แบบทดสอบย่อย เรื่องอนุพันธ์โดยใช้สูตร 2 (กฎลูกโซ่)

ชื่อ-สกุล... รหัสนักศึกษา........................... ลำดับที่...........

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(a) $f(x) = \dfrac{3}{(x^3 - 3^x)^3}$

$\Rightarrow f(x) = 3\left(\dfrac{1}{(x^3-3^x)^3}\right)$

$= 3(x^3-3^x)^{-3}$

$f'(x) = (-3)(3)(x^3-3^x)^{-4}\dfrac{d}{dx}(x^3-3^x)$

$= (-9)(x^3-3^x)^{-4}[3x^2-3^x\ln 3]$ #

(b) $g(x) = (x^5 - 5)e^{5x}$

$g'(x) = (x^5-5)\dfrac{d}{dx}(e^{5x}) + e^{5x}\dfrac{d}{dx}(x^5-5)$

$= (x^5-5)e^{5x}\dfrac{d}{dx}(5x) + e^{5x}(5x^4)$

$= 5(x^5-5)e^{5x} + e^{5x}(5x^4)$ #

(c) $h(x) = \dfrac{\sin(7x-7)}{x^7+7}$

$h'(x) = \dfrac{(x^7+7)\frac{d}{dx}(\sin(7x-7)) - \sin(7x-7)\frac{d}{dx}(x^7+7)}{(x^7+7)^2}$

$= \dfrac{(x^7+7)\cos(7x+7)\frac{d}{dx}(7x+7) - \sin(7x-7)(7x^6)}{(x^7+7)^2}$

$= \dfrac{(x^7+7)\cos(7x+7)(7) - \sin(7x-7)(7x^6)}{(x^7+7)^2}$ #

2. จงใช้กฎลูกโซ่หาค่า $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อกำหนด $\boxed{y = \sqrt{u+1}}, u = x^{171} - 171x$ โดยตอบในเทอมของ x

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

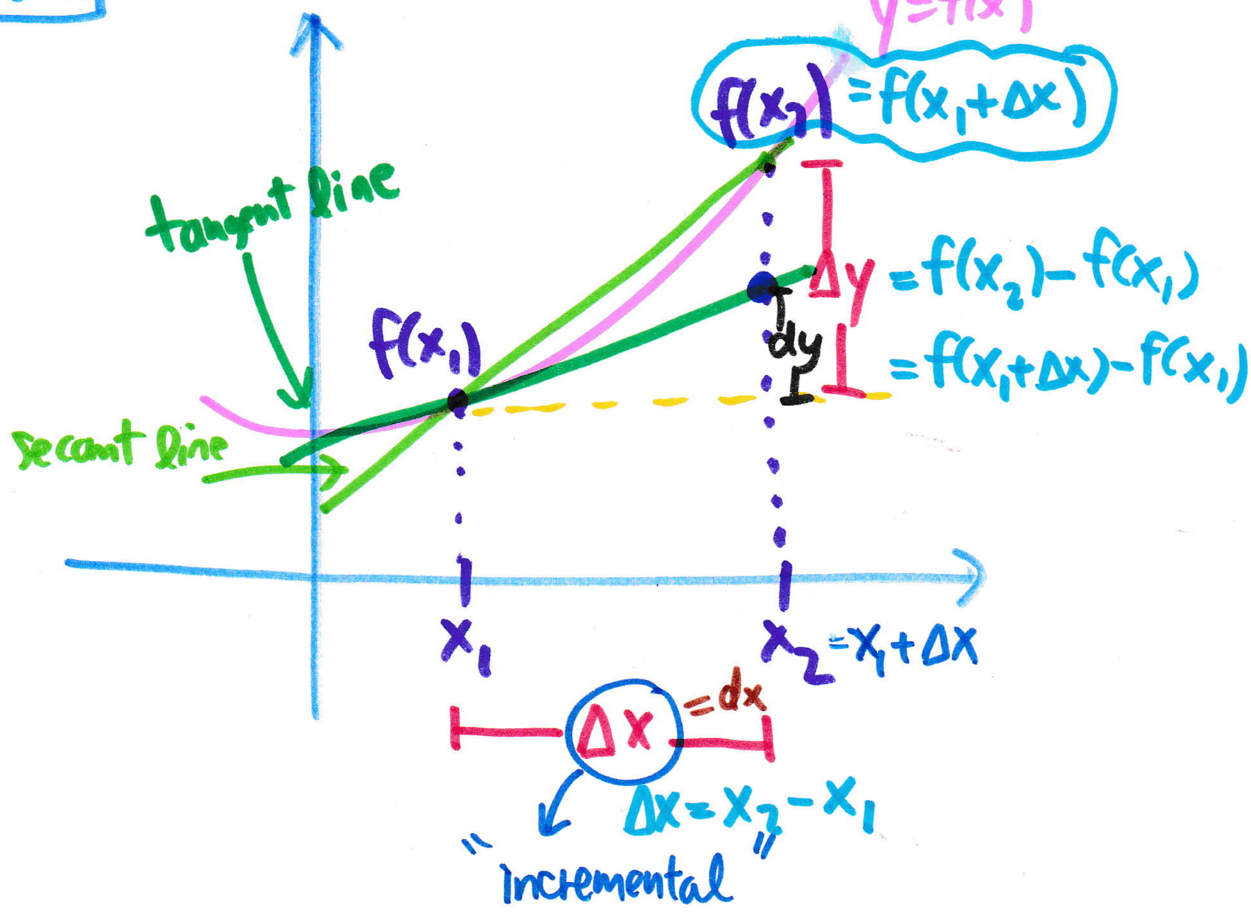
$y = (u+1)^{\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{1}{2}(u+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{u+1}}$

$= \left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{u+1}}\right)\cdot(171x^{170}-171)$

$= \left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^{171}-171x+1}}\right)(171x^{170}-171)$ #

Differential



ถ้าดูที่ x_0 ได้ ความชันของเส้นสัมผัสโค้ง $f(x)$ ที่ x_0
คือ $f'(x_0)$

dy หรือ df

$$dy = df = f'(x)dx \Rightarrow \boxed{dx = \Delta x}$$

$\frac{dy}{dx} \xrightarrow{\text{differential}} dy = \_\_\_ dx$

$$dy = f'(x)dx$$

Ex $y = x^2$

$\boxed{\frac{dy}{dx} = 2x} \rightarrow dy = (2x)dx$

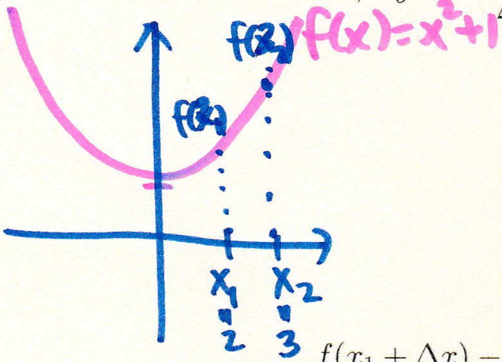
differential

5.8 Differentials

Definition: Increments For $y = f(x)$, $\Delta x = x_2 - x_1$, we have $x_2 = x_1 + \Delta x$, and $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$. Δy represents the change in y corresponding to a change from Δx in x.

Example 5.8.1. Given the function $y = f(x) = x^2 + 1$.

1. Find $\Delta x, \Delta y$ and $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ for $x_1 = 2$ and $x_2 = 3$.



$\Delta x = x_2 - x_1 = 3 - 2 = 1$

$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(3) - f(2) = 10 - 5 = 5$

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{5}{1} = 5$

2. Find $\dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ for $x_1 = 1$ and $\Delta x = 2$. $x_2 = 3$

$\dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \dfrac{f(1+2) - f(1)}{2}$

$= \dfrac{f(3) - f(1)}{2} = \dfrac{10-2}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ #

> **Definition: Differentials**
>
> If $y = f(x)$ defines a differentiable function, then the differential dy, or df, is defined by
>
> $$dy = df = f'(x)dx,$$
>
> where $dx = \Delta x$.

Example 5.8.2. Let $y = x^5 + 3x$. Find dy and evaluate dy for $x = 1$ and $dx = 0.3$.

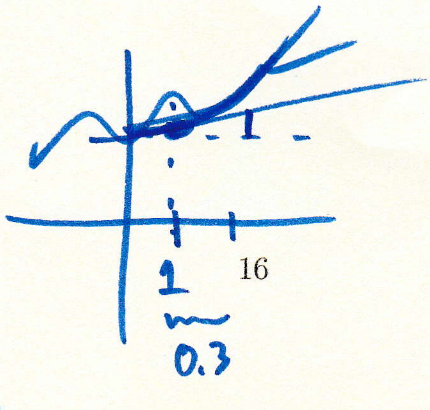
$dy = f'(x)dx$

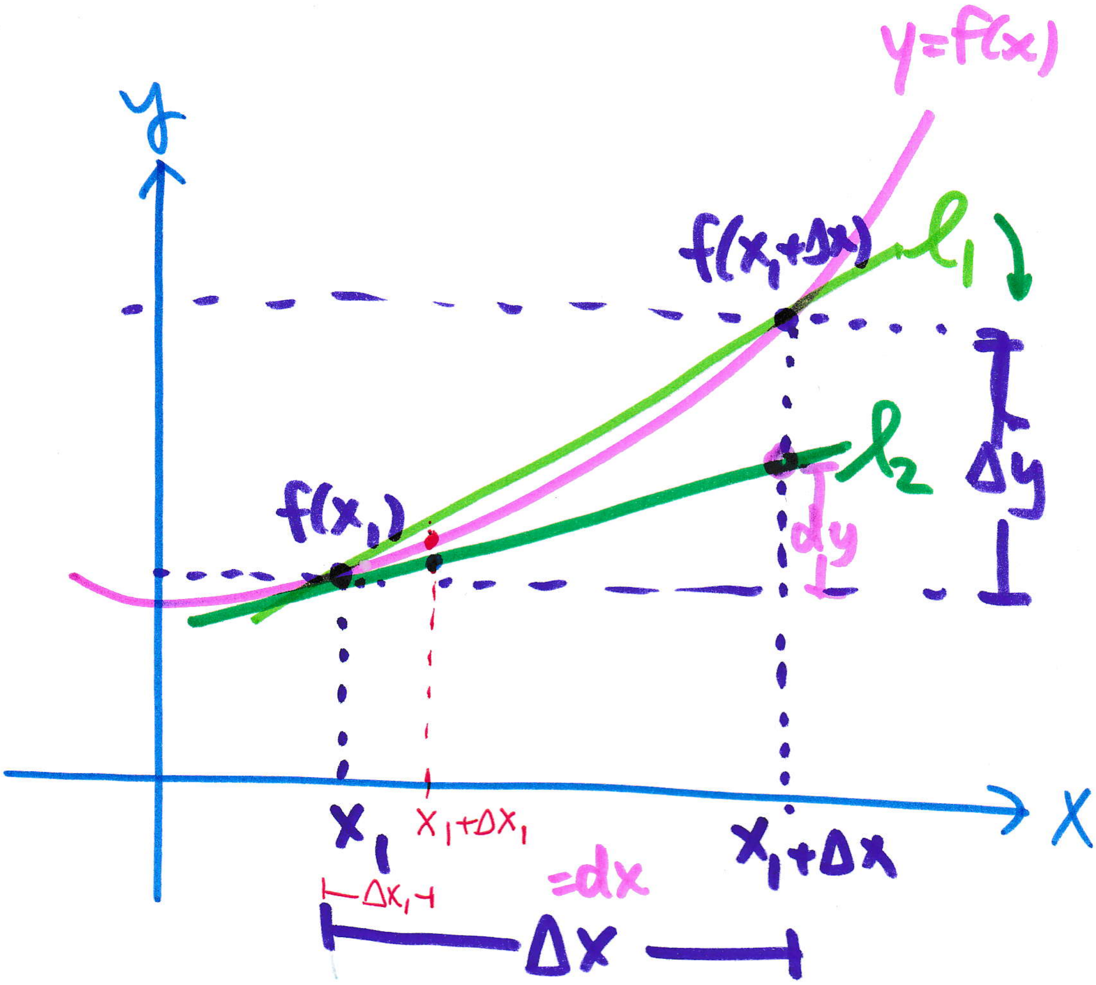
$\boxed{dy = (5x^4 + 3)dx}$

เมื่อ $x = 1$, $dx = 0.3$

$dy = ((5)(1)+3)(0.3)$

$= (8)(0.3) = 2.4$





ความชันของ $l_1 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$

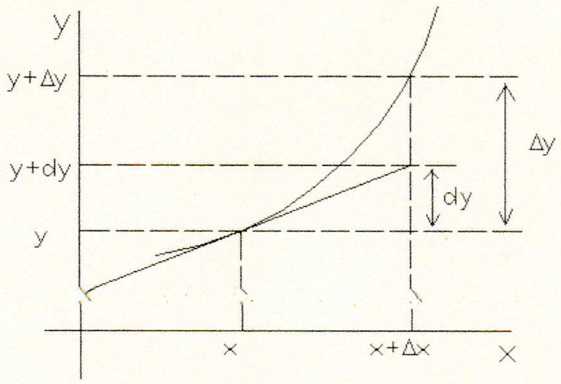
ความชันของ $l_2 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$

ถ้า Δx น้อยมากๆ
ใช้การประมาณ $f'(x_1) \approx \dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ Δy

$$\Rightarrow f'(x_1) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\therefore \Delta y \approx f'(x)\underbrace{\Delta x}^{=dx}$$

จาก $dy = f'(x)dx \Rightarrow \boxed{\Delta y \approx dy}$



For small Δx, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$. Thus, $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$.

Also, since $dy = f'(x)dx$, it follows that

$$\Delta y \approx dy,$$

and dy can be used to approximate Δy.

Example 5.8.3. Let $y = f(x) = \sqrt{x}$.

1. Find Δy and dy when x changes from $x = 4$ to $x = 4.1$.

2. Approximate Δy using dy when x changes from $x = 4$ to $x = 5$

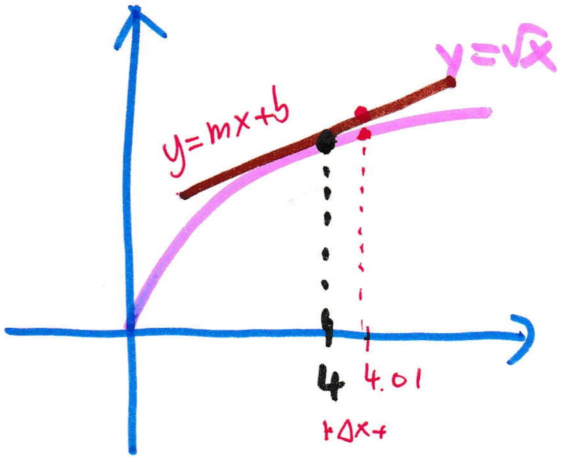
3. Approximate $\sqrt{101}$

Ex 5.8.3 $f(x) = \sqrt{x}$

$f(4) = 2$

$f(4.1) =$

(1) $\Delta y, dy$ $x = 4$ ไปยัง $x = 4.1$ $\Delta x = 0.1$



$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y = f(4+\Delta x) - f(4)$$

$$\boxed{\Delta y = \sqrt{4+\Delta x} - 2} \quad -(1)$$

$$\Delta y = \sqrt{4.1} - 2$$

$$dy = f'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$\boxed{dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x} \quad -(2)$$

ปัญหา ต้องการประมาณ 4.1 เห็นว่า แทน ใน f(x) ยาก
เราจึงจะแทน x = 4.1 ในฟังก์ชันที่ง่ายกว่า
คือฟังก์ชันเส้นตรง ที่เป็นเส้นสัมผัสกราฟ
ที่จุดใกล้ๆ x=4 (คำนวณได้ง่ายกว่า)

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}(0.1)$$

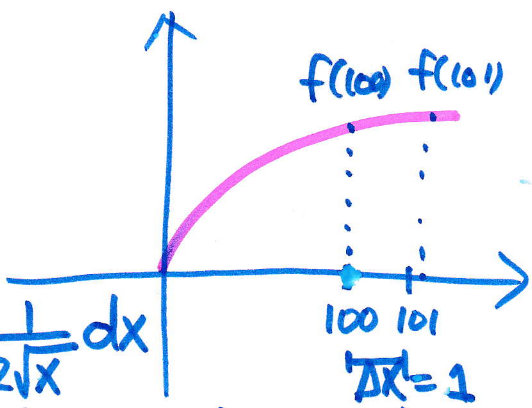
$$= \frac{1}{4}(0.1) = 0.025$$

(2) $\Delta y, dy$ เมื่อ x เปลี่ยนมาก $x = 4$ ไปยัง $x = 5$ $\Delta x = 1$

$$\Delta y = \sqrt{4+1} - 2 = \sqrt{5} - 2$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}(1) = 0.25$$

$\Delta y \approx dy$ เมื่อ Δx เล็กๆ



(3) ประมาณ $\sqrt{101}$ ดูการเปลี่ยนแปลง $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$$= \frac{1}{2\sqrt{100}}(1) = \frac{1}{20}$$

$$\therefore f(101) \approx f(100) + dy = 10 + \frac{1}{20} = 10.05 \quad \#$$

5.9 Break–Even and Profit–Loss Analysis

Let x be the number of units manufactured and sold.

ฟังก์ชันราคาต่อหน่วย

The price–demand function ($p = p(x)$) gives the price per item when x items are manufactured and sold.

ฟังก์ชันรายรับ

The revenue function ($R = R(x)$) is (the number of items sold) $\cdot$ (price per item), which is $R = x \cdot p(x)$.

ฟังก์ชันต้นทุน

The cost function ($C = C(x)$) is (fixed costs) + (variable costs), which is $C = a + bx$.

กำไร

The profit function ($P = P(x)$) is $\boxed{P = R - C.}$

The company will

รายรับ รายจ่าย (ต้นทุน)

$$\boxed{P = R - C}$$

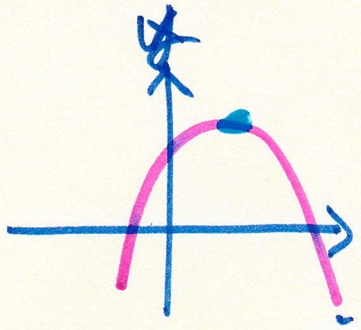
- ขาดทุน have a **loss** if $R < C$ or $P < 0$,
- เท่าทุน **break–even** if $R = C$ or $P = 0$,
- กำไร have a **profit** if $R > C$ of $P > 0$.

Note: In this course, functions p, R and C will be given. We do not concentrate on finding these functions from a given real world problem.

Example 5.9.1. The price – demand equation and the cost function for the production of television sets are given by

$$p(x) = 300 - \frac{x}{30} \qquad \text{and} \qquad C(x) = 150,000 + 30x,$$

where x is the number of sets that can be sold at a price of p per set, and $C(x)$ is the total cost of producing x sets.



1. Find the revenue function in terms of x.

$R(x) = x \cdot p(x) = x\left(300 - \frac{x}{30}\right)$

$R(x) = 300x - \frac{x^2}{30}$

2. Find the break–even point.

หา x ที่ $R(x) = C(x)$ $(P(x) = 0)$

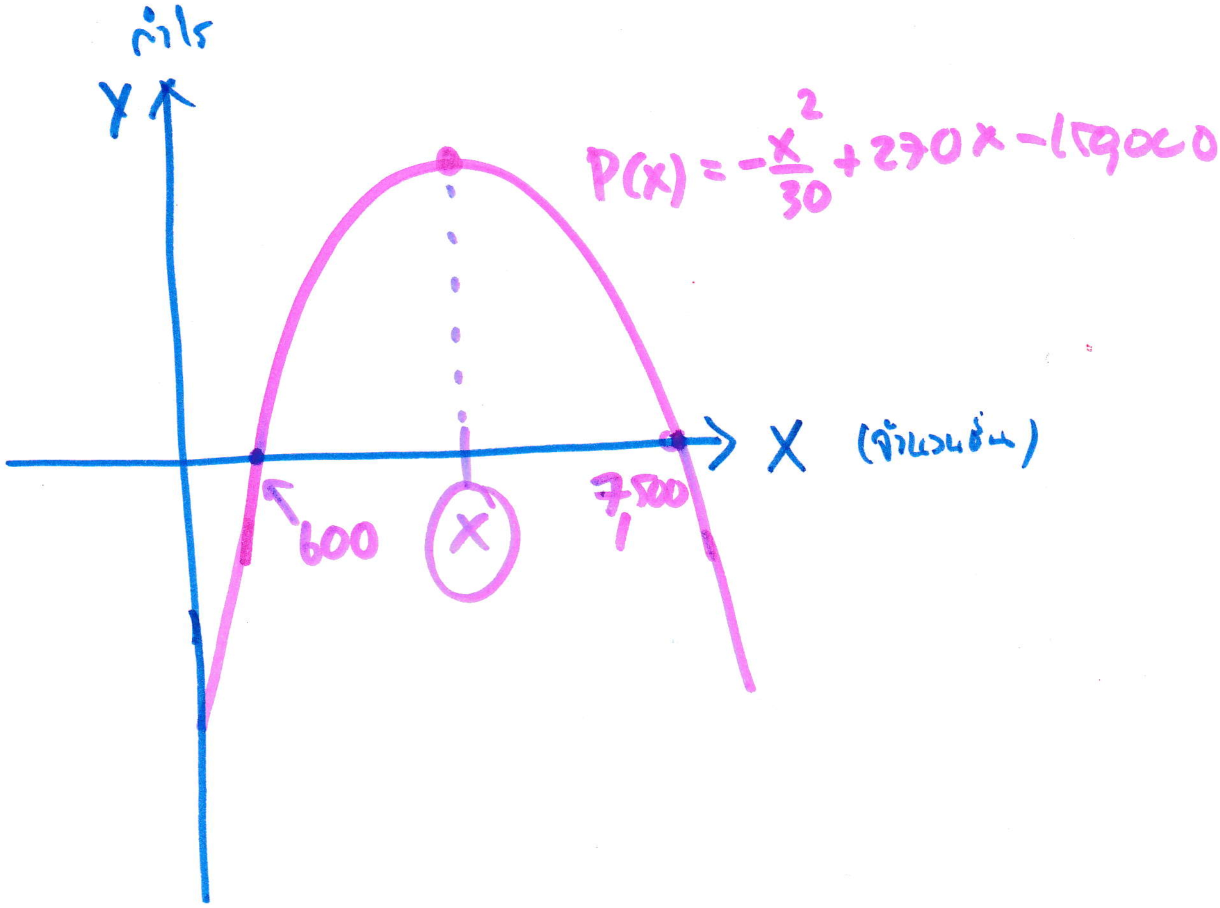
$P(x) = \left(300x - \frac{x^2}{30}\right) - (150,000 + 30x)$

$\boxed{P(x) = -\frac{x^2}{30} + 270x - 150,000}$

$x = 600$ หรือ $x = 7,500$

Set $P(x) = 0 \Rightarrow$ แก้สมการ $-\frac{x^2}{30} + 270x - 150,000 = 0$

$x^2 - 8,100x + 4,500,000 = 0$


กำไร
Y
$P(x) = -\frac{x^2}{30} + 270x - 159000$
X
(จำนวนชิ้น)
600
x
7,500

Example 5.9.2. A company manufactures and sells x transistor radios per week. If the weekly cost and revenue equations are

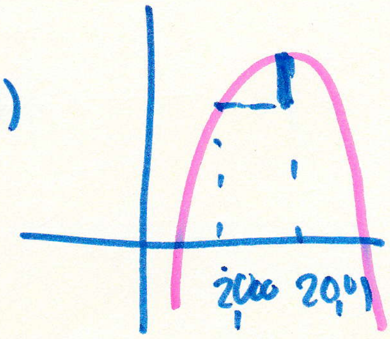
$$C(x) = 5,000 + 2x \qquad R(x) = 10x - \frac{x^2}{1,000} \qquad 0 \le x \le 8,000,$$

find the approximate changes in profit if production is increased from 2,000 to 2,010 units per week.

$$\boxed{R(x) \quad - \quad C(x)}$$

$$P(x) = \left(10x - \frac{x^2}{1000}\right) - (5000 + 2x)$$

$$\boxed{P(x) = -\frac{x^2}{1000} + 8x - 5000}$$



สรุปแล้ว โจทย์อยากทราบว่า $P(2010) - P(2000) = ?$

คือ อยากรู้ ΔP เมื่อ $\Delta x = 10$

เนื่องจาก เรายอมรับว่าเรา $\Delta p \approx dp$

$$\Delta P \approx dp = P'(x)\,\Delta x$$

$$\boxed{\Delta p \approx \left(-\frac{x}{500} + 8\right)\Delta x}$$

เมื่อ $x = 2000$, $\Delta x = 10$

$$\Delta p \approx \left(-\frac{\cancel{2000}^{\,4}}{\cancel{500}_{\,1}} + 8\right)(10)$$

$$= (+4)(10) = 40$$

ความหมาย เมื่อสินค้าเปลี่ยนจาก 2000 ชิ้นไปเป็น 2010 ชิ้น แล้ว กำไรจะเปลี่ยนแปลงไป 40 บาทโดยประมาณ