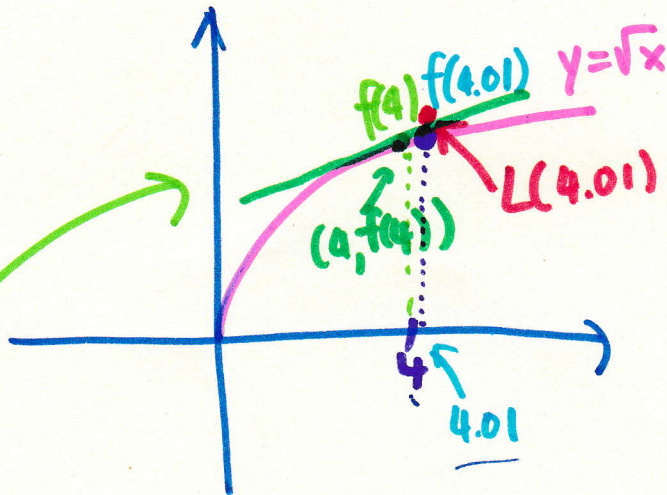


หาค่า $f(x) = \sqrt{x}$ ที่ $x=4.01$ โดยใช้วิธีประมาณ



$f(4) = \sqrt{4}$ ค่าจริง
 $f(4.01) = \sqrt{4.01}$ ค่าจริง

หาค่า $f(x)$ ที่ $x=4.01$ โดยใช้วิธีประมาณ
 ใช้จุด $(x_0, f(x_0))$ และ $f'(x_0)$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

หาค่า $f(x)$ ที่ $x=4.01$ โดยใช้วิธีประมาณ

$$y = f(4) + f'(4)(x - 4) \quad \left| \begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(4) = \frac{1}{4} \\ f(4) = 2 \end{array} \right.$$

$$f(x) \approx L(x) = y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4)$$

$$\begin{aligned} L(4.01) &= 2 + \frac{1}{4}(4.01 - 4) \\ &= 2 + \frac{0.01}{4} = 2.0025 \end{aligned}$$

การประมาณแบบนี้เรียกว่า "Local Linear Approximation"

Wolfram Mathematica : $\sqrt{4.01} \approx 2.002498$

Differential and Local Linear Approximation

Local Linear Approximation

Many functions are computable only for specific values. For other values, we need to estimate them from what is known. The line that best approximates the graph of $y = f(x)$ at $x = x_0$ is

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Thus, for values of x near x_0 we can approximate values of $f(x)$ by

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) \approx L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

This is called the *local linear approximation* of f at x_0 . This formula can also be expressed in terms of the increment $\Delta x = (x - x_0)$ as

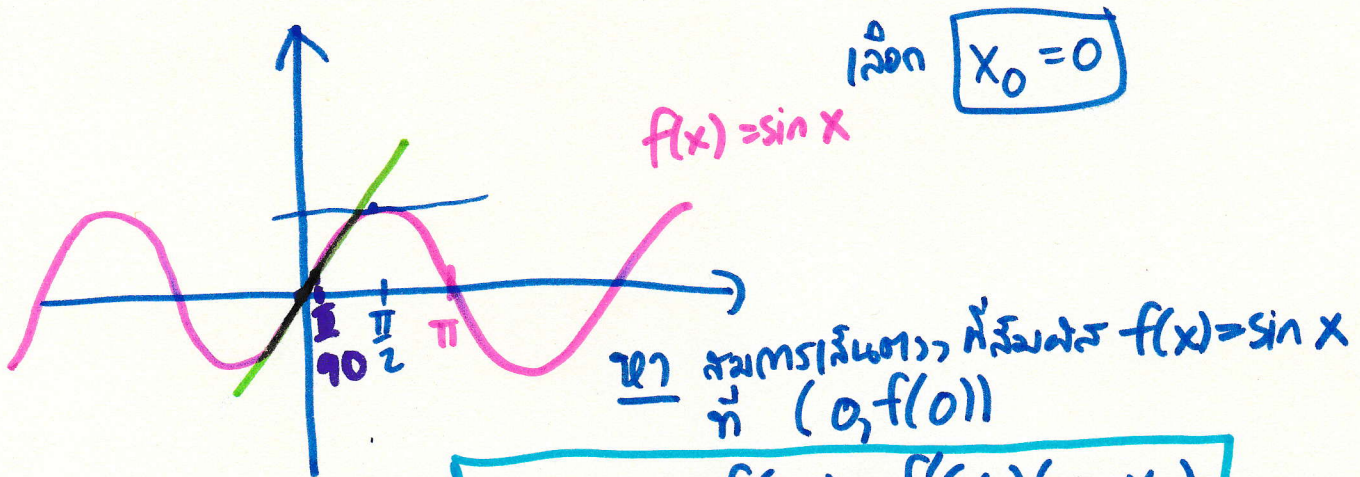
$$x = x_0 + \Delta x$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Approximate $\sin 2^\circ \rightarrow 2^\circ = \frac{\pi}{90}$ radian

$\downarrow$
 $\sin(\frac{\pi}{90})$

($180^\circ \rightarrow \pi$ rad
 $2^\circ \rightarrow \frac{\pi}{90} \times 2 = \frac{\pi}{45}$ rad)



$$L(x) = y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$L(x) = f(x_0) + \cos(x_0)(x - x_0)$$

we know $x_0 = 0$

$$L(x) = f(0) + \cos(0)(x - 0)$$

$$L(\frac{\pi}{90}) = 0 + \frac{\pi}{90}$$

$$\sin(\frac{\pi}{90}) \approx \frac{\pi}{90}$$

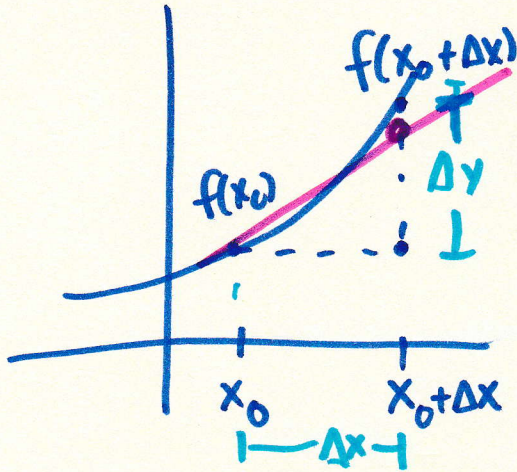
$$\sin x = f(x) \approx L(x) = f(0) + \cos(0)(x - 0) = x$$

$$\sin x \approx x \text{ when } x \text{ is small}$$

Differentials

Let $y = f(x)$ be a differentiable function. The differential of y with respect to x , denoted dy , is $f'(x)dx$, i.e.,

$$dy = f'(x)dx.$$



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

นิยามของ dy, dx
 นิยามของ dy, dx ที่เกี่ยวข้องกัน
 นิยาม $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ← นิยามของ dy, dx

$$dy = f'(x)dx$$

Example 17 Find dy when $y = \sin(2\pi x)$ and discuss the relationship between dy and dx at $x = 1$.

$$y = \sin(2\pi x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(2\pi x) \frac{d}{dx}(2\pi x)$$

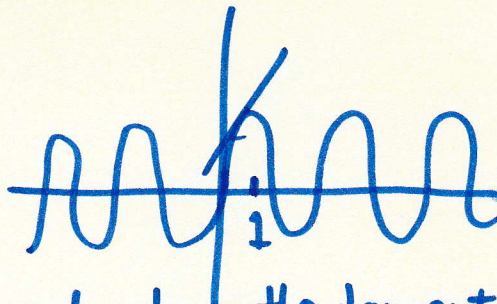
$$\frac{dy}{dx} = 2\pi \cos(2\pi x)$$

$$dy = 2\pi \cos(2\pi x) dx$$

$$x = 1$$

$$dy = 2\pi \cos(2\pi) dx$$

$$dy = 2\pi dx$$



If we travel along the tangent line of the curve $y = \sin(2\pi x)$ at $x = 1$, then the change of dx unit in x produces a change 2π unit in y .

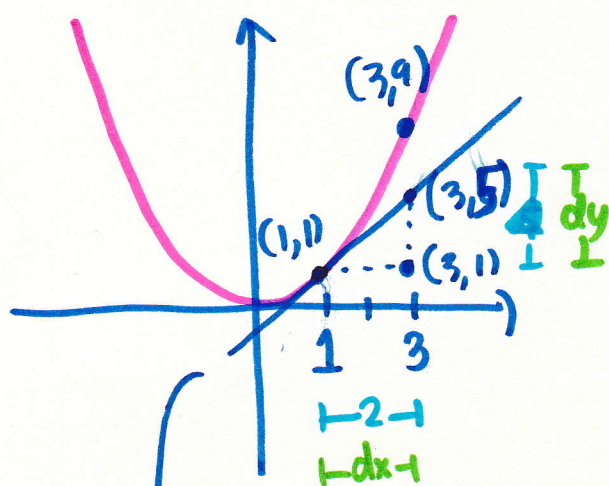
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ถ้า $\Delta x \rightarrow 0$ อัตราส่วน $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ จะเข้าใกล้ $f'(x)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$$

$$\boxed{\Delta y \approx f'(x) \Delta x}$$

Ex $y = x^2$; $\frac{dy}{dx} = 2x$ ที่ $x = 1$



ที่ $x = 1$

$$\boxed{dy = 2dx}$$

เส้นสัมผัสที่จุด $(1, 1)$
 คือ: ความชันเป็น 2

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

$$y = 2(x - 1) + 1$$

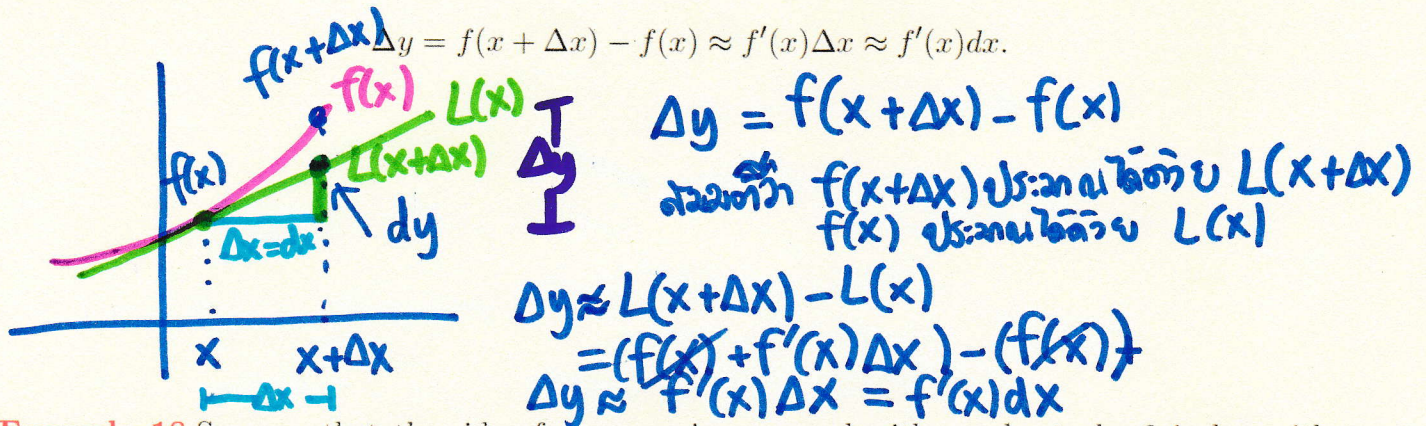
ที่ $x = 3$ แล้ว $y = 5$

Estimation with Differential

Recall that

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

So when Δx is small,

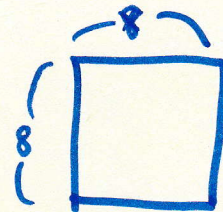


Example 18 Suppose that the side of a square is measured with a ruler to be 8 inches with a measurement of at most $\pm \frac{1}{64}$ inches. Estimate the error in the computed area of the square.

ลวดลาย x เป็นความยาวด้านของ $\square$
 พื้นที่ของ $\square \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

ความยาวด้านของ $\square$ มีค่า $\pm \frac{1}{64}$ นิ้ว $\rightarrow \Delta y \approx dy = f'(x)dx$

$dy = 2x dx$



ถ้า x เป็น 8 นิ้ว

$$dy = 2(8)dx = 16dx$$

$$-\frac{1}{64} \leq dx \leq \frac{1}{64}$$

ความยาว $dy \approx \Delta y$

$16dx$

$$-\frac{16}{64} \leq 16dx \leq \frac{16}{64}$$

$$-\frac{1}{4} \leq 16dx \leq \frac{1}{4}$$

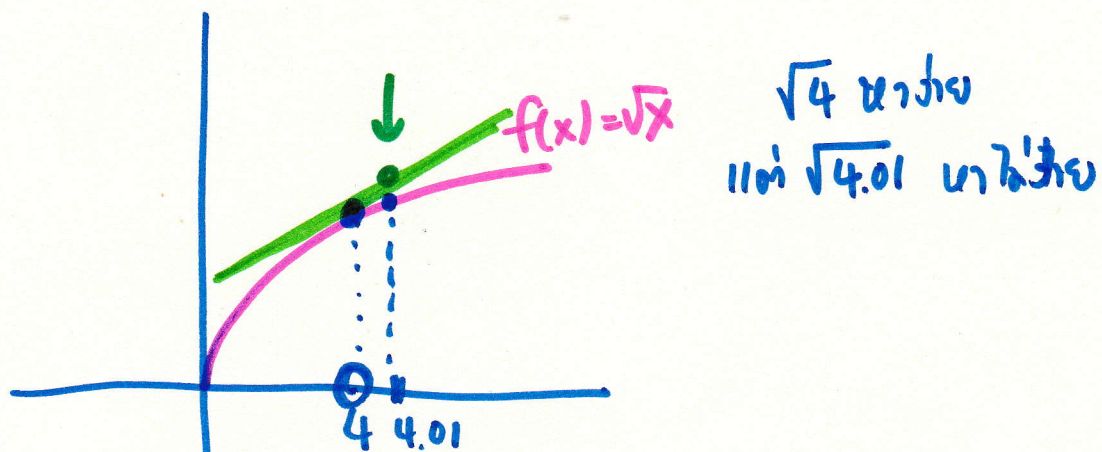
$$-\frac{1}{4} \leq dy \leq \frac{1}{4}$$

$\approx$

$$-\frac{1}{4} \leq \Delta y \leq \frac{1}{4}$$

$\therefore$ ความยาวด้านของ $\square$ มีค่า $\pm \frac{1}{64}$ นิ้ว
 พหุคูณของ $\square$ มีค่า $\pm \frac{1}{4}$ นิ้ว
 หรือ: ความยาวด้าน $\pm \frac{1}{64}$ นิ้ว
 พหุคูณ $\pm \frac{1}{4}$ นิ้ว

ឧទាហរណ៍



① $L(x) = f(x) \approx f(4) + f'(4)(x-4)$

② $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

Notation



កំណត់សម្គាល់នៃសមីការ

$dy = f'(x)dx$

③ $\Delta y \approx dy = f'(x)dx$