

* จุดวิกฤต คือ ค่า x ณ. จุดที่ ① $f'(x) = 0$ หรือ ② $f'(x)$ หาไม่ได้

Example 4 Find all critical points of $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

หาจุดวิกฤตทั้งหมดของ

$f'(x)$ ส่วน = 0

Solution.

จาก $f(x) = x^2 - 4x + 5$

จะได้ $f'(x) = 2x - 4$

พิจารณา $f'(x) = 0$ เมื่อ $2x - 4 = 0$ | $f'(x)$ หาไม่ได้เมื่อ -
 $2x = 4$
 $x = 2$

ดังนั้นจุดวิกฤต คือ 2

Example 5 Find all critical points of $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$.

หาจุดวิกฤตทั้งหมดของ

Solution.

จาก $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ จะได้ $f'(x) = \frac{(x+2) \cdot 1 - (x-2) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$

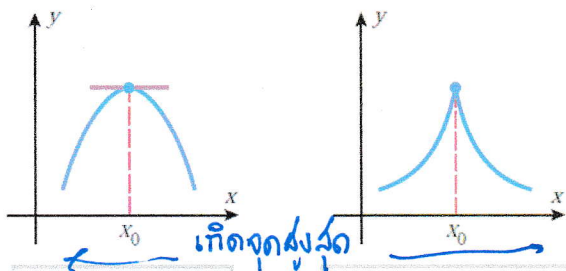
พิจารณา $f'(x) = 0$ เมื่อ $\frac{4}{(x+2)^2} = 0$; $f'(x)$ หาไม่ได้เมื่อ $(x+2)^2 = 0$
 $(x+2) = 0$
 $x = -2$

4 = 0
เป็นไปไม่ได้

ดังนั้นจุดวิกฤต คือ -2 * ไม่อยู่ในโดเมน (ไม่มีจุดวิกฤต)

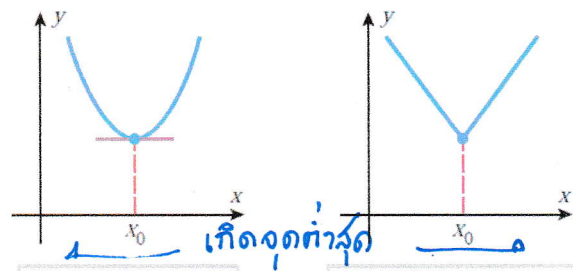
4.4 First derivative test & Second derivative test

(การทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่ 1 & การทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่ 2)



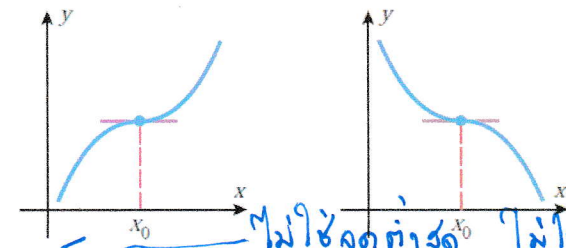
Critical point
Stationary point
Relative maximum

Critical point
Not a stationary point
Relative maximum



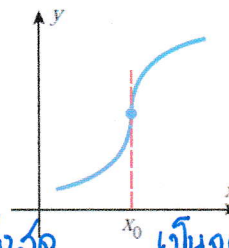
Critical point
Stationary point
Relative minimum

Critical point
Not a stationary point
Relative minimum



Critical point
Stationary point
Inflection point
Not a relative extremum

Critical point
Stationary point
Inflection point
Not a relative extremum



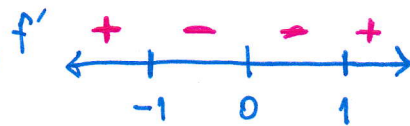
Critical point
Not a stationary point
Inflection point
Not a relative extremum

Critical point
Not a stationary point
Inflection point
Not a relative extremum

* ภาพแสดง ลักษณะกราฟที่จะเกิด ณ. จุดวิกฤต.

• วิเคราะห์อันดับที่หนึ่ง

วาดเส้นจำนวนจากค่าวิกฤต f'



* มี 4 ช่วงที่ต้องทดสอบเครื่องหมาย.

บนช่วง $(-\infty, -1]$ พิจารณา f' ทดสอบ $f'(-2) = 15(-2)^4 - 15(-2)^2 = 180 > 0$

• $[-1, 0]$ • ทดสอบ $f'(-0.1) = 15(-0.1)^4 - 15(-0.1)^2 = -0.1485 < 0$

• $[0, 1]$ • ทดสอบ $f'(0.1) = 15(0.1)^4 - 15(0.1)^2 = -0.1485 < 0$

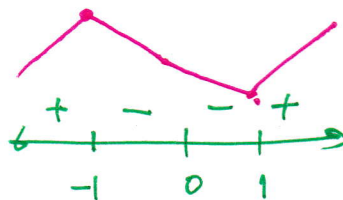
• $[1, \infty)$ • ทดสอบ $f'(2) = 15(2)^4 - 15(2)^2 = 180 > 0$

* สังเกตเครื่องหมายจากซ้ายไปขวา

ที่ -1 เห็นได้ว่า f' เปลี่ยนเครื่องหมายจาก + เป็น - $\Rightarrow$ เกิดจุดสูงสุดสัมพัทธ์

ที่ 0 f' ไม่เปลี่ยนเครื่องหมาย $\Rightarrow$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า

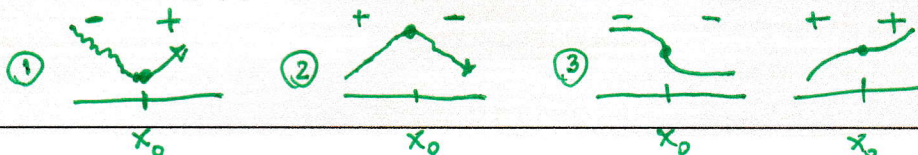
ที่ 1 f' เปลี่ยนเครื่องหมาย - เป็น + $\Rightarrow$ เกิดจุดต่ำสุดสัมพัทธ์



การทดสอบจุดวิกฤตว่าทำให้เกิดค่าต่ำสุด / สูงสุด. f'

THEOREM 4.3 Let x_0 be a critical point of the function f that is continuous on the open interval $[a, b]$ containing x_0 . If f is differentiable on the interval, except possibly at x_0 , then $f(x_0)$ can be classified as:

1. เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากเครื่องหมาย - เป็น + ที่ x_0 .
1. A relative minimum, if $f'(x)$ changes from negative to positive at x_0 .
2. เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากเครื่องหมาย + เป็น - ที่ x_0 .
2. A relative maximum, if $f'(x)$ changes from positive to negative at x_0 .
3. ไม่เป็นจุดต่ำสุด, สูงสุด ถ้า $f'(x)$ ไม่เปลี่ยนเครื่องหมายที่ x_0 .
3. Neither a max nor a min if $f'(x)$ is positive on both sides of x_0 or negative on both sides of x_0 .



การทดสอบโดยใช้ f''

THEOREM 4.4 Suppose that f is twice differentiable at the point x_0 and $f'(x_0) = 0$.

1. ถ้า $f''(x_0) > 0$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์
1. If $f''(x_0) > 0$, then f has a relative minimum at x_0 .
2. ถ้า $f''(x_0) < 0$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์
2. If $f''(x_0) < 0$, then f has a relative maximum at x_0 .
3. ถ้า $f''(x_0) = 0$ สรุปไม่ได้ (อาจสูงสุด, ต่ำสุด หรือไม่เป็นอะไรเลย)
3. If $f''(x_0) = 0$, then the test is inconclusive; that is f may have a relative maximum, a relative minimum or neither at x_0 .

จงหาค่าวิกฤตสัมพัทธ์ของ $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

Example 6 Find the relative extrema of $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

Solution.

① หาค่าวิกฤต

② ทดสอบว่าต่ำสุด/สูงสุด

$$\begin{aligned} \text{จาก } f(x) &= 3x^5 - 5x^3 \\ \text{จะได้ } f'(x) &= 15x^4 - 15x^2 \\ \text{และ } f''(x) &= 60x^3 - 30x \end{aligned}$$

① พิจารณา $f'(x) = 0$ เมื่อ

$$15x^4 - 15x^2 = 0$$

$$15x^2(x^2 - 1) = 0$$

$$15x^2(x-1)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = 0, 1, -1$$

และ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ -

ดังนั้นค่าวิกฤตคือ 0, 1, -1

② ทดสอบค่าวิกฤต

• จีออนเดอร์อันดับสอง

$$\text{พิจารณา } f''(0) = 60(0)^3 - 30(0) = 0 \rightarrow \text{สรุปไม่ได้}$$

$$f''(1) = 60(1)^3 - 30(1) = 30 > 0 \rightarrow \text{เกิดจุดต่ำสุด}$$

$$f''(-1) = 60(-1)^3 - 30(-1) = -30 < 0 \rightarrow \text{เกิดจุดสูงสุด}$$

ดังนั้นเกิดจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ณ. $x = 1$

เกิดจุดสูงสุดสัมพัทธ์ ณ. $x = -1$

4.5 Analysis of Functions

* มักอยู่ข้าง ทำในส่วนของ $f(x)$ เป็น 0หา a ที่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, -\infty$

ขั้นตอนในการร่างกราฟ

PROCEDURE GRAPHING STRATEGY

Step 1 : Find the domain, the x -intercepts, and the y -intercept.

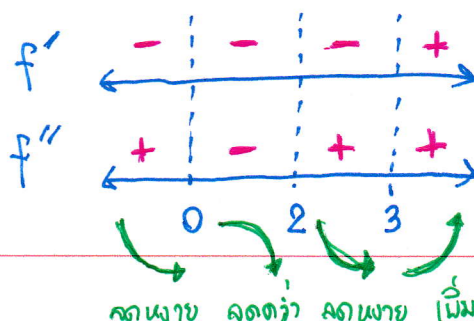
Step 2 : Find the vertical asymptotes.

Step 3 : Find the end behaviour. หา $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ Step 4 : Find $f'(x)$ and $f''(x)$. หา $f'(x), f''(x)$ แล้ววิเคราะห์กราฟStep 5 : Sketch the graph of f . ร่างกราฟ f หาโดเมน $\rightarrow x$ เป็นอะไรก็ได้บ้างจุดตัดแกน $x \rightarrow$ แทน $y=0$ ในสมการหา x จุดตัดแกน $y \rightarrow$ แทน $x=0$ ในสมการแทน y **Example 7** Sketch a graph of the equation $y = x^4 - 4x^3 + 10$.① โดเมน $\mathbb{R}$ * x เป็นได้ทุกค่าจุดตัดแกน x : $0 = x^4 - 4x^3 + 10 \Rightarrow x = \dots$ * ไม่ทำก็ได้จุดตัดแกน y : $y = 0^4 - 4(0)^3 + 10 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow$ จุดตัด $(0, 10)$

② เส้นกำกับแนวตั้ง : ไม่มี

③ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 - 4x^3 + 10 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 - 4x^3 + 10 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$ ④ $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$ $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$ } เป็น 0 เมื่อไหร่?
หาค่าไม่ได้ เมื่อไหร่?พิจารณา $f'(x) = 0$ เมื่อ $4x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0, 3$ $f'(x)$ หาไม่ได้ เมื่อ - $f''(x) = 0$ เมื่อ $12x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$ $f''(x)$ หาไม่ได้ เมื่อ -

* เติบโตเร็วขึ้นเรื่อยๆ

* พิจารณา $+$, $-$ ของ f', f'' ทุกช่วง

2.

$$x=0 \Rightarrow y=10 \Rightarrow \text{pt}(0,10)$$

$$x=2 \Rightarrow y=2^4-4(2)^3+10=-6 \Rightarrow \text{pt}(2,-6)$$

$$x=3 \Rightarrow y=3^4-4(3)^3+10=-17 \Rightarrow \text{pt}(3,-17)$$

