be $h = AD$, $DY = x$

$$\Rightarrow AX^2 + AY^2 + 4XY^2$$

$$= h^2 + (x-y)^2 + h^2 + y^2 + 4x^2$$

$$= h^2 + (2x-y)^2 + \left(h^2 + (x+y)^2\right)$$

$$= AB^2 + AC^2. \quad ⌧$$ (The same one as 7(c)?)

10. This question has the same construction as #52 with $x = c$, $y = k$?
where (i) and (ii) imply respectively from

$$2\left(h^2 + (2x-y)^2\right) + h^2 + (x+y)^2 = 3h^2 + 3(x-y)^2 + 4x^2 + 2x^2$$

and $4(h^2 + y^2) = 3\left(h^2 + (2x-y)^2\right) + 6\left(h^2 + (x-y)^2\right) - 2(3x)^2$. ⌧