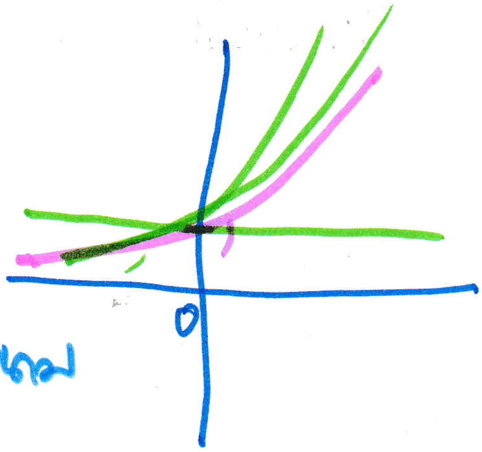
ทบทวน

$\boxed{f(x)=e^x}$ คำนวณ $e^{0.1}$



ประมาณค่าของฟังก์ชันให้อยู่ในรูปของพหุนาม

พหุนามเทเลอร์ $\Longrightarrow$ กระจายรอบจุดใดๆ $\boxed{x=a}$

$$f(x) \approx \underbrace{f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\dots+\frac{f^{(n)}(x-a)^n}{n!}}_{=P_n(x)}$$

ถ้ากระจายรอบ $x=0$ มีชื่อเรียกเฉพาะว่าเป็นพหุนามแมคลอริน

$$f(x) \approx \underbrace{f(0)+f'(0)(x)+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\dots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}}_{=P_n(x)}$$

Ex 5.15.3 $\boxed{P_3(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f'''(0)x^3}{3!}}$

$f(x)=\sqrt{x+1}$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)^{-\frac{3}{2}}$

$f'''(x)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(x+1)^{-\frac{5}{2}}$

$=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x+1)^5}}$

$f(0)=1$

$f'(0)=\frac{1}{2}$

$f''(0)=-\frac{1}{4}$

$f'''(0)=\frac{3}{8}$

$$P_3(x)=1+\frac{1}{2}x+\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{x^2}{2!}+\frac{3}{8}\cdot\frac{x^3}{3!}$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{8}+\frac{3}{48}\cdot x^3 \quad \text{——} (*)$$

5.15.5 เนื่องจาก $f(x) \approx P_3(x)$

อยากได้ ~~f(0.1)~~

$f(x) = \sqrt{x+1}$

หา $\sqrt{1.1}$

หาค่าความจริง

คำนวณ $f(0.1) = \sqrt{0.1+1} = \sqrt{1.1}$

$$f(0.1) \approx P_3(0.1)$$

$$(*) = 1 + \frac{1}{2}(0.1) - \frac{(0.1)^2}{8} + \frac{3}{48}(0.1)^3$$

$$= 1 + 0.05 - 0.00125 + 0.0000625$$

$$= 1.0488125$$

Ex 5.15.4 Taylor รอบจุด $x = 1$

$$\boxed{P_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2!} + \frac{f'''(1)(x-1)^3}{3!}}$$

$f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$

$f'''(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}}$

$f(1) = 1$

$f'(1) = \frac{1}{2}$

$f''(1) = -\frac{1}{4}$

$f'''(1) = \frac{3}{8}$

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \left(-\frac{1}{4}\right)\frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{3}{8}\cdot\frac{(x-1)^3}{3!} \quad (*)$$

จงประมาณค่า $\sqrt{1.1}$

เลือก $f(x) = \sqrt{x}$ หา $\sqrt{1.1}$ เลือก $x = 1.1$

$f(1.1) = \sqrt{1.1}$

$$\sqrt{1.1} = f(1.1) \approx P_3(1.1)$$

$$(*) = 1 + \frac{1}{2}(0.1) - \frac{1}{4}\frac{(0.1)^2}{2!} + \frac{3}{8}\frac{(0.1)^3}{3!}$$

Ex ประมาณ $\sin(0.1)$

เลือก $f(x) = \sin x$

$\therefore f(0.1) = \sin(0.1)$

ประมาณ $f(x)$ ด้วย $P_3(x)$

Taylor

เลือกการกระจายรอบ $x=0$

ประมาณ $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{100}\right)$

เลือก $f(x) = \cos x$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{100}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{100}\right)$

Taylor

ประมาณ $f(x)$ ด้วย $P_3(x)$

*เลือกการกระจายรอบ $x=\frac{\pi}{4}$

$g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

$g\left(\frac{\pi}{100}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{100}\right)$

Taylor

ประมาณ $g(x)$ ด้วย $P_3(x)$

*เลือกกระจายรอบ $x=0$

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$f(x) = e^{2x}$

$f'(x) = 2e^{2x}$

$f(x) = x^x$, $\cancel{f'(x) = x \cdot x^{x-1}}$

$f(x) = x^x$, $\cancel{f'(x) = x^x \ln x}$

$y = x^x$

Take ln ;

$\ln y = \ln x^x$

$\ln y = x \ln x$

$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x \ln x)$

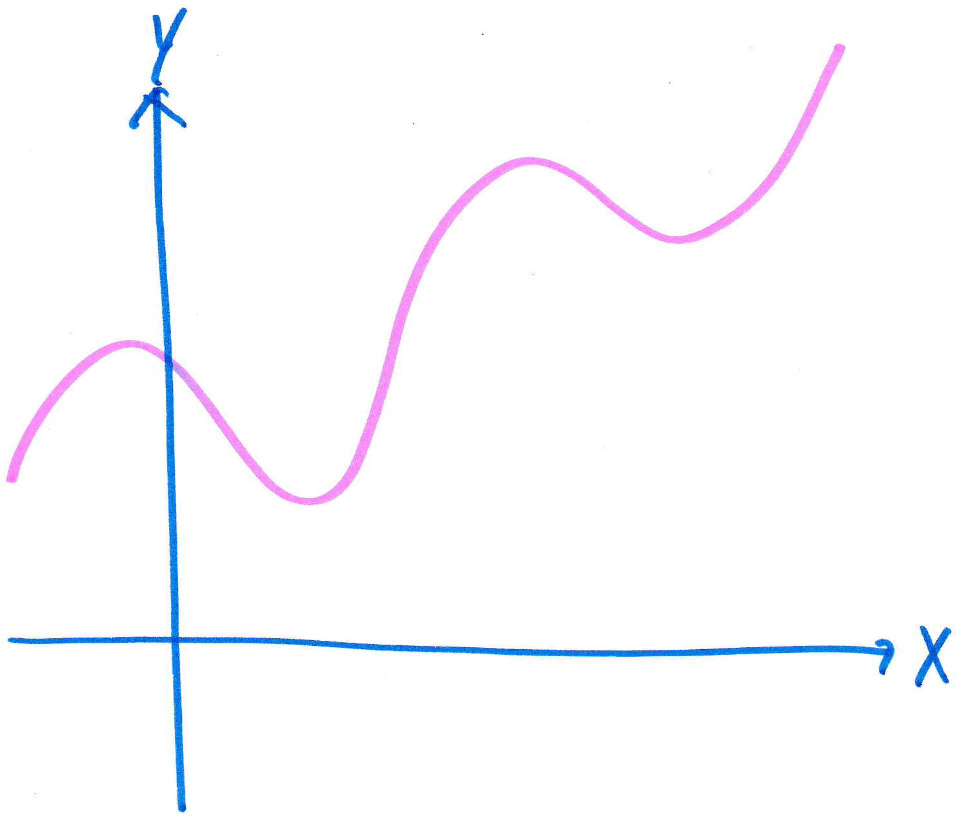
$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{dx}{dx}$

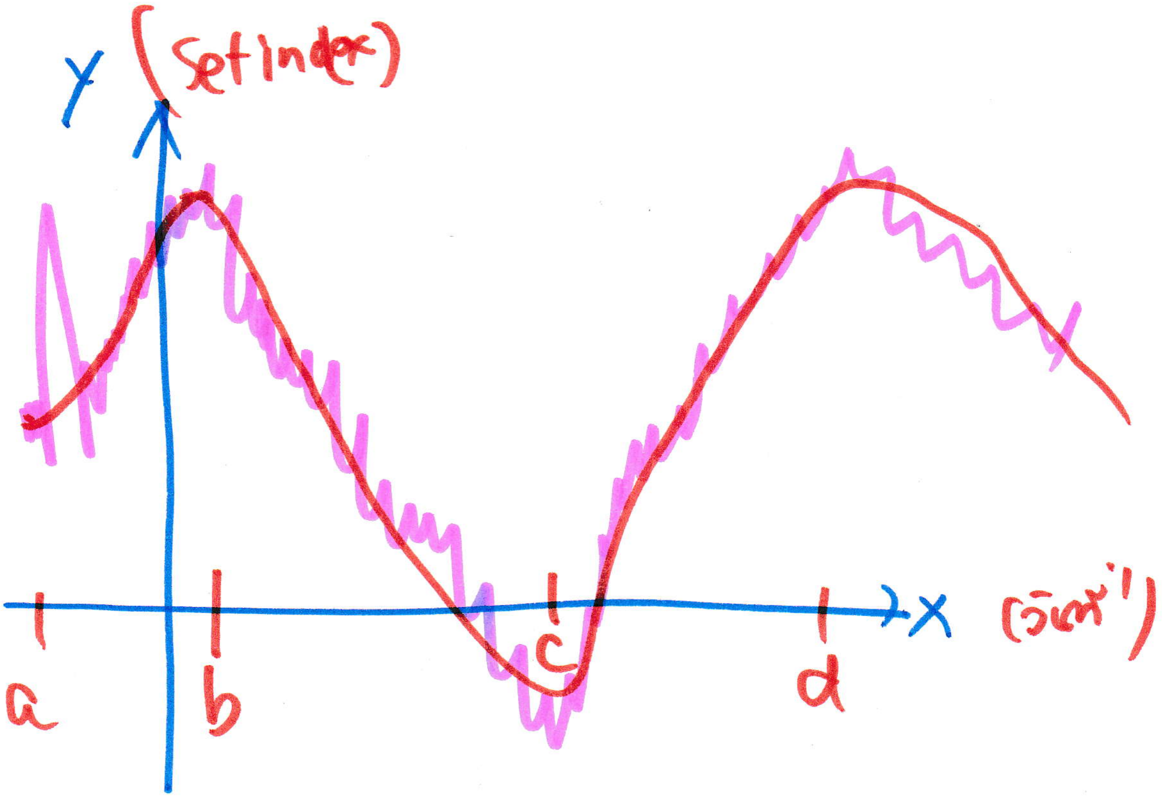
$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} + \ln x$

$\frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x)$

$\frac{dy}{dx} = x^x(1 + \ln x)$

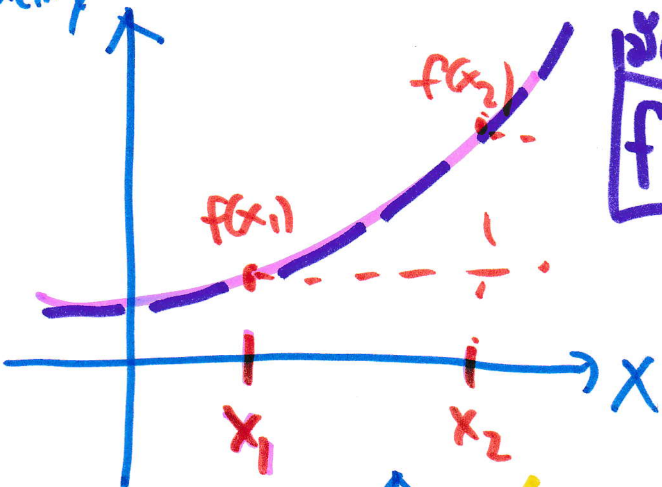
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = x^x + x^x \ln x}$$


Y
X


Y (Set Index)
X (วันที่)
a
b
c
d

① **ฟังก์ชันเพิ่ม** ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$

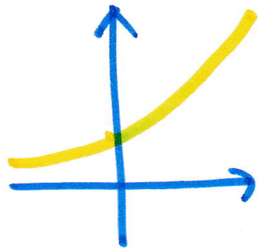
increasing function



เมื่อ x เป็น ฟ.ก. เพิ่ม

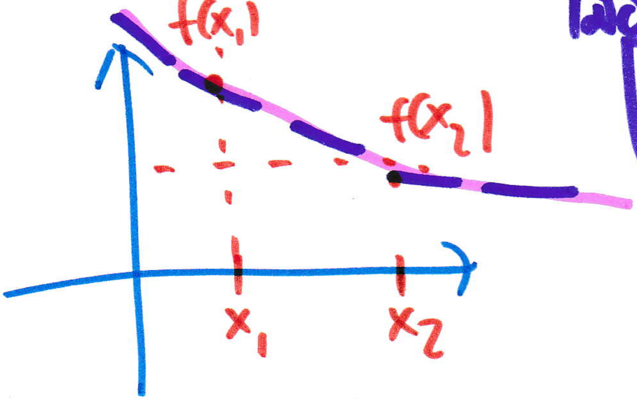
$$\boxed{f'(x) > 0}$$

Ex $f(x) = e^x$



② **ฟังก์ชันลด** ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$

decreasing function



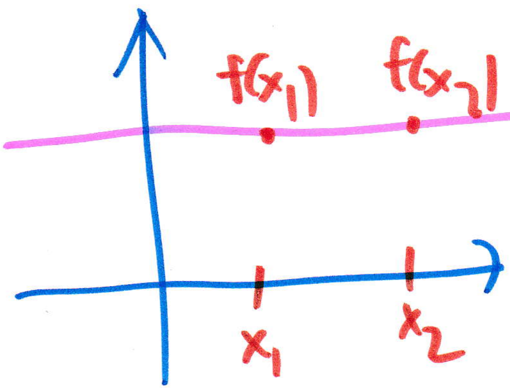
เมื่อ x เป็นฟังก์ชันลด.

$$\boxed{f'(x) < 0}$$

③ **ฟังก์ชันคงที่** ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) = f(x_2)$

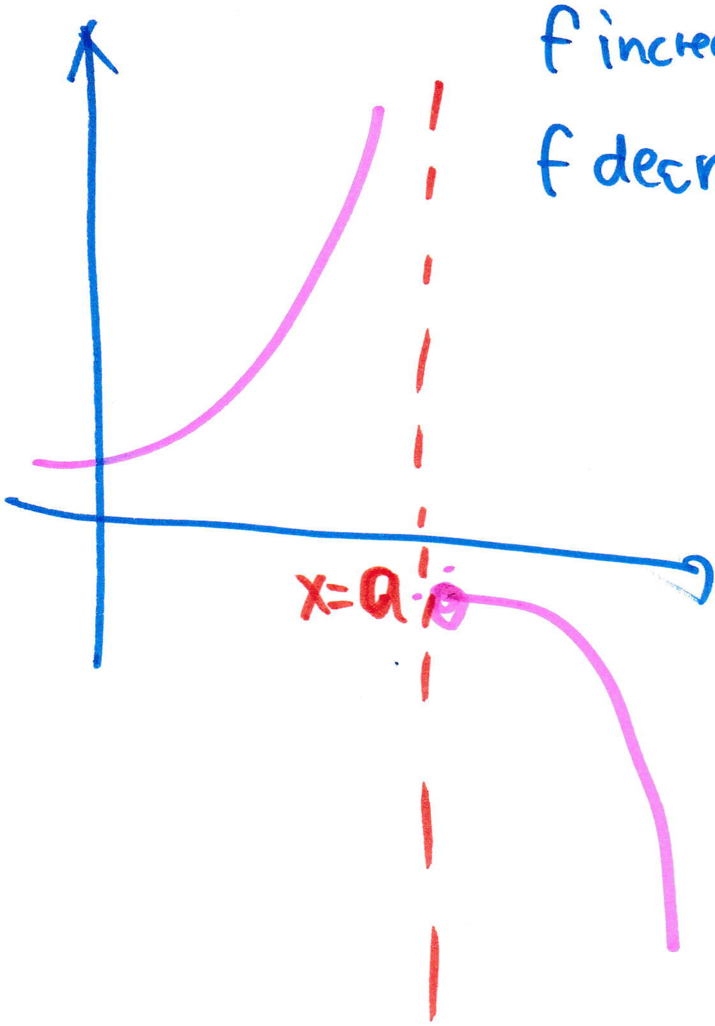
constant function

ทุก x_1, x_2



เมื่อ f เป็นฟังก์ชันคงที่

$$\boxed{f'(x) = 0}$$



f increasing บน $(-\infty, a)$

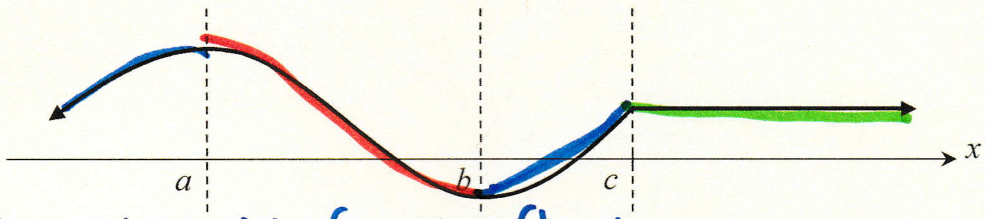
f decreasing บน (a, ∞)

Chapter 6: Applications of the derivatives

6.1 First Derivative and Graphs

Increasing and Decreasing Functions

Example From the graph below, find Intervals where the given function is increasing, decreasing or constant.



Increasing ช่วง $(-\infty,a) \cup (b,c)$
Decreasing ช่วง (a,b)
Constant ช่วง (c,∞)

> **Theorem 1** Let f be a function that is continuous on (a,b), and differentiable on (a,b).
> 1. If $f'(x) > 0$ for all x on (a,b), then f is increasing on (a,b).
> 2. If $f'(x) < 0$ for all x on (a,b), then f is decreasing on (a,b).
> 3. If $f'(x) = 0$ for all x on (a,b), then f is constant on (a,b).

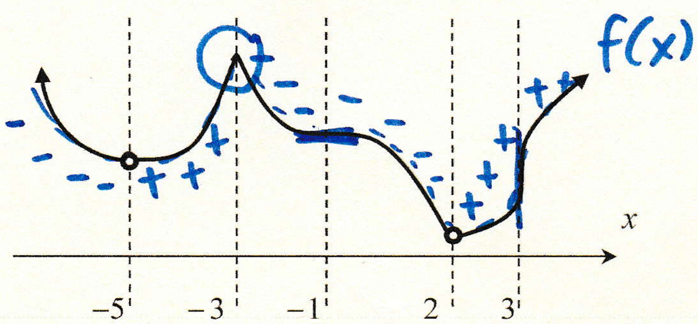
Increasing and Decreasing function summary: For the interval (a,b),

$f'(x)$	$f(x)$	Graph of f	Examples
+ $f'(x) > 0$	Increasing ↗ เพิ่ม	Rising ↗	, ,
− $f'(x) < 0$	Decreasing ↘ ลด	Falling ↘	, ,

> **Definition 1** The values of x in the domain of f where $f'(x) = 0$ or where $f'(x)$ does not exist are called the **critical numbers** of $f'(x)$.

Remark: The values of x where $f'(x) = 0$ or where $f'(x)$ does not exist are called the **partition numbers** of $f'(x)$. (It does not matter whether x is in the domain of f or not.)

Example From the graph below, find



(a) the values of x where $f'(x)=0$

$X = -1$

หาอนุพันธ์ได้

(b) the values of x where $f'(x)$ does not exist

$X = -3, 3$

(c) the partition numbers of $f'(x)$

$X = -1, -5, -3, 2, 3$

(d) the domain of f $D_f = \mathbb{R} - \{-5, 2\}$

(e) the values of x in the domain of f where $f'(x)=0$

$X = -1$

(f) the values of x in the domain of f where $f'(x)$ does not exist

$X = -3, 3$

(g) the critical numbers of $f'(x)$

$X = -1, -3, 3$

$f'(x)=0$ $f'(x)$ does not exist.

Example Find the critical numbers of $f'(x)$, the intervals on which f is increasing and those on which f is decreasing, for

(a) $f(x)=x^2-4x+5$

$D_f = \mathbb{R}$

หา $\boxed{f'(x)=2x-4}$

① เนื่องจาก $f'(x)=2x-4$ เป็นฟังก์ชันพหุนามซึ่งหาค่าได้บน $\mathbb{R}$

② หา x ที่ทำให้ $f'(x)=0 \Rightarrow 2x-4=0$

$x=2$

$\therefore$ ค่าวิกฤตคือ $x=2$

$- - - - - \quad + + + + +$

$(-\infty,2) \quad x=2 \quad (2,\infty)$

พิจารณาเครื่องหมายของ $f'(x)$

$f'(x)>0$ บน $(2,\infty) \Rightarrow$ increasing, $f'(x)<0$ บน $(-\infty,2)$ $\Rightarrow$ decresing

(b) $f(x)=x^3-3x$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$

① เนื่องจาก $f'(x)=3x^2-3$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม ซึ่งหาค่าได้ทุกค่าบน $\mathbb{R}$

② หา x ที่ทำให้ $f'(x)=0 \Rightarrow 3(x-1)(x+1)=0$

$x=-1, 1$

$\therefore$ ค่าวิกฤตคือ $x=-1, 1$

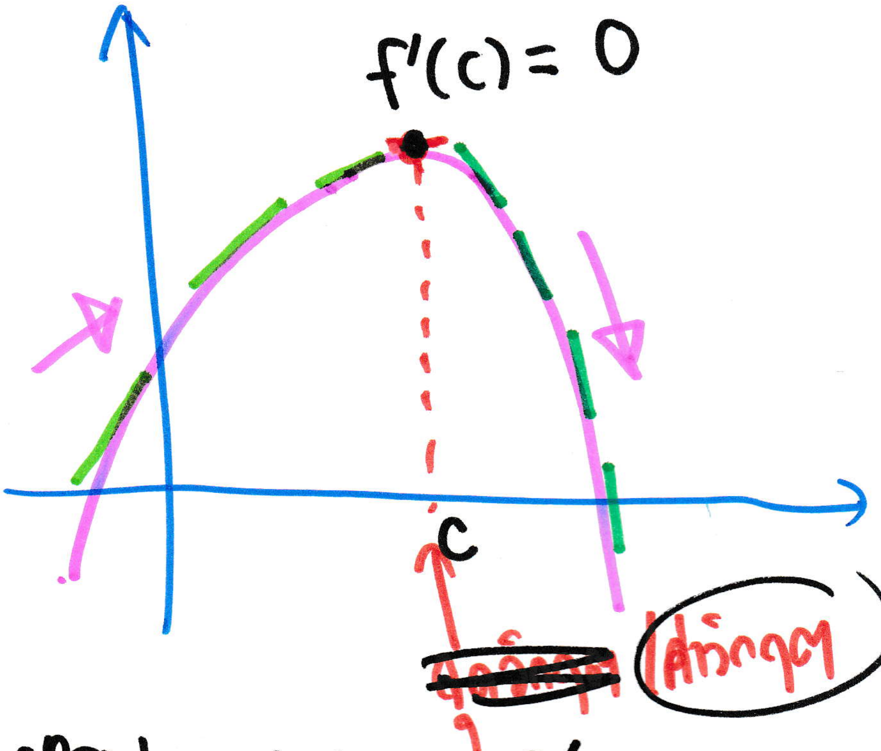
$+ + + + \quad - - - - \quad + + + +$

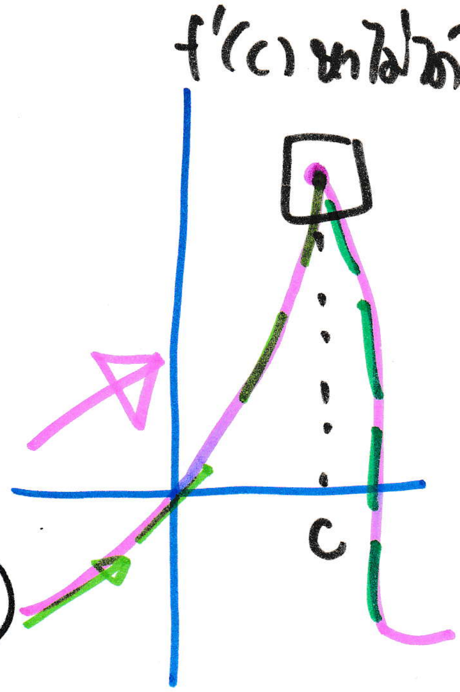
$(-\infty,-1) \quad -1 \quad (-1,1) \quad 1 \quad (1,\infty)$

เครื่องหมายของ $f'(x)$

$\therefore f'(x)>0$ บน $(-\infty,-1)\cup(1,\infty) \Rightarrow$ increasing

$f'(x)<0$ บน $(-1,1) \Rightarrow$ decreasing.



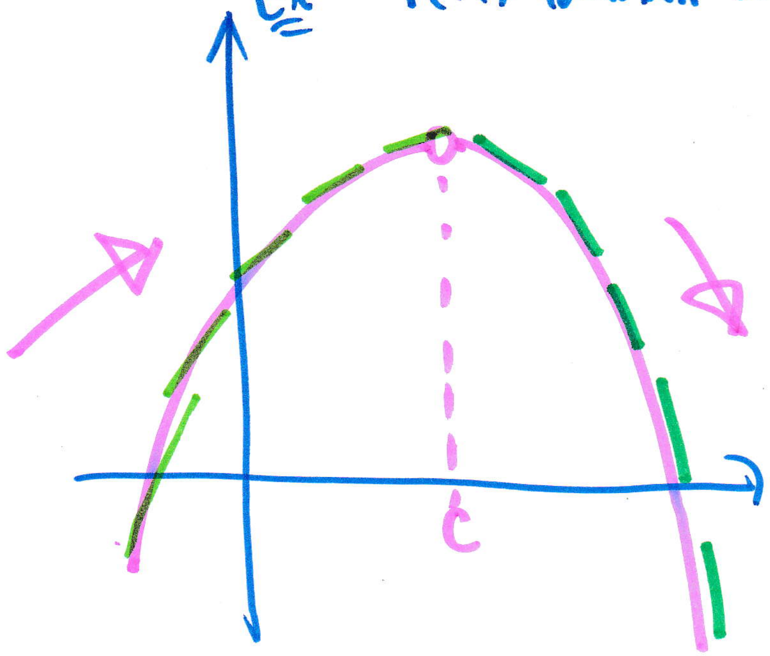


Defⁿ ① ค่า $x = c$ ที่ทำให้ $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ หาไม่ได้

จะเรียกว่าเป็นค่าวิกฤต (critical value)

* ค่าวิกฤตต้องอยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน

Ex $f(x)$ ไม่นิยามที่ $x = c$



$x = c$ เป็นค่าวิกฤตไหม

ตอบ ไม่เป็น

$x = c$ ไม่อยู่ใน โดเมน.

$\Rightarrow$ partition number (อยู่ในโดเมนหรือไม่ก็ได้)