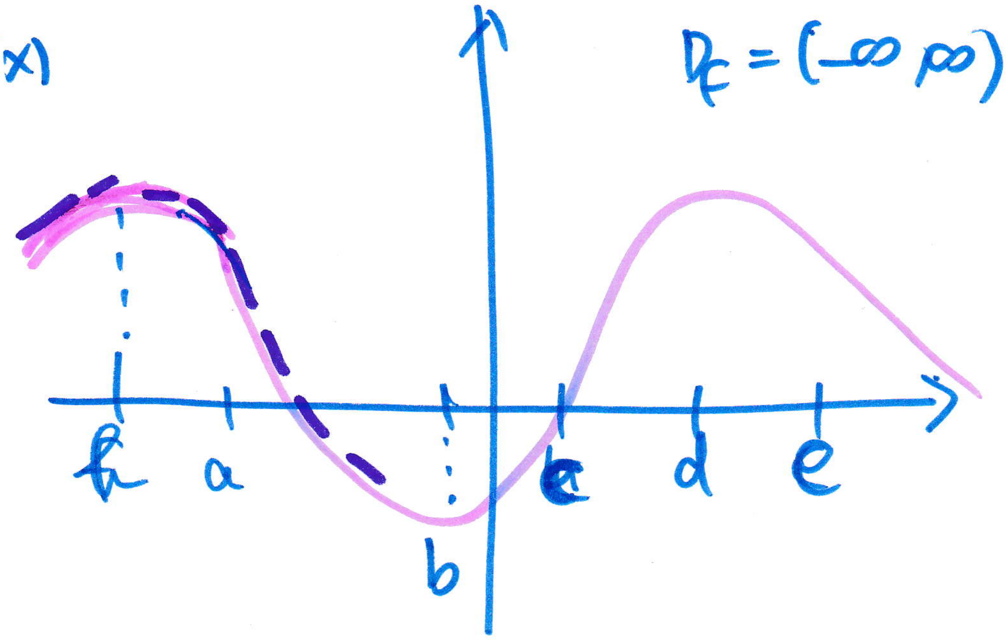
ฟร $f(x)$

$D_f = (-\infty, \infty)$



$f'(x) > 0$ f increasing on $(-\infty, h) \cup (b, d)$

$f'(x) < 0$ f decreasing on $(h, a] \cup [a, b) \cup (d, \infty)$

ค่า x ที่ทำให้ $f'(x) = 0$ หรือ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้

$x =$ ________ ; x เป็น partition number

$x =$ ________ ; x เป็น critical number (ค่าวิกฤต)

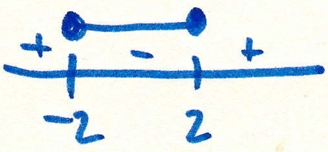
$x \in D_f$

HW

$D_f = [-2,2]$ $\quad 4-x^2 \geq 0$

$(x^2-4) \leq 0$

$(x-2)(x+2) \leq 0$



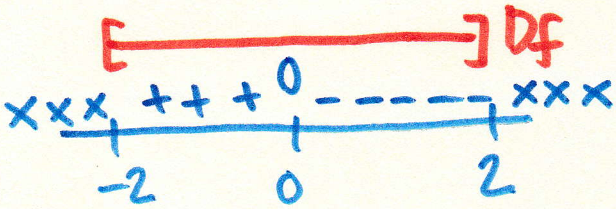
(c) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ .

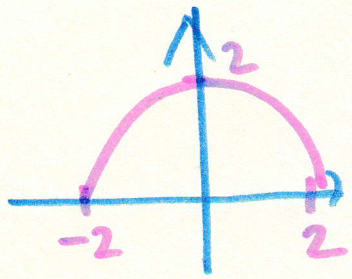
ดู f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม/ลด : เครื่องหมายของ $f'(x)$

$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$ หาค่าไม่ได้ที่ $x=-2,2$

และ ค่า $f'(x)=0$ แล้ว $x=?$

$\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow x=0$





f increasing on $(-2,0)$

f decreasing on $(0,2)$

เทียบบริเวณเล็กๆ → เทียบกับทุกส่วนทั้งหมด.

## Local Extrema

ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ / ค่าสุดขีดสัมบูรณ์

เทียบเฉพาะ: ใกล้/ดูในช่วง

**Definition 2** Let $c$ be a value in the domain of the function $f$ that is continuous on $(a,b)$.

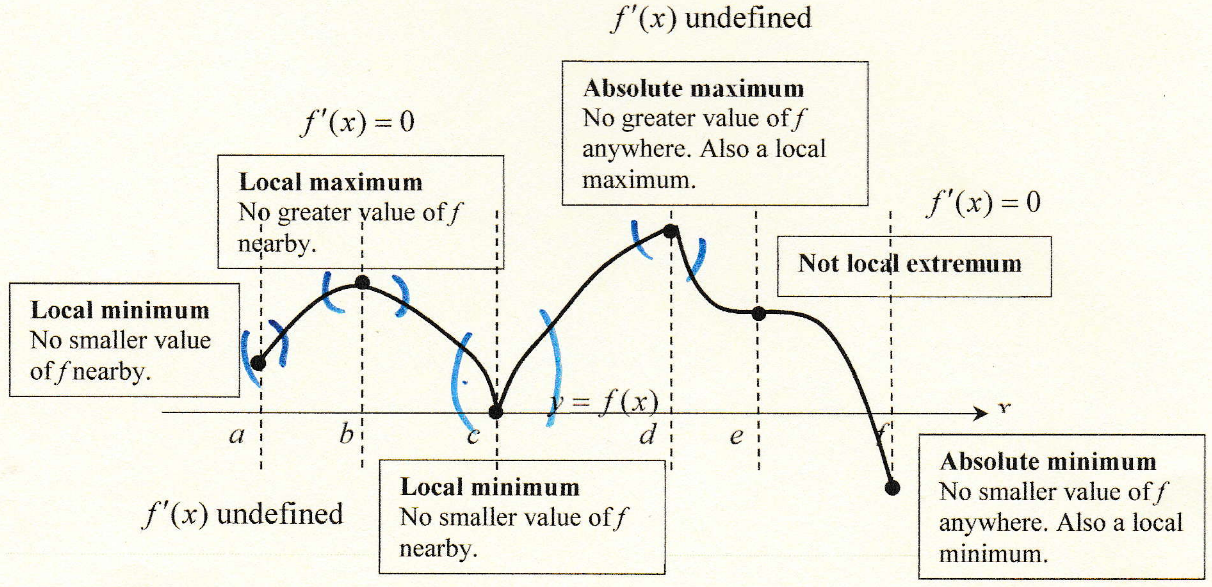
(1) We call $f(c)$ a **local maximum** if there exists an interval $(m,n)$ containing $c$ where $f(x) \leq f(c)$ for all $x$ in $(m,n)$. สูงสุดสัมพัทธ์

(2) We call $f(c)$ a **local minimum** if there exists an interval $(m,n)$ containing $c$ where $f(x) \geq f(c)$ for all $x$ in $(m,n)$. ต่ำสุดสัมพัทธ์

(3) We call $f(c)$ a **local extremum**, if $f(c)$ is a **local maximum** or a **local minimum**.

**Theorem 2** Let $f$ be a function that is continuous on $(a,b)$, and $c$ is a value in $(a,b)$ where $f(c)$ is a local extremum, then $c$ is a critical number.

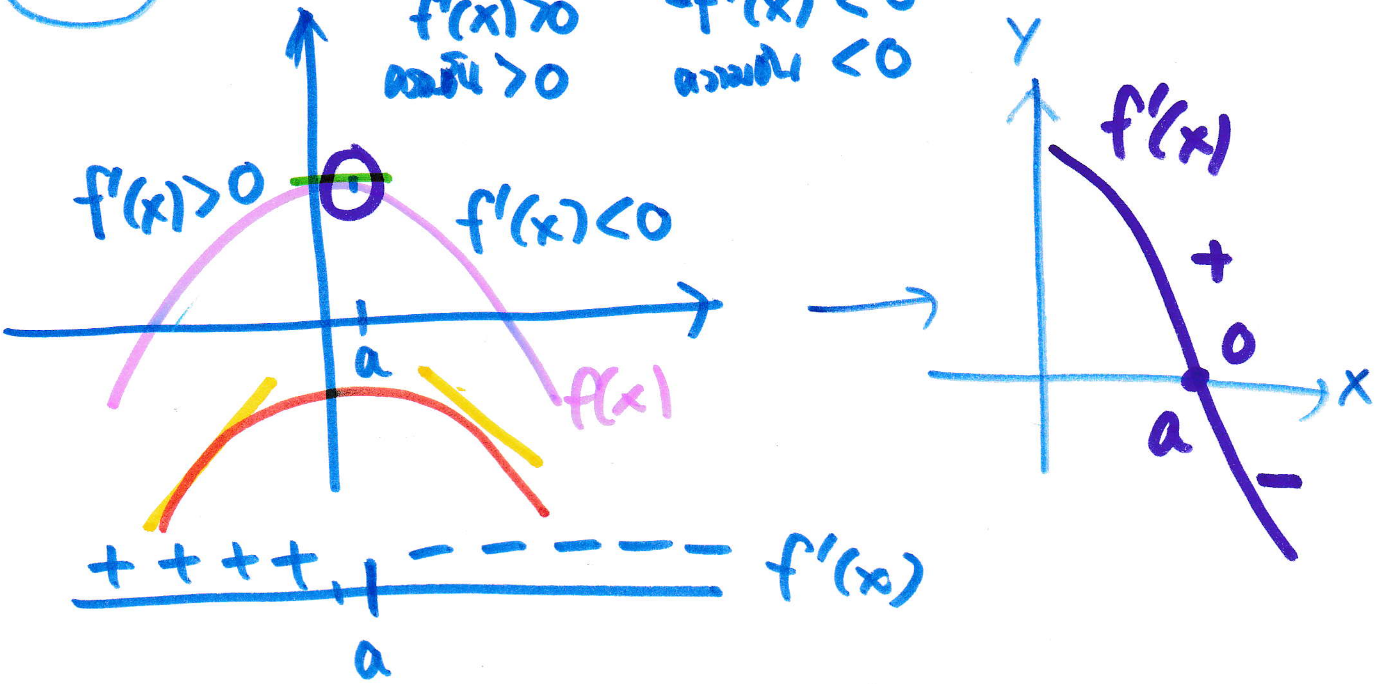
**Remark:** Not all critical numbers of $f'(x)$ are local extrema.



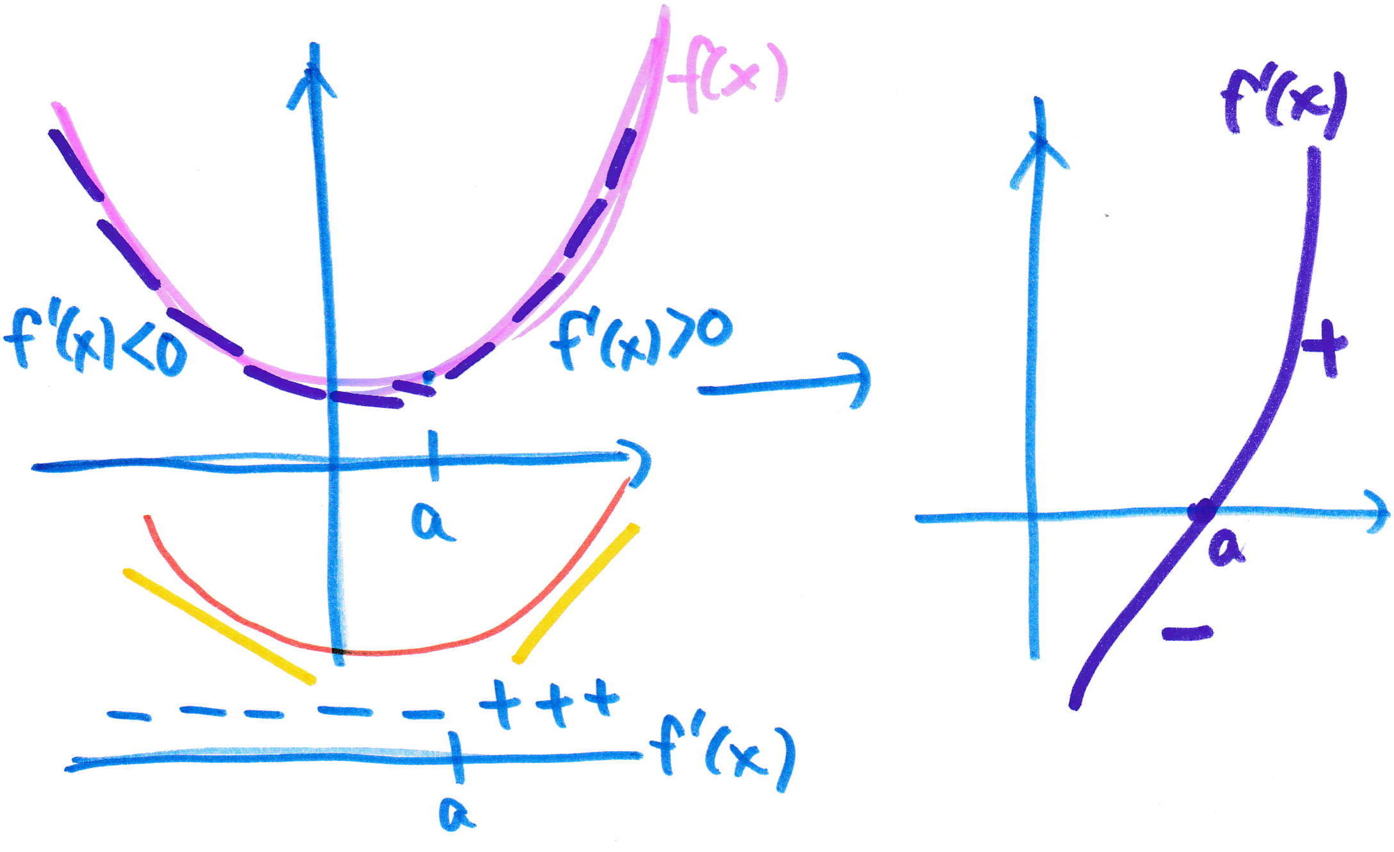
$f(x) \rightarrow \boxed{f'(x)}$ บอกว่าเป็น f เพิ่ม / ลด.

$f'(x) > 0$ → $f'(x) < 0$

ความชัน $> 0$ ความชัน $< 0$



มีการเปลี่ยนความชันจาก บวก ไปเป็นลบ ⟹ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์



มีการเปลี่ยนความชันจากลบ กลายเป็นบวก ⟹ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

มีฟังก์ชัน f(x) ให้

(1) หา $f'(x)$ ⇒ เพื่อหา partition number + critical value.

(2) พิจารณาเครื่องหมายของ $f'(x)$ ที่จุด $x = c$ ที่เป็น partition number

(3) ถ้ามีการเปลี่ยนเครื่องหมาย (ที่ $x = c$ และ c เป็นค่าวิกฤต)

$f'(x)$ เปลี่ยนจาก + เป็น − ที่ c  + + + | − − −

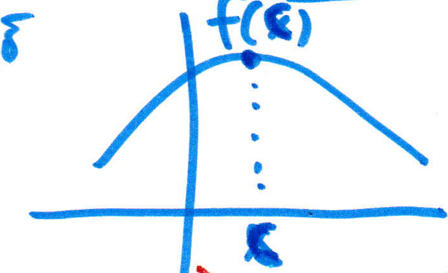
ที่ $x = c$ จะให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ c

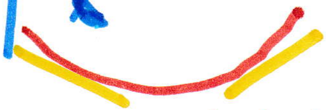
ที่ $x = c$

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $f(c)$

จุดสูงสุดสัมพัทธ์

$(c, f(c))$





$f'(x)$ เปลี่ยนจาก − เป็น + ที่ d  − − − − | + + + +

d

ที่ $x = c$ จะให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ~~c~~

ที่ $x = d$

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $f(d)$

จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(d, f(d))$.

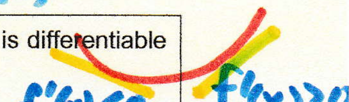
ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
ที่ x = c

∴ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ
f(c)

## First-Derivative Test

Let $c$ be a critical number of the function $f(x)$ that is continuous on $(a,b)$ containing $c$. If $f$ is differentiable on the interval, except possibly at $c$, then $f(c)$ can be classified as:

1. a **local minimum**, if $f'(x)$ changes from negative (or zero) to positive (or zero) at $c$. ↘ ↗
2. a **local maximum**, if $f'(x)$ changes from positive (or zero) to negative (or zero) at $c$. ↗ ↘
3. neither a max nor a min if $f'(x)$ is positive on both sides of $c$ ↗ ↗ or negative on both sides of $c$. ↘ ↘



$f'(x) \le 0$ , $f'(x) > 0$

$+ +$

c

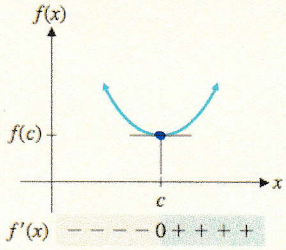
$f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$

$+ + + +$ c $- - - -$

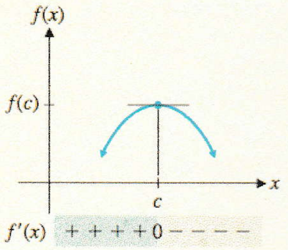
ให้ค่าสูงสุด
สัมพัทธ์ ที่ x = c

∴ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์
คือ f(c)

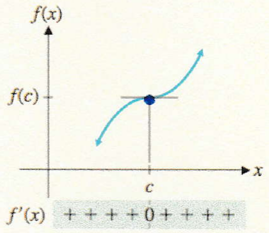
$f'(c) = 0$: **Horizontal Tangent**



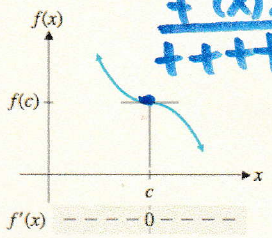
(A) f(c) is a local minimum



(B) f(c) is a local maximum



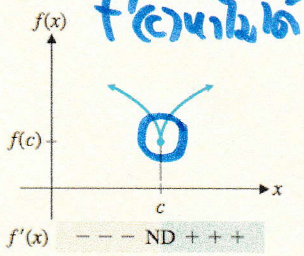
(C) f(c) is neither a local maximum nor a local minimum



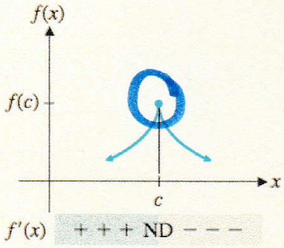
(D) f(c) is neither a local maximum nor a local minimum

$f'(c)$ is not defined, but $f(c)$ is defined. (หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ x = c แต่ต่อเนื่องที่ x = c)

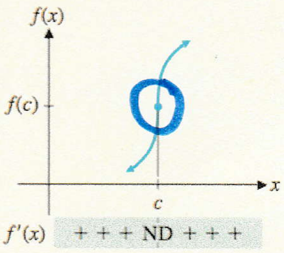
f'(c) หาไม่ได้



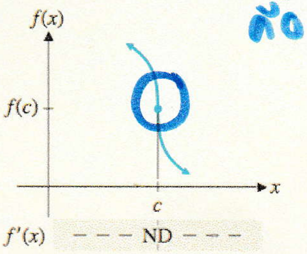
(E) f(c) is a local minimum



(F) f(c) is a local maximum



(G) f(c) is neither a local maximum nor a local minimum



(H) f(c) is neither a local maximum nor a local minimum

**Example** Find the local extrema (if exists) for the following functions, and determine the type of extrema.

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

① $f'(x) = 2x - 4$ ② ค่าวิกฤต : หา x ที่ทำให้ $f'(x) = 0$

Set : $2x - 4 = 0$ ; $x = 2$

∴ x = 2 เป็นค่าวิกฤต

③ $- - - - \quad + + + +$

$\boxed{2}$

sign of $f'(x)$

④ ที่ x = 2 มีการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมาย $f'(x)$ จากลบ เป็นบวก

∴ ที่ x = 2 ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

∴ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(2) = 4 - 8 + 5$
$= \underline{1}$

(b) $f(x) = x^3 - 3x$

① $f'(x) = 3x^2 - 3$

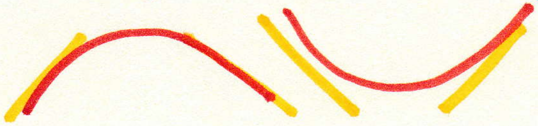
② หาค่าวิกฤต : หา x ที่ทำให้ $f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0$

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$\therefore \boxed{x = \pm 1}$



$+ + + + \quad - - - - \quad + + + +$

$\boxed{-1}$ $\quad 1$

∴ f'(x) มีการเปลี่ยนเครื่องหมายจาก + เป็นลบที่ x = −1

∴ ที่ x = −1 ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์

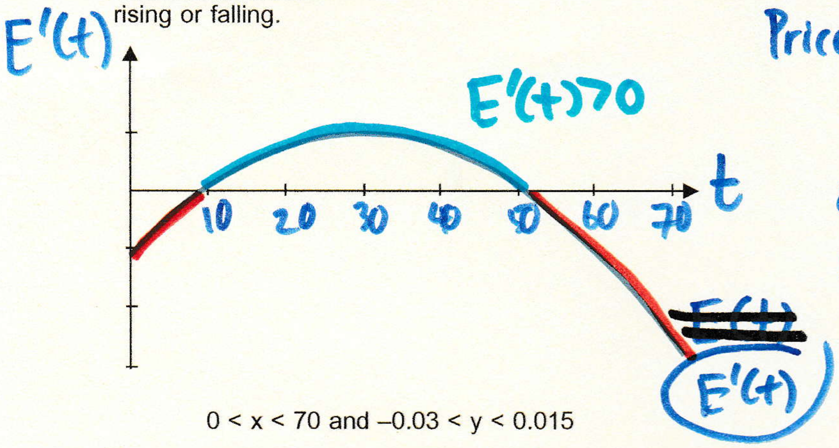
ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-1) = 2$

และ f'(x) เปลี่ยนเครื่องหมายจาก − เป็น + ที่ x = 1 ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ x = 1, คือ f(1) = 2

## Applications

อัตราการเปลี่ยนแปลง ของราคาไข่

**Example** The graph in the figure approximates the rate of change of the price of eggs over a 70 month period, where $E(t)$ is the price of a dozen of eggs (in dollars), and $t$ is the time in months. Determine when the price of eggs was rising or falling.



Price of eggs are rising when $E'(t) > 0$

are falling when $E'(t) < 0$

$E'(t) > 0$

ราคาไข่เพิ่มขึ้นในเดือนที่ 10 ถึง 50

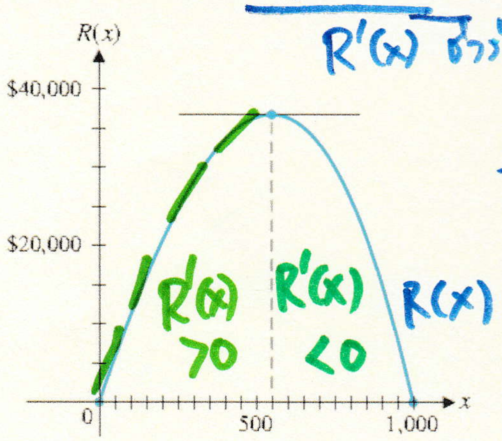
ราคาไข่ลดลงในเดือนที่ ~~เดือนที่~~

$E'(t) < 0$ 0 ถึง 10 และ 50 ถึง 70.

0 < x < 70 and –0.03 < y < 0.015

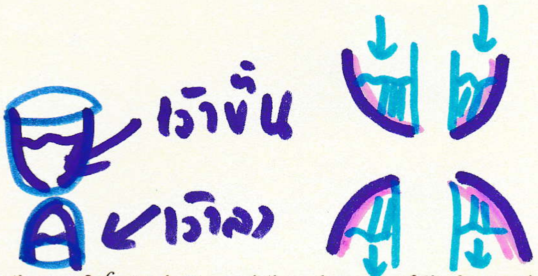
**Example (Revenue Analysis)** The graph of the total revenue $R(x)$ (in dollars) from the sale of $x$ bookcases (ตู้หนังสือ) is shown below. When would the marginal revenue be positive, and when would it be negative?

R'(x) ช่วงไหนเป็นบวก/ลบ



∴ ในช่วงที่ 0-500 แล้ว M.R. เป็นบวก

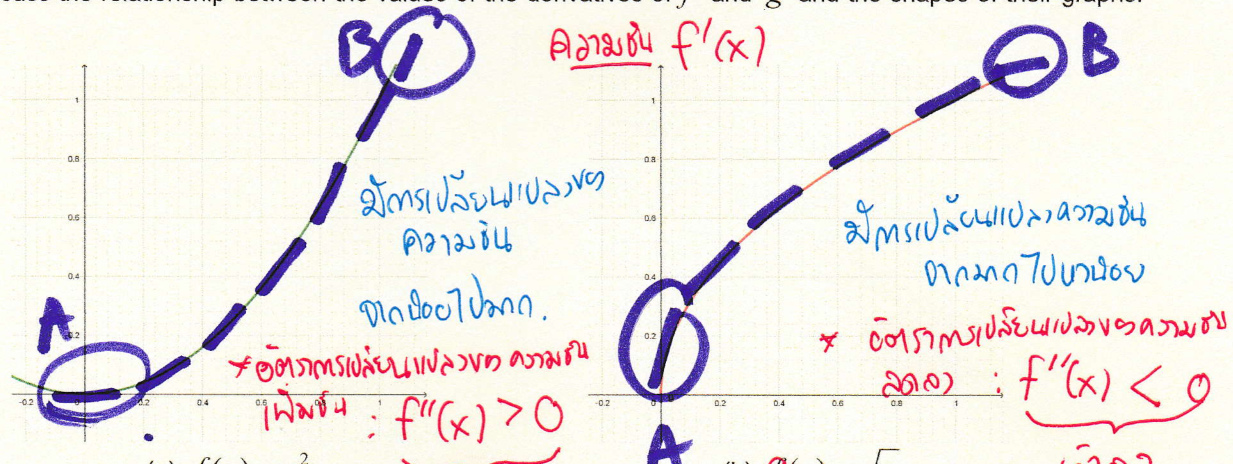
500-1000 แล้ว MR เป็นลบ.



## 6.2 Second Derivative and Graphs

### Using Concavity (ความเว้า) as a graphing Tool

**Example** Discuss the relationship between the values of the derivatives of $f$ and $g$ and the shapes of their graphs.



ความชัน $f'(x)$

มีการเปลี่ยนแปลงของความชัน จากน้อยไปมาก.

*อัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันเพิ่มขึ้น : $\underbrace{f''(x) > 0}_{\text{เว้าขึ้น}}$

มีการเปลี่ยนแปลงความชัน จากมากไปหาน้อย

* อัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันลดลง : $\underbrace{f''(x) < 0}_{\text{เว้าลง}}$.

(a) $f(x) = x^2$

(b) $g(x) = \sqrt{x}$

Concave up : เว้าขึ้น

เส้นสัมผัสอยู่ใต้กราฟ

Concave down : เว้าลง

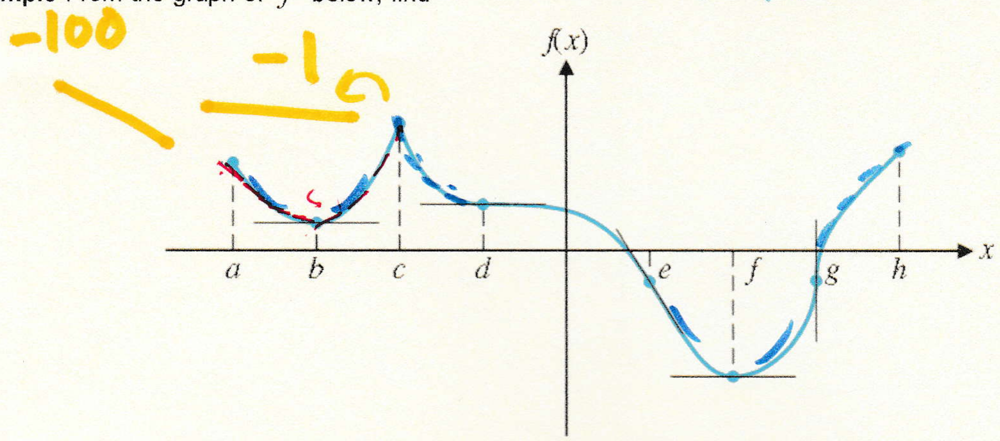
เส้นสัมผัสอยู่เหนือกราฟ.

$f''(x) > 0$

**Definition 3** The graph of function $f$ is **concave upward** on the interval $(a,b)$ if $f'(x)$ is increasing on $(a,b)$ and is **concave downward** on the interval $(a,b)$ if $f'(x)$ is decreasing on $(a,b)$.

$f''(x) < 0$

**Example** From the graph of $f$ below, find



(a) intervals where the graph of $f$ is concave upward

$(a,c)\cup(c,d)\cup(e,g)$

(d) intervals where the graph of $f$ is concave downward

$(d,e)\cup(g,h)$

(b) intervals on which $f'(x)$ is increasing

$(a,c)\cup(c,d)\cup(e,g)$

(e) intervals on which $f'(x)$ is decreasing

$(d,e)\cup(g,h)$

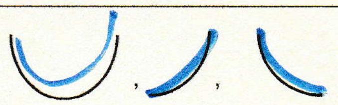
(c) intervals on which $f''(x) > 0$ $f''(x) > 0$

$(a,c)\cup(c,d)\cup(e,g)$

(f) intervals on which $f''(x) < 0$

$(d,e)\cup(g,h)$

**Concavity summary:** For the interval $(a,b)$,

| $f''(x)$ | $f'(x)$ | Graph of $f$ | Examples |
|---|---|---|---|
| + <br> $f''(x) > 0$ | Increasing | Concave upward |  |
| – <br> $f''(x) < 0$ | Decreasing | Concave downward |  |

**Example** Find the intervals where the graph of $f(x) = x^3 + 24x^2 + 15x - 12$ is concave up or concave down.

ใช้ $f''(x)$ ตรวจสอบความเว้าขึ้น/ลง

$f'(x) = 3x^2 + 48x + 15$

$f''(x) = 6x + 48$

$f''(x) > 0$ เมื่อ $x \in (-8, \infty)$ ⇒ เว้าขึ้น

$f''(x) < 0$ เมื่อ $x \in (-\infty, -8)$ ⇒ เว้าลง

– – – – + + + + + Sign of $f''(x)$

$\boxed{x = -8}$

ดูว่า $f''(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายตรงไหน

คือดูว่าค่าวิกฤตของ $f'(x)$ คืออะไร

ดูค่า $x$ ที่ทำให้ $f''(x) = 0$ หรือ

$f''(x)$ หาค่าไม่ได้

Set $6x + 48 = 0$

$6x = -48$

$\boxed{x = -8}$

**Example** Find the intervals where the graph of $f(x)=\ln\left(x^2-4x+5\right)$ is concave up or concave down. $f''(x)$

$f'(x)=\frac{2x-4}{x^2-4x+5}$ ; $f''(x)=\frac{-2x^2+8x-6}{(x^2-4x+5)^2}$

ดูว่า $\boxed{f''(x)=0}$ และ $f''(x)$ หาไม่ได้ที่ไหน.

$x^2-4x+5=(x^2-4x+4)+1=(x-2)^2+1>0$

หา $f''(x)$ $-2x^2+8x-6=0$

$x^2-4x+3=0$

$(x-3)(x-1)=0$ ; $\boxed{x=1,3}$

ที่ (1, f(1)) จุดเปลี่ยนเว้า

(3, f(3)) จุดเปลี่ยนเว้า

$$\underset{1}{- - -} \; + + + + + \; \underset{3}{- - -}$$

sign of $f''(x)$

ความเว้า

$f''(x)>0$ บน $(1,3)$ เว้าขึ้น

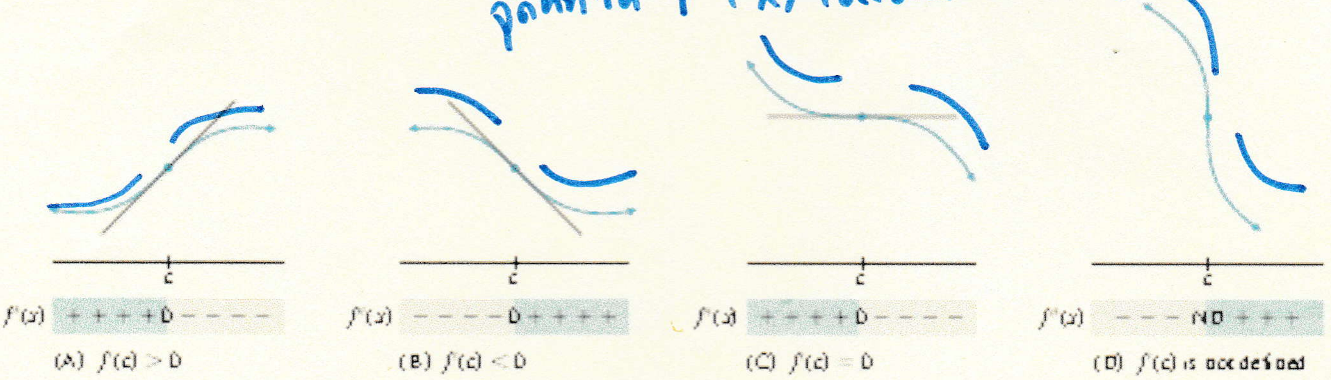
$f''(x)<0$ บน $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$ เว้าลง.

## Finding Inflection Points

จุดเปลี่ยนเว้า : จุดที่มีการเปลี่ยนแปลงของความเว้า

**Definition 4** If the graph of $y=f(x)$ changes concavity at $x=c$, then the point $(c,f(c))$ is called an **inflection point**.

จุดที่ทำให้ $f''(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมาย.



**Remark:** The values of $x$ where $f''(x)=0$ or where $f''(x)$ does not exist are called the **partition numbers** of $f''(x)$. (It does not matter whether it is in the domain of $f$ or not.)

**Theorem 3** If $y=f(x)$ is continuous on $(a,b)$ and has an inflection point at $(c,f(c))$, then either $f''(c)=0$ or $f''(c)$ does not exist.

**Example** Find the inflection points of

(a) $f(x)=x^4$

$f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$ ดูว่า $f''(x)=0$ ที่ไหน และหาค่าไม่ได้ที่ไหน

$x=0$

จุดที่อาจเกิดจุดเปลี่ยนเว้า

$$+ + + + \underset{x=0}{|} + + + +$$

sign of $f''(x)$

$\left(12x^2=0 \Rightarrow x=0\right)$

ที่ $x=0$ ไม่ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า