

แบบทดสอบย่อย เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่อง

ชื่อ-สกุล..... รหัสนักศึกษา..... ลำดับที่.....

1. ให้ f เป็นฟังก์ชัน กำหนดโดย

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & ; x < 0 \\ 5x + 1 & ; x \geq 0 \end{cases}$$

f cont at $x=a$

$\Leftrightarrow$ (1) $f(a)$ มี

(2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ มี

(3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

(a) จงหาค่าต่อไปนี้ กรณีที่หาไม่ได้ จงให้เหตุผลประกอบ

i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 5x + 1 = 1$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 3 = -3$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{ไม่มี เพราะ } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

iv. $f(0) = 5(0) + 1 = 1$

(b) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=0$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

CHECK

(1) $f(0)$ มีค่า

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ มีค่า

(3) $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(1) $f(0) = 1$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ไม่มี (จาก iii)

$\therefore f$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$

2. สมมติว่า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยที่ $g(2) = 6$ และ $\lim_{x \rightarrow 2} [3f(x) + f(x) \cdot g(x)] = 36$ แล้ว จงหา $f(2)$ (ทุกค่าใน Domain)

จาก $g(2) = 6$

$\therefore$ จาก g ต่อเนื่องที่ $x=2$ ได้ $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 6$

จาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

$$\begin{aligned} 36 &= \lim_{x \rightarrow 2} [3f(x) + f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow 2} [3f(x)] + \lim_{x \rightarrow 2} [f(x) \cdot g(x)] \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \end{aligned}$$

$$\therefore 36 = 3 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + 6 \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$36 = 9 \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

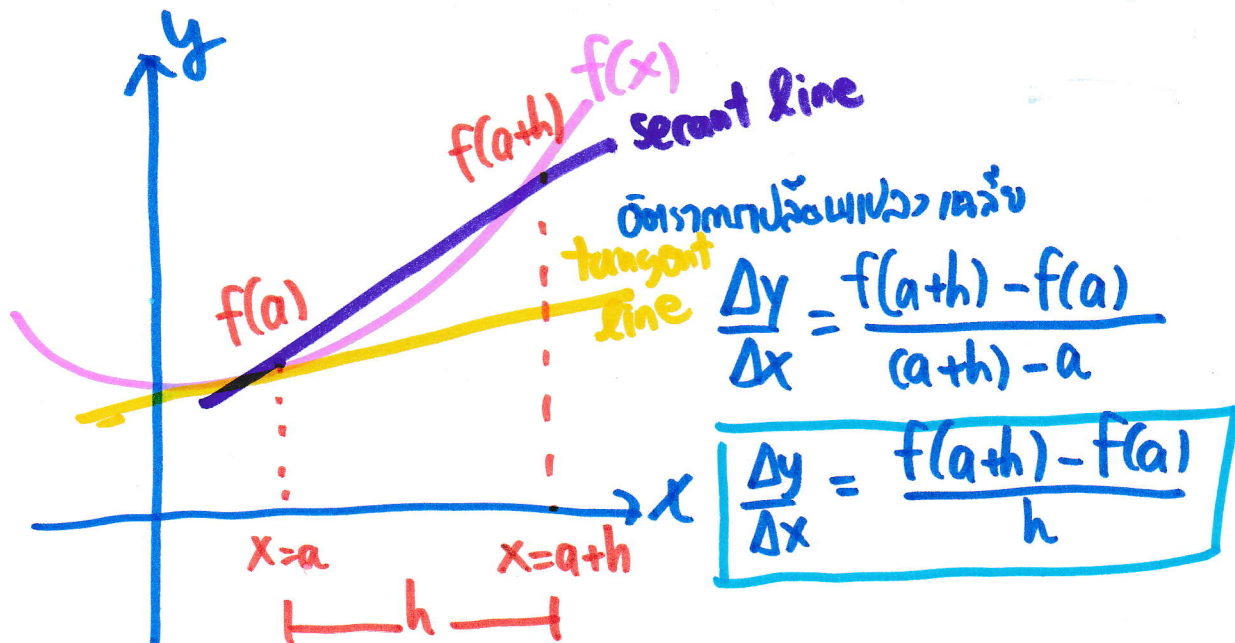
$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

จาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=2 \therefore f(2) = 4 \neq$

$f(x)$ លីនេអ៊ែរ $\rightarrow$ អ្នកប្រែប្រួល

$\Rightarrow$ ~~អ្នកប្រែប្រួល~~ អ្នកប្រែប្រួល រាង
average rate of change

$\Rightarrow$ ~~អ្នកប្រែប្រួល~~ អ្នកប្រែប្រួល ល្បឿន ឆាប់ ឬ យឺត
instantaneous rate of change



អ្នកប្រែប្រួល ល្បឿន ឆាប់ ឬ យឺត (ក្នុង $x=a$)

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

អ្នកប្រែប្រួល f ក្នុង x

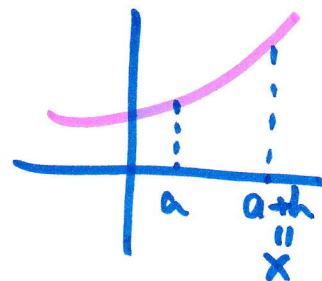
អ្នកប្រែប្រួល អ្នកប្រែប្រួល f ក្នុង $x=a$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

គេអាចស្វែងយល់ពីអ្នកប្រែប្រួល f ក្នុង $x=a \rightarrow$ ឬ $f(a)$

$\Rightarrow$ ទ្រឹស្តីស្តីពីអ្នកប្រែប្រួល f ក្នុង a : $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$



$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (*)$$

→ ความชันของเส้นสัมผัส/ตัว

↑
 (ถ้า) ลิมิตมีค่า แล้ว f มีอนุพันธ์ที่ $x=a$

Q ฟังก์ชันไหนที่มี ลิมิต (*) จะไม่มีค่า

↓
 อนุพันธ์ไม่ได้ (differentiable)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ Exist} \iff \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Q: ^{Thm} ถ้า f ^P diff ได้ที่ $x=a$ แล้ว f ^Q ต่อเนื่องที่ $x=a$ ✓
 $P \Rightarrow Q$

Answer

ถ้า f ต่อเนื่องที่ $x=a$ แล้ว f ^P diff ได้ที่ $x=a$

ใช่?
 $Q \Rightarrow P$ (ไม่จริง)

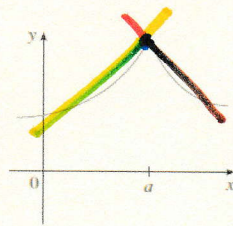
$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

Def ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ $x=a$ แล้ว f มีนิยามที่ $x=a$ และ f มีอนุพันธ์ที่ $x=a$ ก็

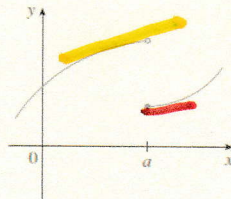
Nonexistence of the Derivative

$\equiv$ ถ้า f ไม่ต่อเนื่องที่ $x=a$ หรือ f มีอนุพันธ์ที่ $x=a$ แต่

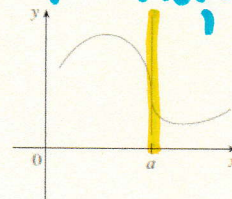
ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ $x=a$ แล้ว f มีนิยามที่ $x=a$ และ f มีอนุพันธ์ที่ $x=a$ ก็



(a) A corner



(b) A discontinuity

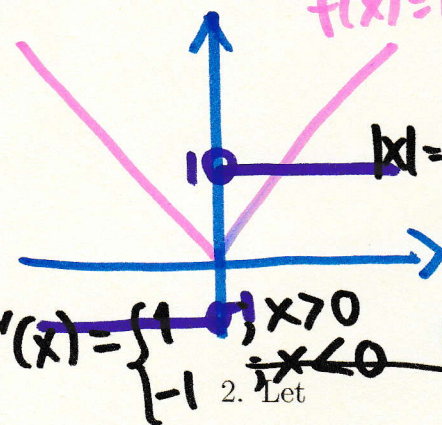


(c) A vertical tangent

$\therefore$ ถ้า $x=a$ ไม่ต่อเนื่อง

Example 5.3.2.

1. Let $f(x) = |x|$. Determine whether f is differentiable at $x = 0$.



$$f(x) = |x|$$

f diff ที่ $x=0$ หรือไม่? $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ มีค่า?

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$\text{เพราะ } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{if } x \leq 3 \\ x^2 - 4 & \text{if } x > 3 \end{cases}$$

$\therefore$ อนุพันธ์ที่ $x=3$ ไม่ต่อเนื่อง

Determine whether f is differentiable at $x = 3$.

$$\text{ถามว่า } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \text{ มีค่า? } (1)$$

$$\text{หรือ } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \text{ มีค่า? } (2) \leftarrow$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x^2 - 4) - 5}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 6$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(2x - 1) - 5}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2(x-3)}{x-3} = 2$$

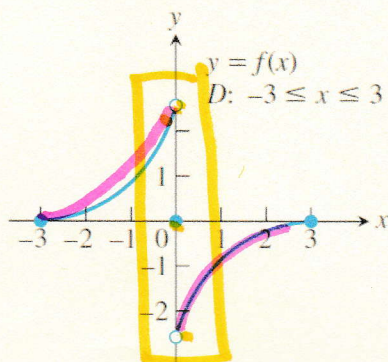
$$\text{เพราะ } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$\therefore \text{ อนุพันธ์ที่ } x=3 \text{ ไม่ต่อเนื่อง } f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } 0 < x < 3 \\ 2x & \text{if } x > 3 \end{cases}$$

Example 5.3.3. From the following graphs of f defined on D , locate the points x at which each f is

1. differentiable
2. continuous and nondifferentiable
3. discontinuous and nondifferentiable

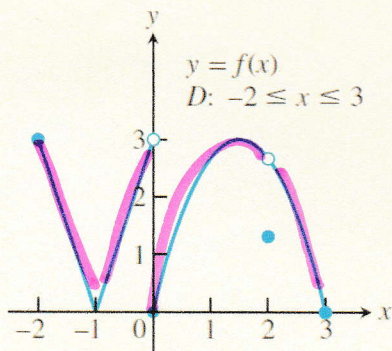
(We do not consider the endpoints of the domain.)



(1) Diff ၇၀၀၀ $(-3, 0) \cup (0, 3)$

(2) ၇၀၀၀ အကဲခတ်သော diff ၇၀၀၀

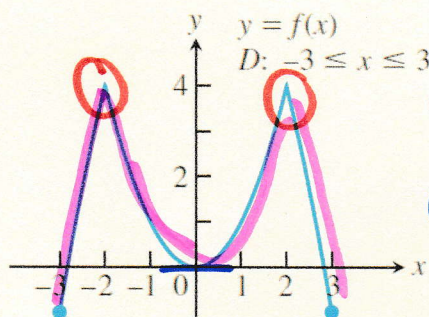
(3) ၀၀၀၀၀၀၀၀၀၀
 $x = 0$



(1) Diff ၇၀၀၀ $(-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 3)$

(2) ၇၀၀၀ အကဲခတ်သော diff ၇၀၀၀
၇၀ $x = -1$

(3) ၇၀၀၀၀၀၀၀၀၀ $\Rightarrow$ Diff ၇၀၀၀
 $x = 0, 2$



(1) Diff ၇၀၀၀ $(-3, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 3)$

(2) ၇၀၀၀ အကဲခတ်သော diff ၇၀၀၀
 $x = -2, 2$

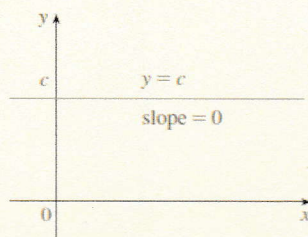
(3) ၇၀၀၀၀၀၀၀၀၀ $\Rightarrow$ Diff ၇၀၀၀

၇၀ $x = 0$
 $f'(x) = 0$

5.4 Basic Differentiation Properties

Constant Function Rule : If $y = f(x) = c$, where c is a real number, then

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[c] = 0.$$



Example 5.4.1. Find

$$\frac{d}{dx}[5] = \dots 0 \dots$$

$$\frac{d}{dx}[-7] = \dots 0 \dots$$

$$\frac{d}{dx}[5^2] = \dots 0 \dots$$

$$\frac{d}{dx}[\pi] = \dots 0 \dots$$

$$\frac{d}{dx}[\sqrt{2}] = \dots 0 \dots$$

$$\frac{d}{dx}[\pi^2] = \dots 0 \dots$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = 0$$

Power Rule : If $y = f(x) = x^n$, where n is a real number, then

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}.$$

Example 5.4.2. Find

$$1. \frac{d}{dx}[x^5] = 5x^{5-1} = 5x^4$$

$$2. \frac{d}{dx}[x] = 1$$

$$3. \frac{d}{dx}[x^{\sqrt{2}}] = \sqrt{2}x^{(\sqrt{2}-1)}$$

$$4. \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$



$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$5. \frac{d}{dx}(x^x) \text{ logaritma}$$

$$\frac{d}{dx}(x^x) = x \cdot x^{x-1}$$

Constant Multiple Property

If $y = f(x) = ku(x)$ is a function, where k is a real number, then

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[ku(x)] = k \frac{d}{dx}[u(x)].$$

Example 5.4.3. Find

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{d}{dx}[4x^8] &= 4 \frac{d}{dx}(x^8) \\ &= 4 \cdot 8x^7 \\ &= 32x^7 \end{aligned} \quad \begin{aligned} 2. \quad \frac{d}{dx}[-x^{12}] &= -12x^{11} \end{aligned} \quad \begin{aligned} 3. \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{\pi}\right] &= \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

Sum and Difference Properties

If $y = f(x) = u(x) \pm v(x)$, then

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[u(x) \pm v(x)] = \frac{d}{dx}[u(x)] \pm \frac{d}{dx}[v(x)].$$

Example 5.4.4. Find

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{d}{dx}[3x^8 - 2x^5 + 6x + 1] &= 24x^7 - 10x^4 + 6 \\ 2. \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x} - x^{-9}\right] &= -x^{-2} - (-9)x^{-10} \\ &= -x^{-2} + 9x^{-10} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{9}{x^{10}} \quad \# \end{aligned}$$