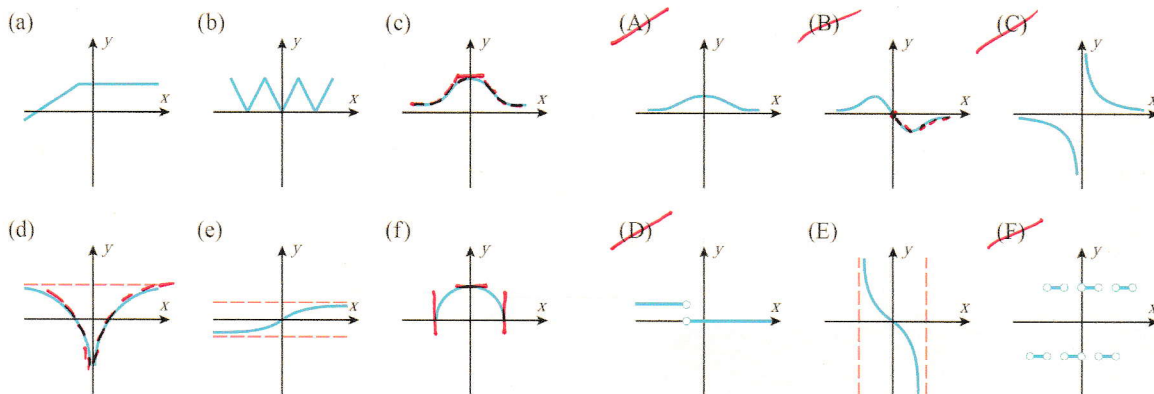


การบ้าน

ประจำการสอนวันเสาร์ที่ 19 สิงหาคม พ.ศ.2560 (ไม่ต้องส่ง)

ชื่อ-สกุล..... **บณลยุ**..... รหัสนักศึกษา..... ลำดับที่.....

1. ให้จับคู่กราฟของฟังก์ชันในข้อ (a) - (f) กับกราฟของอนุพันธ์ของฟังก์ชันในข้อ (A) - (F)



(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
D	F	B	C	A	E

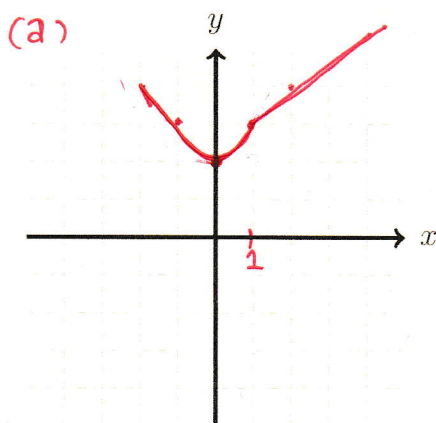
2. กำหนดฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & , x \leq 1 \\ x + 2 & , x > 1 \end{cases}$$

(a) ให้วาดกราฟของ f

(b) ให้แสดงว่า f ต่อเนื่องทุกจุดในช่วง $(-\infty, \infty)$

(c) ฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ที่จุด $x = 1$ ได้หรือไม่ ให้แสดงให้เห็นอย่างชัดเจน



(b) **พิจารณา** กรณี $x < 1$, $f(x) = x^2 + 2$ เป็นพหุนามทุกจุด
 $\therefore f$ ต่อเนื่องบน $(-\infty, 1)$
 กรณี $x > 1$, $f(x) = x + 2$ เป็นพหุนามทุกจุด
 $\therefore f$ ต่อเนื่องบน $(1, \infty)$

พิจารณาที่ $x = 1$ ① $f(1) = 1^2 + 2 = 3$

② พิจารณาลิมิต

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 2 = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

③ $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \therefore f$ ต่อเนื่องที่ $x = 1$

ดังนั้น f ต่อเนื่องบน $(-\infty, \infty)$

(c) **พิจารณา** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ ว่ามีค่า

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{[(1+h) + 2] - 3}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{[(1+h)^2 + 2] - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+2h+h^2) - 3}{h} = 2$$

$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ ไม่มีค่า f จึงหาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $x = 1$.

3. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ ax + b & , x > 1 \end{cases}$$

(a) จงหาเงื่อนไขของ a และ b ที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$

พิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$. สมมติว่า f ต่อเนื่องที่ $x = 1$

① $f(1) = 1$

② $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax + b = a + b$

จาก $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ต้องมีค่า ดังนั้น $a + b = 1$

③ จาก ① ② จะได้ว่า $a + b = 1$

(b) ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = 1$ แล้ว จงหาค่าของ a และ b

สมมติว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = 1$

$\therefore \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

ซ้ายมือ

$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(a(1+h) + b) - 1}{h}$

$\therefore \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{a + ah + b - 1}{h}$

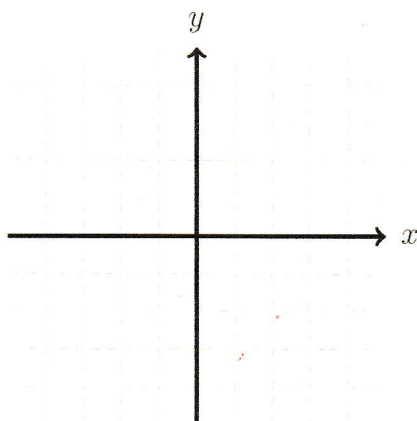
$2 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{a + ah + b - 1}{h}$

จาก f หาอนุพันธ์ได้ โดย Thm. 2.1 ได้ว่า f ต่อเนื่อง นั่นคือได้เงื่อนไข $a + b = 1$

จาก $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{a + ah + b - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 + ah - 1}{h} = 2$

$\therefore a = 2$
ดังนั้น $b = -1$

4. จงวาดกราฟของฟังก์ชันซึ่งต่อเนื่องทุกจุด แต่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ $x = 1$ พร้อมให้เหตุผลประกอบ



(เฉลยอยู่ใน Quiz อันที่ 21 ค.ค.)