

reduced row echelon form

22 Aug 2017

- ① แถวที่มี 0 ทั้งหมด อยู่แถวล่างสุด
- ② มีสมาชิกที่อยู่ซ้ายสุดเป็นเลข 1 เรียกว่า หัวนำ 1 (leading 1)
- ③ สมาชิกในแถวอื่นหัวนำ ^{ในหลัก} หัวนำ เป็นเลข 0
- ④ หัวนำ 1 จะตั้งอยู่ในแถวด้านซ้ายของแถวล่างสุดแถวบนสุด

Ex
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \leftarrow \text{ไม่เป็น}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \leftarrow \text{เป็น}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow 0x + 0y + 0z = 1$$

$0 = 1$ impossible

แบบทดสอบย่อย

ประจำวันอังคารที่ 15 สิงหาคม พ.ศ.2560

ชื่อ-สกุล..... บัญญา ~ รหัสนักศึกษา..... ลำดับที่.....

กำหนดระบบสมการ

$$\begin{cases} L_1: 2x + 3 = y \\ L_2: x + 2y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + 2y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

1. จงเขียนระบบสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูปเมทริกซ์แต่งเติม (Augmented matrix)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{สลับได้}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2. จงตรวจสอบอย่างง่ายว่า ระบบสมการต่อไปนี้มีคำตอบหรือไม่ พร้อมอธิบายการตรวจสอบ

$$\begin{aligned} L_1: \text{slope} &\Rightarrow y = 2x + 3 \quad \text{slope} = 2 \\ L_2: \text{slope} &\Rightarrow x + 2y = -4 \\ &\quad 2y = -x - 4 \quad \text{slope} = -\frac{1}{2} \\ &\quad y = -\frac{1}{2}x - 2 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} L_1: \text{slope} &\Rightarrow y = 2x + 3 \quad \text{slope} = 2 \\ L_2: \text{slope} &\Rightarrow x + 2y = -4 \\ &\quad 2y = -x - 4 \quad \text{slope} = -\frac{1}{2} \\ &\quad y = -\frac{1}{2}x - 2 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{"Consistent"} \\ \text{มีคำตอบเดียว} \\ \text{(independent)} \end{array}$$

3. จงใช้การกำจัดของเกาส์ - จอร์แดน (Gauss-Jordan Elimination Method) หาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 \leftrightarrow R_1 \\ R_1 \leftrightarrow R_2 \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \\ &\quad \begin{array}{l} 2-2(1) \\ -1-2(2) \\ -3-2(-4) \end{array} = \begin{array}{l} 0 \\ -5 \\ 5 \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} -\frac{1}{5}R_2 \rightarrow R_2 \\ &\quad \begin{array}{l} -2(0) \\ 2-2(1) \\ -4-2(-1) \end{array} = \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -2 \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1 \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \begin{array}{l} \text{แทน } (-2, -1) \text{ ใน ①} \\ 2(-2) + 3 = -1 \quad \text{จริง} \\ \text{แทน } (-2, -1) \text{ ใน ②} \\ (-2) + 2(-1) = -4 \quad \text{จริง} \end{array}$$

$$3x - 4y + 4z = 7$$

Example 13 Solve the system $x - y - 2z = 2$.

$$2x - 3y + 6z = 5$$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 3 & -4 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 6 & 5 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & 7 \\ 2 & -3 & 6 & 5 \end{array} \begin{array}{l} R_2 \leftrightarrow R_1 \\ R_1 \leftrightarrow R_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & 1 \end{array} \begin{array}{l} (R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2) \\ (R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3) \\ (R_2 + R_1 \rightarrow R_2) \\ (R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3) \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -10 & -1 \\ 0 & -1 & 10 & 1 \end{array} \begin{array}{l} -1R_2 \rightarrow R_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -12 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} R_1 + R_2 \rightarrow R_1 \\ R_3 + R_2 \rightarrow R_3 \end{array}$$

of variables = 2
of eqns = 3 } dependent.

dependent.

$$\begin{aligned} x - 12z &= 1 \rightarrow x = 12z + 1 \\ y - 10z &= -1 \rightarrow y = 10z - 1 \\ \text{let } z &= a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 12a + 1 \\ y &= 10a - 1 \\ z &= a \end{aligned}$$

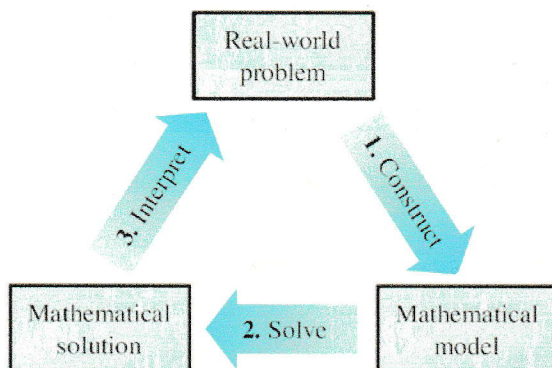
Solution set is $\{(12a+1, 10a-1, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

$$a=1 \text{ gives } (13, 9, 1)$$

$$a=0 \text{ gives } (1, -1, 0)$$

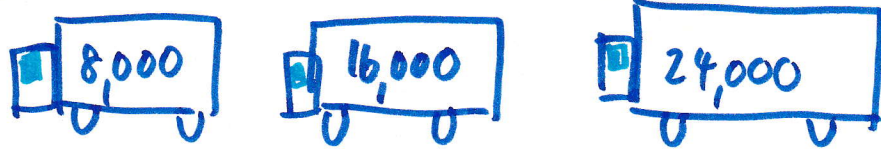
$$a=100 \text{ gives } (1201, 999, 100)$$

Applications



of variables < # of eqns

Example 14 A rice mill wants to transport 520,000 kilograms of rice via 24 trucks. Trucks with three different carrying capacities are available: 8,000 kilograms, 16,000 kilograms and 24,000 kilograms. How many of each type of trucks should be used?



จำนวนที่รถบรรทุก 8,000 kg จะ x คัน
 " " 16,000 kg จะ y คัน
 " " 24,000 kg จะ z คัน

$$\begin{aligned}
 &1 \quad x + y + z = 24 \quad (\text{เงื่อนไขของจำนวนรถ}) \quad (1) \\
 &2 \quad 8,000x + 16,000y + 24,000z = 520,000 \quad (\text{เงื่อนไขของปริมาณข้าว}) \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ระบบสมการ} \quad \left. \begin{aligned} x + y + z &= 24 \\ x + 2y + 3z &= 65 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 24 \\ 1 & 2 & 3 & | & 65 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอน Reduced-row echelon

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 2 & 41 \end{array} \right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 24 \\ 0 & 1 & 2 & | & 41 \end{bmatrix} R_2 - R_1 \rightarrow R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -17 \\ 0 & 1 & 2 & | & 41 \end{bmatrix} R_1 - R_2 \rightarrow R_1$$

คำตอบที่เป็นไปได้

$(0, 7, 17)$ และ
 $(1, 5, 18)$,
 $(2, 3, 19)$
 $(3, 1, 20)$

$$\begin{aligned}
 &\downarrow \\
 &\left. \begin{aligned} x - z &= -17 \\ y + 2z &= 41 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= z - 17 \\ y &= -2z + 41 \end{aligned} \\
 &\text{ให้ } z = a \in \mathbb{R} \text{ แล้ว} \\
 &\quad x = a - 17 \\
 &\quad y = -2a + 41
 \end{aligned}$$

$$\text{Solution set is } \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-17 \\ -2a+41 \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

x	y	z
0	7	17
1	5	18
2	3	19

Basic operations of matrices, inverse matrix and matrix equations

1. Addition and Subtraction of Matrices

To add or subtract matrices, they must be of the same order.

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{ij} + b_{ij} \end{bmatrix} \qquad A - B = \begin{bmatrix} a_{ij} - b_{ij} \end{bmatrix}$$

Example 15

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 6 & -7 & 9 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-(-1) & -3-2 & 1-3 \\ 0-6 & 5-(-7) & -2-9 \\ 5-0 & -6-(-4) & 0-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -2 \\ -6 & 12 & -11 \\ 5 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

2. Scalar Multiplication

The product of a number k and a matrix A is the matrix denoted by kA

$$\mathbf{kA} = [\mathbf{ka}_{ij}]$$

Example 16 Given $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 6 & -7 & 9 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}$. Then $-2A = \begin{bmatrix} (-2)(-1) & (-2)(2) & (-2)(3) \\ (-2)(6) & (-2)(-7) & (-2)(9) \\ (-2)(0) & (-2)(-4) & (-2)(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -6 \\ -12 & 14 & -18 \\ 0 & 8 & -16 \end{bmatrix}$

3. Multiplication

3.1 Row by column multiplication

First, the number of columns of the matrix on the left must equal the number of rows of the matrix on the right, so matrix multiplication is defined.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} \\ \underline{5} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{6} \\ \boxed{7} & \boxed{8} & \boxed{9} \\ \boxed{10} & \boxed{11} & \boxed{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & 80 & 90 \\ 158 & 184 & 210 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{(1)(1) + (2)(4) + (3)(7) + (4)(10)}{(5)(1) + (6)(4) + (7)(7) + (8)(10)}$$

$$A = \begin{bmatrix} (1)(2) + (2)(3) + (3)(8) + (4)(11) \\ (5)(2) + (6)(5) + (7)(8) + (8)(11) \end{bmatrix}_{a \times b}$$