

แบบฝึกหัดทบทวน

สำหรับคาบเรียนวันพฤหัสบดีที่ 23 พฤศจิกายน พ.ศ.2560 ฝึกทำก่อนสอบ ไม่ต้องส่ง

ชื่อ-สกุล..... บณัฐ ~ รหัสนักศึกษา..... ลำดับที่.....

1. กำหนดให้
- $y(t)$
- คือปริมาณสาร ณ เวลา
- t
- (หน่วยเป็นปี) ใดๆ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$\frac{dy}{dt} = -ky, \quad y(0) = y_0 \text{ เมื่อ } k \text{ เป็นค่าคงตัวบวกใดๆ ที่ } k > 0$$

- (a) จงใช้วิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปร แสดงว่า
- $y(t) = y_0 e^{-kt}$

- (b) สมมติว่าปริมาณสารเป็นไปตามสมการ
- $y(t) = y_0 e^{-0.001t}$
- จงหาว่าต้องใช้เวลานานเท่าใดที่สารนี้จะเหลืออยู่เพียงหนึ่งในสี่ของปริมาณเริ่มต้น

(a) จาก $\frac{dy}{dt} = -ky$

$$\therefore \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = -k$$

$$\therefore \frac{1}{y} dy = -k dt$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -k dt$$

$$\ln |y| = -kt + C$$

$$\therefore y = e^{-kt+C}$$

Hence, $y = Ce^{-kt}$

$$\therefore \text{เมื่อ } y(0) = y_0, \quad y_0 = Ce^{-k(0)} \Rightarrow C = y_0$$

$$\therefore \text{particular solution คือ } y = y_0 e^{-kt}$$

(b) เมื่อ $\frac{y_0}{4}$ คือปริมาณสารที่เหลือ

$$\frac{y_0}{4} = y_0 e^{-0.001t}$$

$$\therefore -\ln 4 = -0.001t$$

$$t = \frac{\ln 4}{0.001} = 1000 \ln 4.$$

$$\therefore \text{ใช้เวลา } 1000 \ln 4 \text{ ปี } \approx 1386.29 \text{ ปี}$$

2. จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$2 \frac{dy}{dx} - 4y = e^x$$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$$\frac{dy}{dx} - 2y = \frac{1}{2} e^x$$

$$\therefore \text{ตัวประกอบอินทิเกรตคือ } \mu(x) = e^{\int -2 dx} = e^{-2x}$$

คูณด้วย $\mu(x)$ ทั้งสองข้าง

$$e^{-2x} \left[2 \frac{dy}{dx} - 4y \right] = (e^{-2x}) \left(\frac{1}{2} e^x \right)$$

$$\frac{d}{dx} [e^{-2x} y] = \frac{1}{2} e^{-x}$$

$$d(e^{-2x} y) = \frac{1}{2} e^{-x} dx$$

$$\int d(e^{-2x} y) = \int \frac{1}{2} e^{-x} dx$$

$$e^{-2x} y = -\frac{1}{2} e^{-x} + C$$

$$\therefore y = e^{2x} \left[-\frac{1}{2} e^{-x} + C \right]$$

$$y = -\frac{1}{2} e^x + C e^{2x}$$