

2.5 Derivatives of Trigonometric Functions (หน้า 41)

8

Before we actually get into the derivatives of the trigonometric functions we need to give a couple of limits that will show up in the derivation of two of the derivatives.

ทวนดูให้

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \text{ and } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0.$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Here is the definition of the derivative for the sine function.

ทวนดูนิยามของ $\sin x$ โดยใช้สูตร & ลิมิตที่ทวนดูให้

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \rightarrow \text{ทวนดูนิยาม}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cosh + \cos x \sinh - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \sinh - \sin x + \sin x \cosh}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \sinh}{h} - \frac{\sin x (1 - \cosh)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cosh}{h} \right)$$

$$= \cos x \cdot 1 - \sin x \cdot 0 = \cos x - 0 = \cos x$$

Here are the derivatives of all six of the trigonometric functions.

9

THEOREM 2.8

$$1. \frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$$

$$2. \frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$$

$$3. \frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$$

$$4. \frac{d}{dx}[\cot x] = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$5. \frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$$

$$6. \frac{d}{dx}[\operatorname{cosec} x] = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

Example 18 1. Let $f(x) = x^2 \tan x$. Find $f'(x)$.

Solution.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= x^2 \frac{d[\tan x]}{dx} + \tan x \cdot \frac{d[x^2]}{dx} \\
 &= x^2 \cdot \sec^2 x + (\tan x) \cdot (2x) \\
 &= x^2 \cdot \sec^2 x + 2x \tan x
 \end{aligned}$$

2. Let $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$. Find $f'(x)$.

Solution.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(1 + \cos x) \frac{d[\sin x]}{dx} - (\sin x) \frac{d[1 + \cos x]}{dx}}{(1 + \cos x)^2} \\
 &= \frac{(1 + \cos x)(\cos x) - (\sin x)(0 + (-\sin x))}{(1 + \cos x)^2} \quad \checkmark \\
 &= \frac{\cos x + (\cos^2 x + \sin^2 x)}{(1 + \cos x)^2} = 1 \\
 &= \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x} \quad \cancel{\neq}
 \end{aligned}$$

3. Let $f(x) = \sec x$. Find $f''(\frac{\pi}{4})$.

อนุพันธ์อันดับที่ 2 (หาอนุพันธ์ก่อน แล้วหาค่าแทนค่า $\frac{\pi}{4}$)

Solution.

$$f'(x) = \sec x \cdot \tan x$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sec x \frac{d}{dx}[\tan x] + \tan x \frac{d}{dx}[\sec x] \\ &= (\sec x)(\sec^2 x) + (\tan x)(\sec x \tan x) \\ &= \sec^3 x + (\sec x)(\tan^2 x) \end{aligned}$$

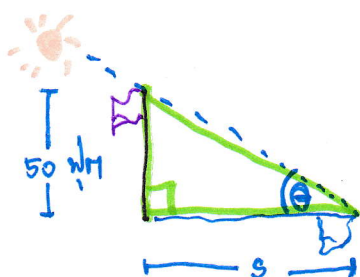
$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f''(\frac{\pi}{4}) &= \sec^3(\frac{\pi}{4}) + \sec(\frac{\pi}{4}) \cdot \tan^2(\frac{\pi}{4}) \\ &= (\sqrt{2})^3 + \sqrt{2} \cdot (1)^2 \\ &= 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \quad \neq \end{aligned}$$

เสาธงยาว 50 ฟุต ความยาวเงาของเสาธง ขึ้นกับมุมที่ดวงอาทิตย์ทำกับพื้นโลก

Example 19 On a sunny day, a 50 ft flagpole casts a shadow that changes with the angle of elevation of the Sun. Let s be the length of the shadow and θ the angle of elevation of the Sun. Find the rate at which the length of the shadow is changing with respect to θ when $\theta = 45^\circ$. Express your answer in units of feet/degree.

ให้ s แทนความยาวเงา และ θ แทนมุมของดวงอาทิตย์
ลงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความยาวของเงา ที่ขึ้นกับมุม เมื่อ $\theta = 45^\circ$

Solution.



สมการที่ได้จากรูปคือ

$$\tan \theta = \frac{50}{s}$$

$$\text{จัดรูปได้ } s = \frac{50}{\tan \theta} = 50 \cot \theta$$

$$\text{ดังนั้น } s = 50 \cot \theta$$

$$\text{หา } \frac{ds}{d\theta} \bigg|_{\theta=45^\circ} \quad \text{ในหน่วย ฟุต/องศา}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \frac{ds}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}[50 \cot \theta] \\ &= 50 \cdot (-\operatorname{cosec}^2 \theta) \\ &= -50 \operatorname{cosec}^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ทำให้ } \frac{ds}{d\theta} \bigg|_{\theta=45^\circ} &= -50 \operatorname{cosec}^2 45^\circ \\ &= -50 (\sqrt{2})^2 \\ &= -100 \text{ ฟุต/เรเดียน} \end{aligned}$$

$$= -100 \frac{\text{ฟุต}}{\text{เรเดียน}} \cdot \frac{\pi \text{ เรเดียน}}{180 \text{ องศา}}$$

$$= \frac{-100 \cdot \pi}{180} \frac{\text{ฟุต}}{\text{องศา}}$$

$$\approx -1.75 \text{ ฟุต/องศา}$$

ทุก 1 องศาที่มุมเพิ่มขึ้น
เงาจะสั้นลง 1.75 ฟุต

2.6 The Chain Rule (หน้า 44)

กฎลูกโซ่ ถ้า g หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ f หาอนุพันธ์ได้ที่ $g(x)$
THEOREM 2.9 (THE CHAIN RULE) If g is differentiable at x and f is differentiable at $g(x)$,

then the composition $f \circ g$ is differentiable at x . Moreover, if

แล้ว ฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$ จะหาอนุพันธ์ได้ที่ x และ

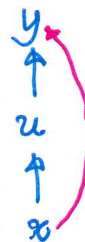
$$y = f(g(x)) \text{ and } u = g(x) \quad \text{u ค่าวนได้จาก } x$$

then $y = f(u)$ and

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

y ค่าวนได้จาก $g(x)$

นั่นคือ y ค่าวนได้จาก u



ยกตัวอย่าง $z = f(a)$ $a = g(t)$ $t = h(u)$ $u = w(b)$

$$\text{ถาม } \frac{dz}{db} = \frac{dz}{da} \cdot \frac{da}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{db}$$



Example 20 Find $\frac{dw}{dt}$ if $w = \tan x$ and $x = 4t^3 + t$.
 หา w ค่าวนได้จาก x x ค่าวนได้จาก t

15

Solution.

ใช้กฎลูกโซ่

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{d[\tan x]}{dx} \cdot \frac{d[4t^3 + t]}{dt}$$

$$= (\sec^2 x) (12t^2 + 1) \quad \checkmark$$

$$= (\sec^2(4t^3 + t)) (12t^2 + 1) \quad \text{✗}$$

ถ้าให้ $\frac{d}{dx} [\sin x]$

Example 21 Find $\frac{dy}{dt}$ if $y = \sin(4t^3)$.

ให้ $x = 4t^3$ จะได้ $y = \sin x$

16

Solution.

โดยกฎลูกโซ่

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{d[\sin x]}{dx} \cdot \frac{d[4t^3]}{dt}$$

$$= \cos x \cdot 12t^2$$

$$= \cos(4t^3) \cdot 12t^2$$

ถ้าให้ x
เราทำแทนค่า
ตัวแปรกลับเป็น t

ให้ $t = x^2 - 9x + 1$

จะได้ $y = \sqrt[5]{t^2} \Rightarrow y = t^{2/5}$

17

Example 22 Find $\frac{dy}{dx}$ if $y = \sqrt[5]{(x^2 - 9x + 1)^2}$.

Solution.

โดยกฎลูกโซ่

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{d[t^{2/5}]}{dt} \cdot \frac{d[x^2 - 9x + 1]}{dx}$$

$$= \left(\frac{2}{5} \cdot t^{-3/5} \right) (2x - 9)$$

$$= \frac{2}{5} (x^2 - 9x + 1)^{-3/5} (2x - 9)$$

ถ้าให้ t แทนค่า
เปลี่ยนกลับเป็น x

$$\text{ให้ } a = 9z+1$$

18

Example 23 Find $\frac{dw}{dz}$ if $w(z) = \frac{1}{\sqrt{9z+1}}$.

$$\text{จะได้ } w = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a^{1/2}} = a^{-1/2}$$

Solution.

$$\begin{aligned} \text{โดยกฎลูกโซ่} \quad \frac{dw}{dz} &= \frac{dw}{da} \cdot \frac{da}{dz} \\ &= \frac{d[a^{-1/2}]}{da} \cdot \frac{d[9z+1]}{dz} \\ &= \left(-\frac{1}{2}a^{-3/2}\right)(9+0) \\ &= -\frac{1}{2}(9z+1)^{-3/2} \cdot 9 \\ &= \frac{-9}{2 \sqrt{(9z+1)^3}} \end{aligned}$$

✓

$$\text{ให้ } b = x^2-5$$

19

Example 24 Find $\frac{df}{dx}$ if $f(x) = (x^2-5)^{-8}$.

$$\text{จะได้ } f = b^{-8}$$

Solution.

$$\begin{aligned} \text{โดยกฎลูกโซ่} \quad \frac{df}{dx} &= \frac{df}{db} \cdot \frac{db}{dx} \\ &= \frac{d[b^{-8}]}{db} \cdot \frac{d[x^2-5]}{dx} \\ &= -8b^{-9} \cdot (2x-0) \\ &= -8(x^2-5)^{-9}(2x) \\ &= \frac{-16x}{(x^2-5)^9} \end{aligned}$$

✓

≠