First-order ODEs

- Seperable form : สามารถแยกตัวแปรได้

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

- Linear Equation

$$\boxed{\frac{dy}{dx}} + p(x)\boxed{y} = q(x)$$

Sheet $e^{P(x)} = e^{\int p(x)\,dx}$

เป้าหมาย อยากทำ Linear Equation ให้แก้ง่ายๆ แบบ Seperabe eq^{n}

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)} \quad (*) \longrightarrow \frac{d(\heartsuit)}{dx} = q(x)$$

เราจะนำ $\mu(x)$ ไปคูณทั่ว $(*)$ (จะหาว่า $\mu(x)$ คืออะไร)

* อยากให้ด้านซ้ายอยู่ในรูปของ $\frac{d}{dx}[\mu(x)\cdot y]$

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x)$$

เราอยากได้ $\boxed{\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \frac{d}{dx}[\mu(x)\cdot y]}$

พิจารณา $\frac{d}{dx}[\mu(x)\cdot y] = \mu(x)\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}(\mu(x))$.

เทียบกัน $\mu(x)\frac{dy}{dx} + \boxed{\mu(x)p(x)y} = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \boxed{y\frac{d\mu(x)}{dx}}$

ทำให้ $\mu(x)p(x) = \frac{d}{dx}(\mu(x))$

$$d(\mu(x)) = \mu(x)p(x)\,dx$$

$$\frac{1}{\mu(x)}\, d(\mu(x)) = p(x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{\mu(x)}\, d(\mu(x)) = \int p(x)\,dx$$

$$\ln|\mu(x)| = \int p(x)\,dx$$

แก้สมการหาว่า $\mu(x)$ คืออะไร

$$\boxed{\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}}$$

$\mu(x)$ เรียกว่า ตัวประกอบการอินทิเกรต (integration factor).

Below is a summary of how to apply the Method of Integrating Factors to the equation (8.10). If the original equation is not in the form of (8.10), it needs to be rewritten first!

Step 1. Calculate $\int p(x)dx$ and choose an integrating factor

$$\mu = e^{P(x)} = e^{\int p(x)dx}$$

for the linear equation. You may take the constant of integration to be zero to make things simpler.

Step 2. Multiply both sides of (8.10) by μ and express the result as

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu q(x).$$

Step 3. Integrate both sides of the result from Step 2 and then solve for y.

① เขียนสมการ DE.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad — ♥$$

หา/วิเคราะห์ $p(x)$, $q(x)$

② หาตัวประกอบการอินทิเกรตไปคูณทั้งสมการ

คือ $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$

③ คูณแล้ว สมการ ♥ จะอยู่ในรูป

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu q(x)$$

*อยู่ในรูป separable แล้ว

④ เขียนในรูป differential

$$d(\mu(x)y) = \mu q(x)\,dx$$

$$\int d(\mu(x)y) = \int \mu(x)q(x)dx$$

$$\mu(x)y = \int \mu(x)q(x)dx$$

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)q(x)dx. \quad \#$$

Example 8.7 Solve the differential equation

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{2x}.$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

$$p(x) = -1$$

ไม่ต้องบวก C

หา I.F. $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -1 dx} = e^{-x}$

$$\therefore \boxed{\mu(x) = e^{-x}}$$

คูณด้วย $\mu(x)$ ทั้งสองข้าง

$$\cancel{\mu(x)\frac{dy}{dx}}$$

$$e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x}y = e^{-x}\cdot e^{2x}$$

$$\frac{d}{dx}[\underbrace{e^{-x}y}_{\mu(x)y}] = e^{x}$$

$$d(e^{-x}y) = e^{x}dx$$

อินทิเกรตทั้งสองข้าง

$$\int d(e^{-x}y) = \int e^{x}dx$$

$$e^{-x}y = e^{x} + C$$

$$\boxed{y = e^{2x} + Ce^{x}}$$

Problem 8.5 Solve the differential equation

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 - x + 1. \qquad \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

สมการในรูปเชิงเส้นคือ $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2}{x}\right)y = x - 1 + \frac{1}{x}$ —(*)

$$p(x) = \frac{2}{x}$$

∴ ตัวประกอบการอินทิเกรตคือ $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}\,dx}$

$$= e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$\boxed{\mu(x) = x^2}$$

นำ $\mu(x)$ ไปคูณทั้งสองข้าง (*)

$$\underbrace{x^2\left(\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y\right)} = x^2\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(\underbrace{x^2 y}_{\mu(x)\cdot y}) = x^3 - x^2 + x$$

$$d(x^2 y) = (x^3 - x^2 + x)\,dx$$

อินทิเกรตทั้งสองข้าง

$$\int d(x^2 y) = \int (x^3 - x^2 + x)\,dx$$

$$x^2 y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}}$$

Problem 8.6 Solve the initial-value problem

$$x\frac{dy}{dx} - y = x, \quad y(1) = 2.$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 1$$

$$p(x) = -\frac{1}{x};\ \mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

$$= e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\mu(x) = \frac{1}{x}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}\right)} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{\frac{1}{x}y}_{\mu(x)\,y}\Big) = \frac{1}{x}$$

$$d\left(\frac{1}{x}y\right) = \frac{1}{x}dx$$

$$\int d\left(\frac{1}{x}y\right) = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{x}y = \ln|x| + C$$

general solution → $\boxed{y = x\ln|x| + Cx}$

$y(1)=2:$ $2 = 1\cancelto{0}{\ln|1|} + C(1)$

$$\boxed{C = 2}$$

particular solution → $\boxed{y = x\ln|x| + 2x \ \text{[illegible]}\ y(1)=2}$

8.3 Applications

This section provides some applications of first-order differential equations we have learned in previous sections.

อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณ y เทียบกับเวลา t

Growth $y \to \frac{dy}{dt} \propto y \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dt} = kt \; ; k>0}$

- **Exponential Growth and Decay Models**

> Definition A quantity $y = y(t)$ is said to have an **exponential growth model** if it increases at a rate that is propotional to the amount of the quantity present, and it is said to have an **exponential decay model** if it decreases at a rate that is propotional to the amount of the quantity present. Thus, for the former case, the quantity $y(t)$ satisfies an equation of the form
>
> $$\frac{dy}{dt} = ky \quad (k > 0) \tag{8.12}$$
>
> and for the latter, the quantity $y(t)$ satisfies an equation of the form
>
> $$\frac{dy}{dt} = -ky \quad (k > 0). \tag{8.13}$$
>
> The positive constant k is called the **growth constant** or the **decay constant**, as appropriate.

Decay $-\frac{dy}{dx} \propto y$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -ky \; ; k>0$

Let us imagine that we are studying the behaviour of a function $y = y(t)$, which changes over time t. Suppose experimentation shows that $y(t)$ satisfies a differential equation (8.12)

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad (k > 0).$$

We now need to solve this equation to study the behaviour of $y(t)$.

Problem 8.7 Solve the initial-value problem

$$\frac{dy}{dt} = ky, \quad y(0) = y_0$$

for $k > 0$.

สมการแยกตัวแปร

$$\underbrace{\frac{1}{y}}_{H(y)}\frac{dy}{dt} = \underbrace{k}_{g(x)}$$

$$\frac{1}{y}\,dy = k\,dt$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$$

$$\ln|y| = kt + C_1$$

$$y = e^{kt+C_1}$$

$$y = e^{C_1}\cdot e^{kt}$$

$$y = Ce^{kt}$$

$y(0) = y_0$

$$y_0 = Ce^{\cancel{k\cdot 0}}$$

$$\boxed{C = y_0}$$

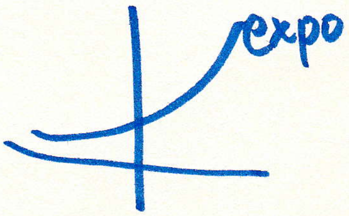
$$y = y_0 e^{kt}$$

สมการ IF. (Linear)

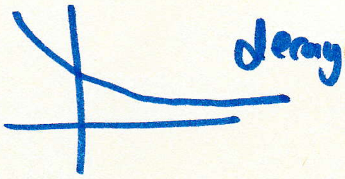
$$\frac{dy}{dx} \underbrace{-k}_{p(x)} y = \underbrace{0}_{q(x)}$$

HL

Similarly, if $y(t)$ satisfies a differential equation (8.13) with initial condition $y(0) = y_0$, then



$$\boxed{y = y_0 e^{-kt}.} \tag{8.14}$$



Growth: $y = y_0 e^{kt}$

It is a fact of physics that radioactive elements (e.g. plutonium, radium, uranium, etc.) disintegrate over time in the process called *radioactive decay*. Let $y(t)$ be the quantity of a radioactive element at time t. It is shown that $y(t)$ has an exponential decay model (8.13); that means it is explained by the rule (8.14)

$$y = y_0 e^{-kt}$$

where $k > 0$ is the decay constant and $y(0)$ is the initial quantity at time $t = 0$.

Problem 8.8 **Half-life** is the time required for a radioactive element to reduce its quantity by half.

Denote by T the half-life of a radioactive element. Use (8.14) to write T in terms of the decay constant k. If the half-life of radium-226 is 1600 years, find its decay constant. หา k

$$\boxed{y = y_0 e^{-kt}}$$

สมมติว่ามีสาร y_0 $\therefore$ เมื่อเวลาผ่านไป T สารที่มีอยู่จะลดเป็น $\frac{y_0}{2}$

$$\frac{\cancel{y_0}}{2} = \cancel{y_0} e^{-kT}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-kT}$$

Take ln; $\ln \frac{1}{2} = \ln e^{-kT} \Rightarrow -\ln 2 = -kT \underbrace{\ln e}_{=1}$

$$kT = \ln 2$$

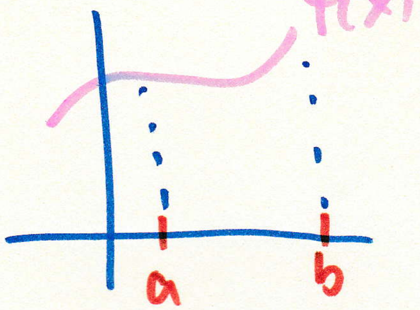
$$\therefore T = \frac{\ln 2}{k}$$

เมื่อ $T = 1600$; $1600 = \frac{\ln 2}{k}$

$$\therefore \boxed{k = \frac{\ln 2}{1600}}$$

CH 5 : นิยามของการอินทิเกรต

- $\int_a^b f(x)\,dx$

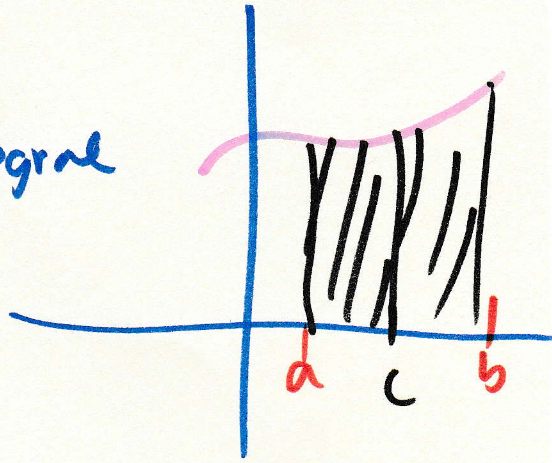


Riemann Sum ⇒ ความกว้าง, ความสูง

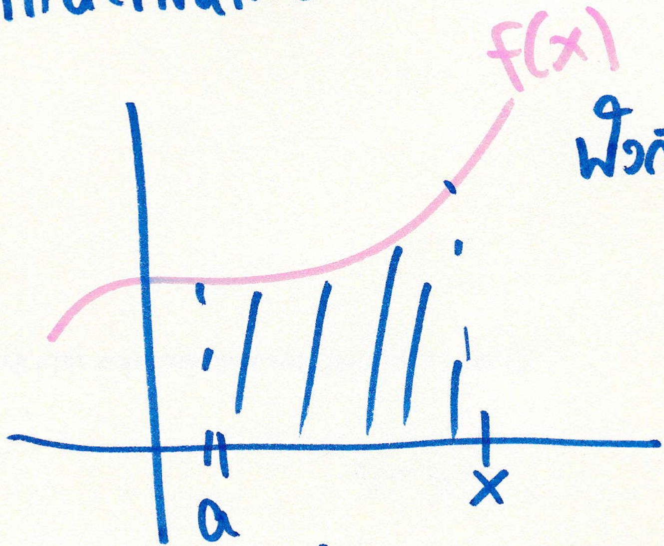
$$A_n = \sum \text{~~~~~~}$$

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

- สมบัติที่เกี่ยวข้องของ definite integral
- Net Signed Area



- Antiderivative



ฟังก์ชัน พ.ท. A(x)

$$\int_a^b f(x)\,dx = A(x)$$

- Fundamental Theorem of Calculus.

① $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

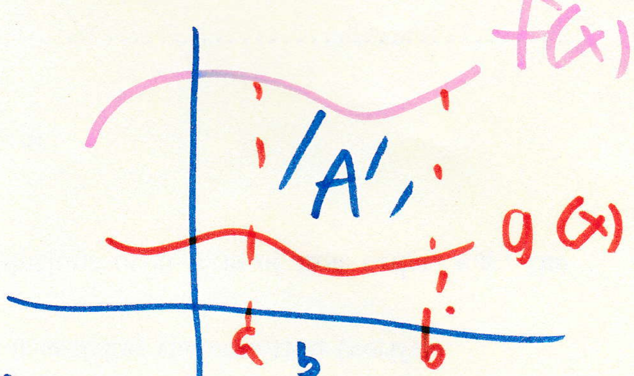
② $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

- integrate แทนค่า $u = \_\_\_\_\_$

$$\int_a^b f(x)\,dx \Longrightarrow \int_{f(a)}^{f(b)} f(u)\,du$$

CH6 ① พ.ท.ระหว่างเส้นโค้ง

- เทียบ x
- เทียบ y
- เมื่อ f(x) ไม่ได้อยู่ข้างบน, g(x) ไม่ได้อยู่ข้างล่างตลอด

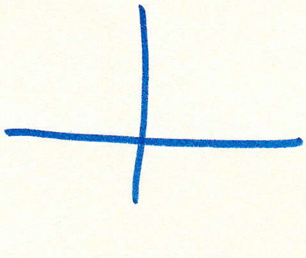


$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

② ปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุน

$\int \pi(r^2)\,dx$ ขนมปัง { - Disk ⇒ แกนหมุนติดกับบริเวณที่หมุน.
- Washer ⇒ แกนหมุนไม่ได้ติดกับบริเวณหมุน }

$\int 2\pi r(\sim)$ แยมโรล { - Cylindrical shell ⇒ (แถบขนานแกนหมุน) }



→ หมุน x, y, y = 5, x = 8

CH7 • เทคนิคการอินทิเกรต

- By Parts ; u, dv
- ตรีโกณมิติบางแบบ $\int \sin^m x \cos^n dx$
- แทนค่าตรีโกณ

$$\sqrt{a^2-u^2} \Rightarrow u = a\sin\theta$$
$$\sqrt{a^2+u^2} \Rightarrow u = a\tan\theta$$
$$\sqrt{u^2-a^2} \Rightarrow u = a\sec\theta$$

- partial fractinal

$$\frac{\cancel{A}}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

• Improper integral

- $\int_{-\infty} f(x)dx$
- $\int_0^1 f(x)\,dx$ f(x) discont $x=a$
- $\int_0^{+\infty} f(x)dx$

เขียนลิมิตของ improper integral ให้เป็น

CH 8 DEs

→ การเป็นผลเฉลยของสมการ

→ Separable Eq$^{\underline{n}}$.

→ Linear Eq$^{\underline{n}}$. $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$

→ Application : G. & D.