Midterm: Sun 4^{th} March 08.00-11.00

ห้อง RB5101.

(ชุดนักศึกษาให้เรียบร้อย)

- **Open book** :- หนังสือ ห้ามมีพวก post it / กระดาษแทรก / กระดาษแปะ (ใช้เทป flag ได้)

Review ก่อนสอบกลางภาค.

① Function → well-defined.
→ หา D_f + Proof
→ หา R_f + Proof.

② **Limit of function** $\lim\limits_{P\to A} f(P) = L.$

① ลิมิตทั่วไป

② ลิมิตตามเส้น : เลือกเส้นที่ path ผ่านจุดที่จะดูลิมิต.

$$\lim_{P\to A} f(P) = L \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \left[\|P-A\| < \delta \Rightarrow |f(P)-L| < \varepsilon \right].$$

(*) หาอสมการมาช่วย bound.

Ex → Triangle inequality $|A+B| \le |A|+|B|$

→ AM-GM $\dfrac{A+B}{2} \ge \sqrt{AB}$

→ $x^2 \le x^2+y^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \le 1$

③ **Continuity** f is cont at $P=A \iff$ ① $f(A)$ หาค่าได้
② $\lim\limits_{P\to A} f(P)$ exist.
③ $\lim\limits_{P\to A} f(P) = f(A)$

④ Partial Derivative

$f = f(x_1, \dots, x_n)$

$$D_{x_i} f(x_1, x_2, \dots x_n) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots x_n) - f(x_1, \dots x_n)}{\Delta x_i}$$

- $D_x f(x,y)$, $D_y f(x,y)$
- $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$D_x f(0,0) = ?$

⑤ Differentiability + Total Differential

Increments : $\underbrace{\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}_{\text{Differentiability}}$.

$$\Delta f(x_0, y_0) = D_x f(x_0, y_0) \Delta x + D_y f(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.$$

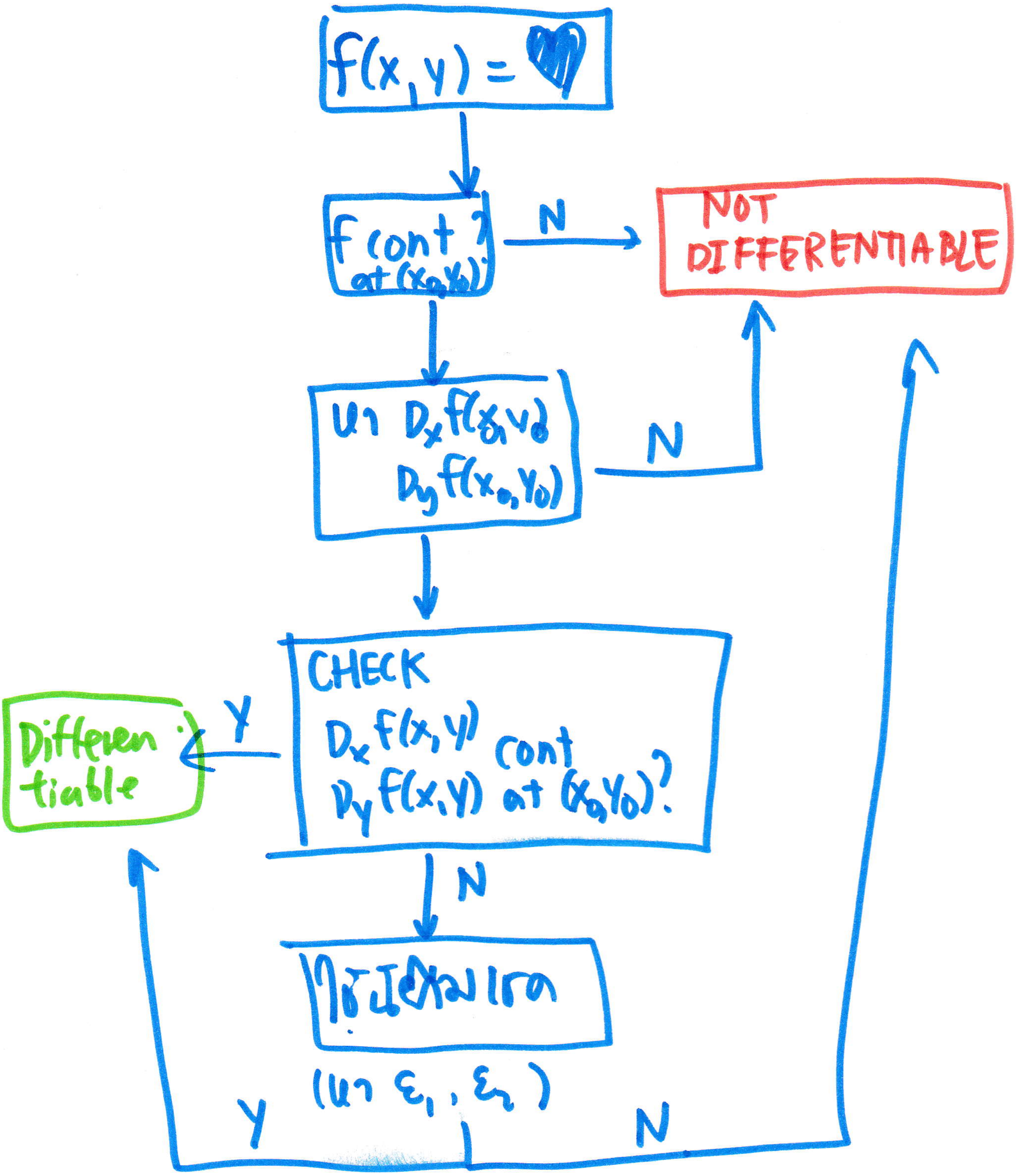
เมื่อ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ เป็นฟังก์ชันของ $\Delta x, \Delta y$ และ

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \varepsilon_1 = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \varepsilon_2$$

$f \in C^1$ → f diff ได้ที่ (x_0, y_0) → f cont ที่ $(x_0; y_0)$

f diff ได้ที่ (x_0, y_0) → f หาอนุพันธ์ย่อยได้ ที่ (x_0, y_0) D_x, D_y

ถ้าอนุพันธ์ย่อย ต่อเนื่อง


$f(x,y) =$
f cont ? at (x_0,y_0)
N
NOT DIFFERENTIABLE
หา $D_x f(x_0,y_0)$ $D_y f(x_0,y_0)$
N
CHECK
$D_x f(x,y)$ $D_y f(x,y)$ cont at (x_0,y_0)?
Y
Differentiable
N
ใช้นิยาม
(หา ε_1, ε_2)
Y
N

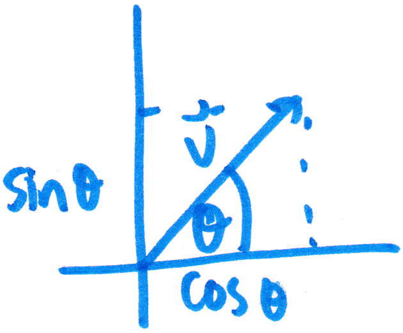
⑥ Homogeneous Function

$$F(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^m F(x_1, \ldots, x_n)$$

Euler Thm: $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = m f(x_1, \ldots, x_n)$

⑦ Directional Derivative

กำหนด ทิศทาง $\vec{v}$ ← เวกเตอร์ 1 หน่วย



$$D_{\vec{v}} f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\sin\theta) - f(x,y)}{h}$$

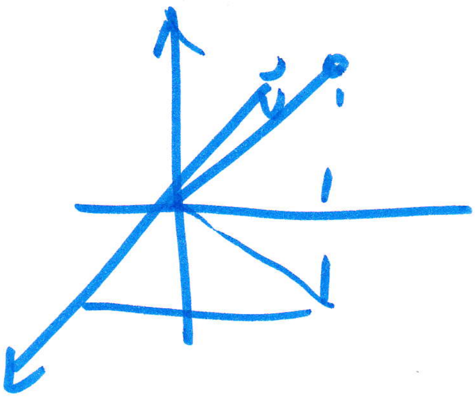
$$D_{\vec{v}} f(x,y) = \vec{v} \cdot \nabla f(x,y) \quad \text{— (*)}$$

หาดูว่า ขนาด, ทิศทางที่ชันที่สุด

$$D_{\vec{v}} f(x,y) = |\vec{v}| \cdot |\nabla f(x,y)| \cos\phi$$

3 dimensions : Directional Cosines.

$$\vec{v} = (\cos\alpha)\vec{i} + (\cos\beta)\vec{j} + (\cos\gamma)\vec{k}$$



นิยาม $D_{\vec{v}} f(x,y)$

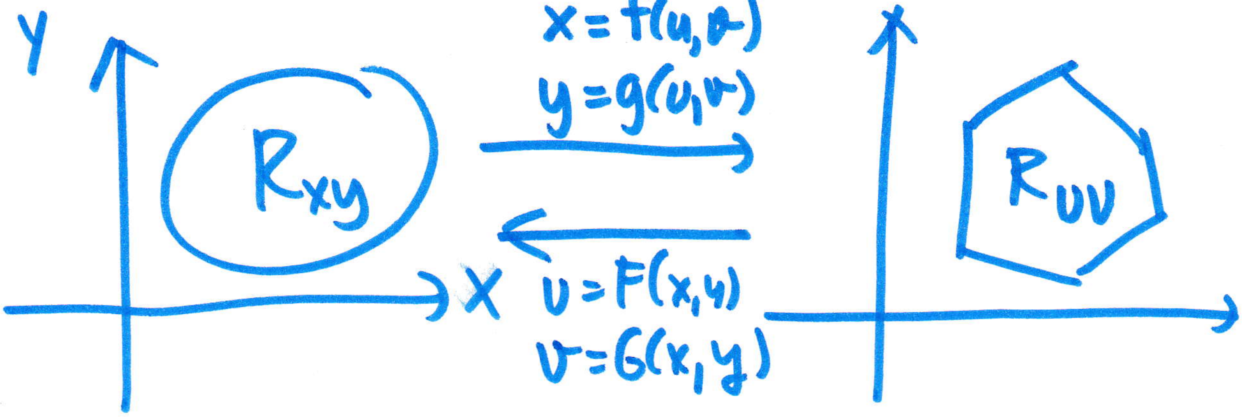
ดู Thm (*) ในทำนองคล้ายกัน. (HW)

⑧ Jacobian Transformation

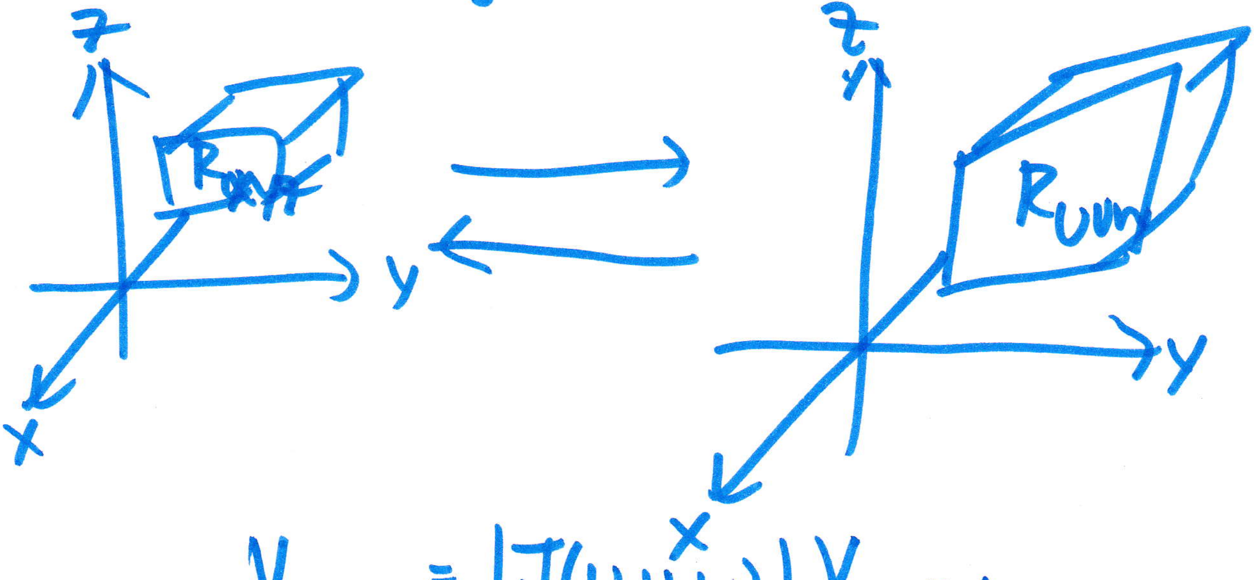
$$F(u,v),\ G(u,v)\ ;\quad J(u,v) = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

① ⇒ [illegible] implicit function

② Transformation btw 2 spaces.



Then $A_{xy} = |J(u,v)| \cdot A_{uv}$.



$$V_{xyz} = |J(u,v,w)| \cdot V_{u,v,w}.$$

③ $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)}$ ⇒ chain rule.

9 Change of Variables in multiple integrals.

$$\iint_{R_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R_{uv}} g(u,v)\cdot |J(u,v)|\,du\,dv$$

$$\iiint_{R_{xyz}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{R_{uvw}} g(u,v,w)\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$