31 สิงหาคม 2560

ทบทวน : กฎลูกโซ่

สูตรที่รู้

$$\frac{d}{dx}[x^n] = n \cdot x^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{cosec} x] = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x.$$

ให้ $y = \sin^5(7x^8+2) \Rightarrow \;^5$

ให้ $a = \sin(7x^8+2)$ จะได้ $y = a^5$

ให้ $b = 7x^8+2$ จะได้ $a = \sin b$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{da} \cdot \frac{da}{db} \cdot \frac{db}{dx} = \ldots$$

กฎลูกโซ่ ใช้เมื่อหาอนุพันธ์ของสิ่งที่ซับซ้อนขึ้น

เราจะกำหนดตัวแปรใหม่ เพื่อให้ดูซับซ้อนน้อยลง

$y = \sin(\underbrace{x^3+2x})$ หา $\frac{dy}{dx}$

แปลงให้เหลือตัวแปรเดียว เหมือนในสูตร

ให้ $t = x^3+2x$

ดังนั้น $y = \sin t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \ldots$$

กฎลูกโซ่ ver 2. f^n ประกอบ

$$\frac{d}{dx} f \circ g(x) = \frac{d}{dx}(f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

อนุพันธ์ของ $g(x)$

ดิฟ f แล้วแทน $g(x)$ ลงไปตรงที่ๆเคยเป็น x

ต.ย เช่น จงหาอนุพันธ์ของ $(\sin x)^5$

$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$

$g(x) = \sin x \Rightarrow g'(x) = \cos x$

$$\frac{d}{dx}(\sin x)^5 = 5(\sin x)^4 \cdot \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\left[-3x^{-2}\right] = (-3)(-2)x^{-2-1} = 6x^{-3}$$

Example 25 Find $\frac{dg}{dt}$ if $g(t) = \frac{-3}{\cos^2(t-7)}$. $= -3(\cos(t-7))^{-2} \Rightarrow -3\cdot\bullet^{-2}$

Solution.

$$\frac{dg}{dt} = 6(\cos(t-7))^{-3}\cdot\frac{d}{dt}[\cos(t-7)]$$

$$= 6(\cos(t-7))^{-3}\cdot(-\sin(t-7))\cdot\frac{d}{dt}(t-7)$$

$$= 6(\cos(t-7))^{-3}\cdot(-\sin(t-7))\cdot 1 \quad \#$$

$$= \frac{-6\sin(t-7)}{\cos^3(t-7)}$$

Example 26 Find $\frac{ds}{dt}$ if $s(t) = \sec^3(\cos(\sqrt{t}))$ $= (\sec(\cos\sqrt{t}))^3$

Solution.

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(\sec(\cos\sqrt{t}))^3\right]$$

$$= 3(\sec(\cos\sqrt{t}))^2\cdot\frac{d}{dt}[\sec(\cos\sqrt{t})]$$

$$= 3(\sec(\cos\sqrt{t}))^2\cdot\sec(\cos\sqrt{t})\cdot\tan(\cos\sqrt{t})\cdot\frac{d}{dt}[\cos\sqrt{t}]$$

$$= \underbrace{3\sec^2(\cos\sqrt{t})\cdot\sec(\cos\sqrt{t})}\cdot\tan(\cos\sqrt{t})\cdot(-\sin\sqrt{t})\cdot\frac{d}{dt}[\sqrt{t}]$$

$$= 3\sec^3(\cos\sqrt{t})\cdot\tan(\cos\sqrt{t})\cdot(-\sin\sqrt{t})\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \quad \#$$

$$= \frac{-3\sec^3(\cos\sqrt{t})\cdot\tan(\cos\sqrt{t})\cdot\sin\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} \quad \#$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล และลอการิทึม

3.2 Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions

3.2.1 Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions (หน้า 53)

Here is a summary of the derivative formulas in this section.

THEOREM 3.1

เช่น $\frac{d}{dx}[3^x] = 3^x \cdot \ln 3$

เช่น $\frac{d}{dx}[\log_2 x] = \frac{1}{x \cdot \ln 2}$

1. $\frac{d}{dx}[a^x] = a^x \ln a$
2. $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$ เช่น $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$
3. $\frac{d}{dx}[\log_a x] = \frac{1}{x \ln a}$
4. $\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx}[3e^x] = 3 \cdot e^x$

$\frac{d}{dx}[x^n] = n \cdot x^{n-1}$

คำถาม $\frac{d}{dx}[x^x]$ ใช้สูตรไหน?

ตอบ ไม่มีสูตร ต้องใช้สมบัติ log มาช่วย + ต้องใช้อนุพันธ์ของ f^n แฝง (หัวข้อ 3.1)

สูตร 1.

Example 5 Find the derivative of $y = 2^{\ln 5x}$.

Solution.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[2^{\ln 5x}]$$

$$= 2^{\ln 5x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{d}{dx}[\ln 5x]$$ สูตร 4

$$= 2^{\ln 5x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{5x} \cdot \frac{d}{dx}[5x]$$

$$= 2^{\ln 5x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{5x} \cdot 5 = \frac{2^{\ln 5x} \cdot \ln 2}{x}$$

Example 6 Find the derivative of $y = e^{\cos^3 x}$. $e^{\text{ตัวแปร.}}$ ตรงกับสูตร 2

Solution.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[e^{\cos^3 x}\right]$$

ใช้สูตร 2

$$= e^{\cos^3 x} \cdot \frac{d}{dx}\left[\cos^3 x\right]$$

จัดรูป

$$= e^{\cos^3 x} \frac{d}{dx}\left[(\cos x)^3\right]$$

อนุพันธ์ x^3

$$= e^{\cos^3 x} \cdot 3(\cos x)^2 \cdot \frac{d}{dx}[\cos x]$$

$$= e^{\cos^3 x} \cdot 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) \quad \#$$

Example 7 Find the derivative of $y = (\log_3 x)^3$.

Solution.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[(\log_3 x)^3\right]$$

อนุพันธ์ x^3

$$= 3(\log_3 x)^2 \cdot \frac{d}{dx}[\log_3 x]$$

สูตร 3

$$= 3(\log_3 x)^2 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 3}$$

The method used to derive this formula can be used to obtain generalized derivative formulas for the remaining inverse trigonometric functions. The following is a complete list of these formulas, each of which is valid on the natural domain of the function.

Theorem 3.2

1. $\dfrac{d}{dx}[\sin^{-1} u] = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$
2. $\dfrac{d}{dx}[\cos^{-1} u] = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}[\tan^{-1} u] = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}[\cot^{-1} u] = \dfrac{-1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$
5. $\dfrac{d}{dx}[\sec^{-1} u] = \dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$
6. $\dfrac{d}{dx}[\csc^{-1} u] = \dfrac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

มอง x^3+1 เป็น u ในสูตร

Example 10 Find the derivative of $y = \sin^{-1}(x^3+1)$.

Solution.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[\sin^{-1}(x^3+1)]}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}} \cdot \frac{d[x^3+1]}{dx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}} \cdot (3x^2+0)$$

มอง $\sqrt{x}$ เป็น u ในสูตร

Example 11 Find the derivative of $y = \cos^{-1}(\sqrt{x})$.

Solution. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left[\cos^{-1}(\sqrt{x})\right] = \dfrac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \dfrac{d[\sqrt{x}]}{dx}$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \#$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}} = \frac{-1}{2\sqrt{x(1-x)}} \quad \#$$