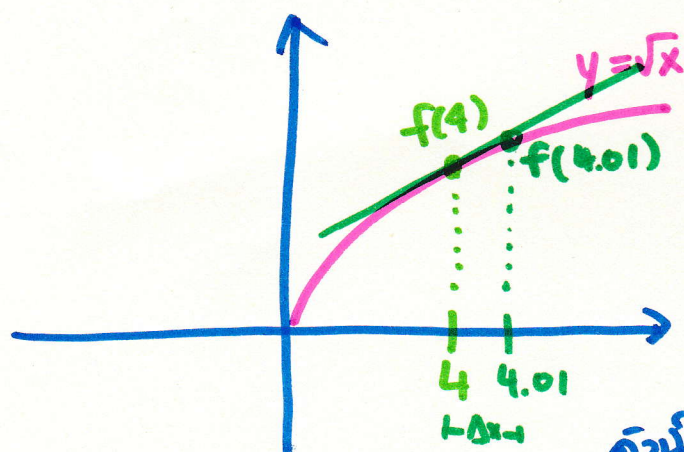


สรุปประเด็นเรื่อง การทำป็นเชิงเส้น, Differential

1

- ① เราสามารถประมาณค่าฟังก์ชันที่จุดใดจุดหนึ่งด้วยฟังก์ชันเส้นตรงที่ผ่านจุดนั้นได้
โดยพิจารณาฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) ของเส้นสัมผัสกราฟ
จุดนั้นจะเรียกว่า การทำให้เป็นเชิงเส้น (LOCAL LINEAR APPROXIMATION)
- ② เราใช้ความชันของ dy, dx ในรูป $\frac{dy}{dx}$ แล้วใช้ dy ไปหาค่า
ประมาณค่าฟังก์ชันที่เปลี่ยนแปลงไป.

① Local linear Approximation



สังเกตว่าค่าความชันที่ $x=4$ คือ $\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$
จะเห็นว่า เราคำนวณ $\sqrt{4}$ ได้ง่าย!
แต่ $\sqrt{4.01}$ คำนวณยากและคำนวณลำบาก
เมื่อพิจารณาว่า $f(x) = \sqrt{x}$
หาค่า $f(4.01)$ ด้วยการใช้
การประมาณค่า $f(4.01)$.

ดังนั้น แทนที่จะไปหาค่า $f(4.01)$ โดยตรง
เราเลือกจุดที่ใกล้ๆ จุด $x=4.01$
ซึ่งค่า $x_0=4$ ที่ใกล้ $x=4.01$ ซึ่งคำนวณ
 $f(x_0) = \sqrt{x_0}$ ได้ว่า $f(4) = \sqrt{4} = 2$

แล้วเราคำนวณจากสมการเส้นสัมผัสที่ $x_0=4$

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ ที่ } x_0 = 4 \text{ แทน}$$

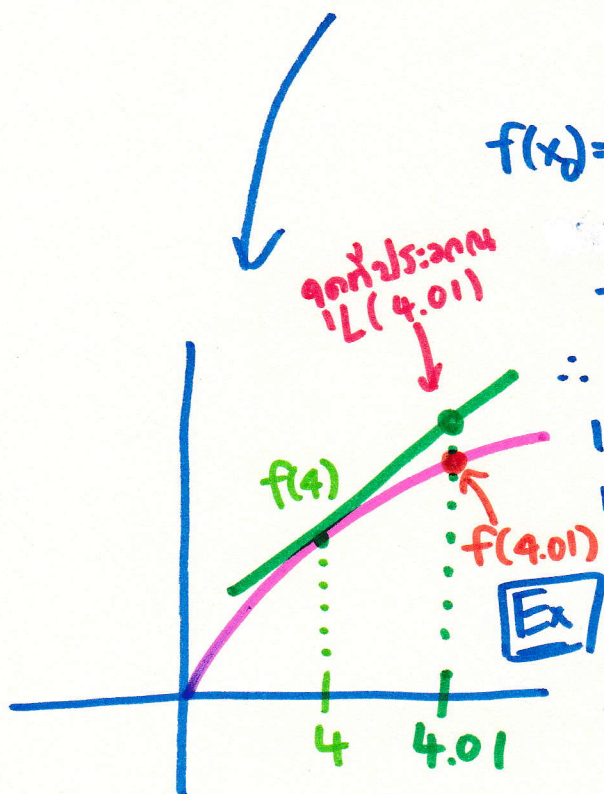
$\therefore$ ถ้า x_0 กับ x ใกล้กันมากพอ

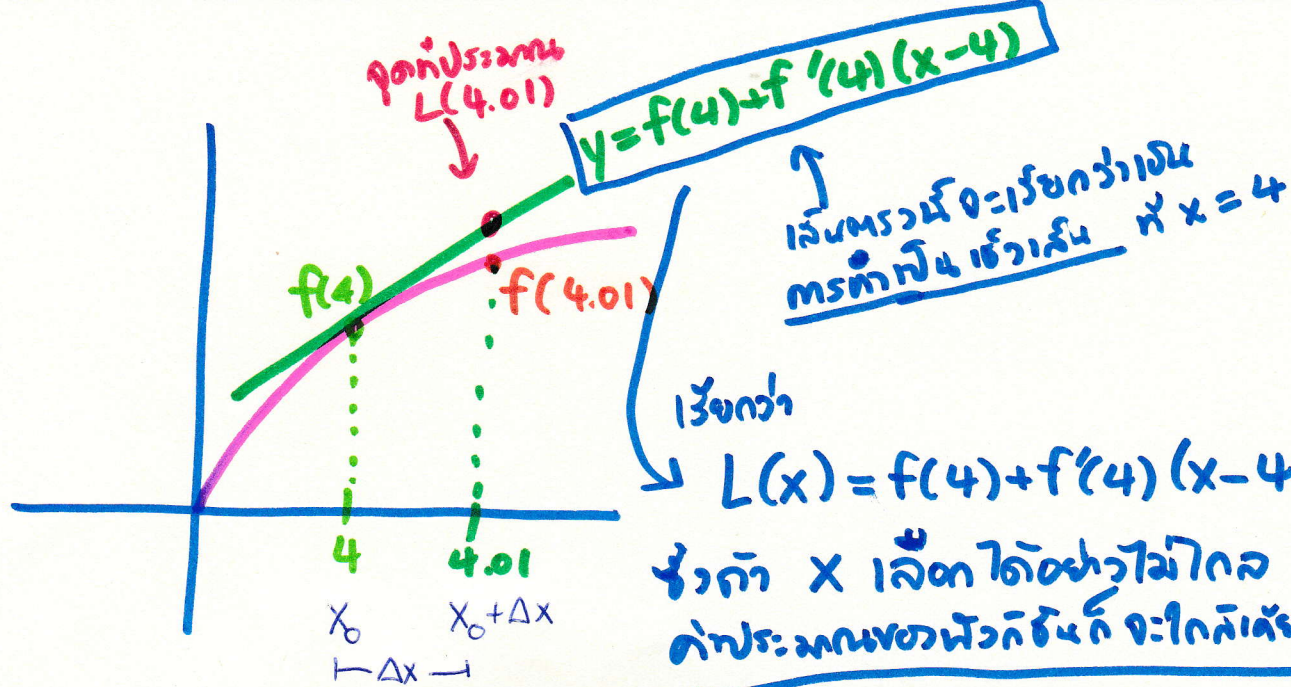
เราก็สามารถประมาณค่าของ $f(x)$ ด้วย
เส้นตรงที่สัมผัส $f(x)$ ที่ $(x_0, f(x_0))$

Ex

หาค่าสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(4, f(4))$
ซึ่งจาก $f(x) = \sqrt{x}$, ที่จุด $(4, f(4))$
เส้นสัมผัส $f(x)$ มีความชัน $= f'(4)$

$$\therefore \text{สมการเส้นสัมผัสคือ } \boxed{y = f(4) + f'(4)(x-4)}$$





นั่นคือ $f(x) \approx L(x) = f(4) + f'(4)(x-4)$

∴ ถ้าเราสนใจที่จุด x_0 โดยค่าประมาณ $f(x)$ ที่จุด x

คือ $f(x) \approx L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

พจน์ $f(x_0)$ คือค่าที่ x และในกรณีที่ $f(x_0)$ จะง่าย

ถ้าสมมติว่า x คือ $x_0 + \Delta x$ แล้ว

$f(x_0 + \Delta x) \approx L(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

(ดู ต.ย. ประกอบในไฟล์ lecture ในนอ)

② Differential

ในนิยามของ $\frac{dy}{dx}$ แทนความชันของเส้นสัมผัสของ y ที่จุด x . เราสามารถหาตัวประกอบ dx, dy ซึ่งเมื่อเราคิดอัตราส่วน dx แล้ว $= dy$ ได้ นิยามของ dy

นั่นคือ ถ้า $y = f(x)$ แทนที่ dy

differential ของ y (นั่นคือ dy) ก็แทนที่ dy

$dy = f'(x) dx$

นั่นคือ dx คือ differential ของ x ซึ่งมันคือตัวประกอบ

Ex ถ้า $y = x^5 + 37x$ แล้ว

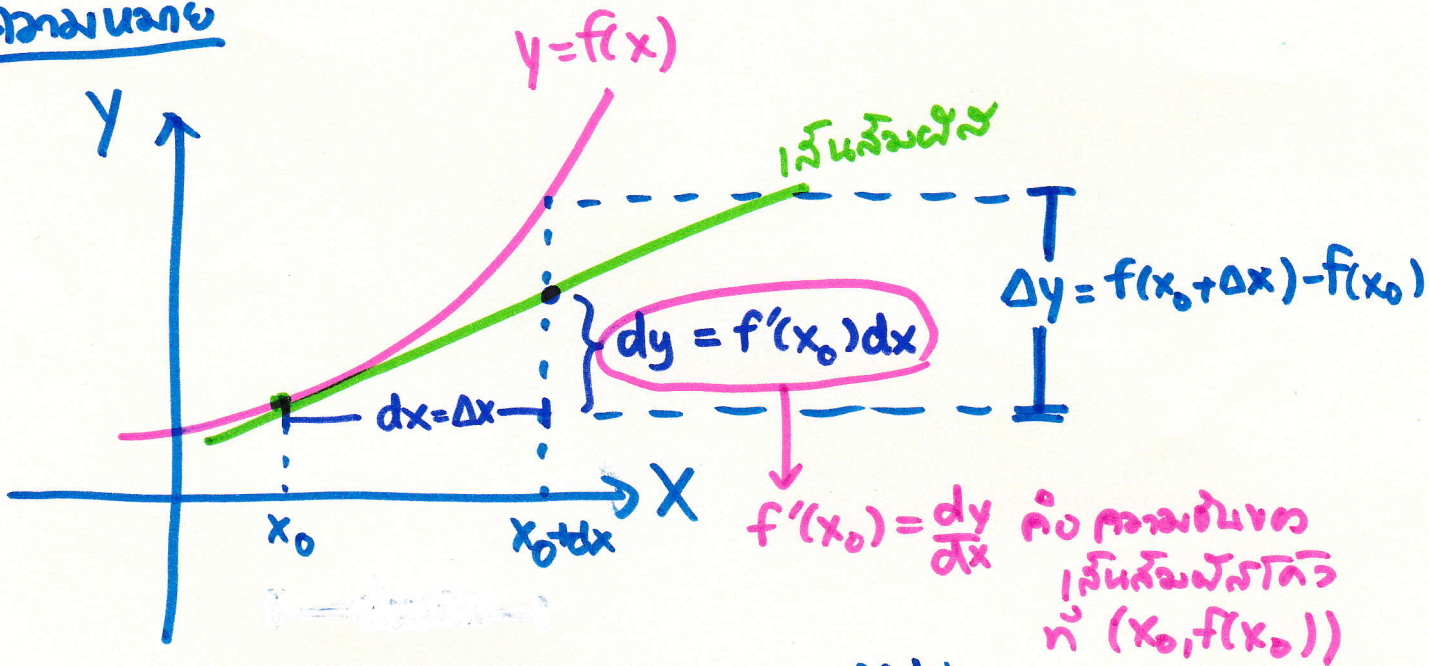
$$dy = (5x^4 + 37)dx$$

ถ้า $dx \neq 0$ แล้ว จะได้ว่า dy หารด้วย dx ได้เท่ากับ $f'(x)$

เพราะว่า $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)dx}{dx} = f'(x)$

* นอกจาก $\frac{dy}{dx}$ เป็นสัญลักษณ์ที่แทนอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x ที่ใช้กันโดยทั่วไปแล้ว เราจึงนิยามว่า dx, dy ก็เป็น ตัวแปรดิฟเฟอเรนเชียล ที่นิยามไว้ว่า ถ้า $dx \neq 0$ แล้ว ผลหารของ $dy:dx$ คืออนุพันธ์

กราฟและภาพ



กรณีทั่วไป : เราสามารถสรุปได้ว่า
เมื่อ x มีค่าเปลี่ยนไปจาก x_0 ไปยัง x_0+dx แล้ว
ค่าของ y ก็เปลี่ยนไปเป็น $y + \Delta y$

โดยที่ $\Delta y = f(x_0+dx) - f(x_0)$

ถ้า dx เป็นค่าที่น้อย แล้วจะเห็นว่า dy ก็ใกล้เคียงกับ Δy ด้วย
นั่นคือ $dy \approx \Delta y$

หรือ $\Delta y \approx f'(x)dx$ เมื่อ dx น้อย

จะเห็นว่า ถ้า (เมื่อหาค่า Linear approx.)

$$\Delta y = f(x_0 + dx) - f(x_0) \approx L(x_0 + dx) - f(x_0) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x - f(x_0)$$

ค่าของ $f(x_0)$ กับ $L(x_0)$ เป็นค่าที่เหมือนกัน

4

$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x \quad \text{ซึ่งถ้า } \Delta x = dx \text{ แล้ว}$$

$$\Delta y \approx f'(x_0)dx$$

Ex 18 : สมมติว่า วัดค่าของ x แล้วมีความคลาดเคลื่อน Δx จะทำให้ค่าของพ.ท. $y = x^2$ เปลี่ยนไปอย่างไร?

$$\text{จาก } y = x^2$$

$$\therefore dy = 2x dx$$

เมื่อวัด $x = 8$ นี้ จะทำให้ค่า y เปลี่ยนไป

$$dy = 16 dx$$

นั่นหมายความว่า เมื่อ มีความคลาดเคลื่อน dx ก็จะทำให้ พ.ท. y เปลี่ยนไป $16 dx$

จากโจทย์บอกว่า เราวัดความยาวมีความคลาดเคลื่อน: $\pm \frac{1}{64}$ นิ้ว

$$\therefore -\frac{1}{64} \leq dx \leq \frac{1}{64}$$

$$\text{ดังนั้น เราจะได้ } dy = 16 dx$$

$$\therefore (-\frac{1}{64})(16) \leq 16 dx \leq (\frac{1}{64})(16)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} \leq 16 dx \leq \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4} \leq dy \leq \frac{1}{4}$$

นั่นคือ พ.ท. y จะมีความคลาดเคลื่อน $\pm \frac{1}{4}$ นิ้ว

เมื่อวัดความยาวความคลาดเคลื่อน $\pm \frac{1}{64}$ นิ้ว. #