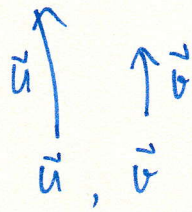
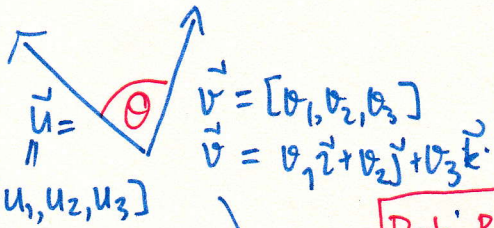


206161 Vectors



$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \exists t \text{ s.t. } \vec{u} = t \vec{v}$$



Pot' Product (scalar product)

$$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$$

$$\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{i} = [1, 0, 0] \\ \vec{j} = [0, 1, 0] \\ \vec{k} = [0, 0, 1] \end{array} \right\} \text{basis}$$

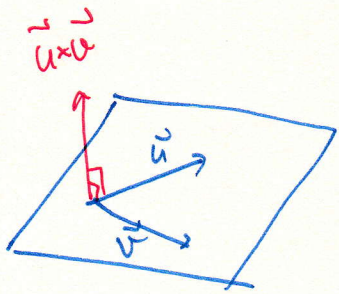
$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} > 0 &\Leftrightarrow \theta \text{ หน้แหลม } (0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 &\Leftrightarrow \theta \text{ หน้แหลม } (\frac{\pi}{2} < \theta < \pi) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 &\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Cross product

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

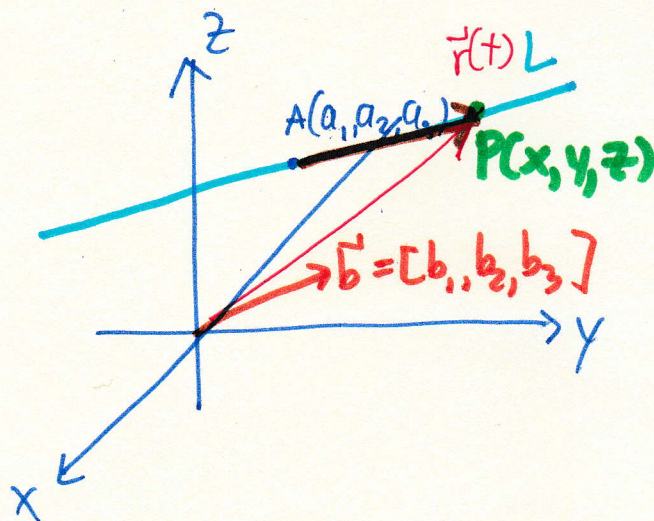
$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k}$$



① เส้นตรงใน $\mathbb{R}^3$

สมมติว่า มีจุด $A(a_1, a_2, a_3)$, เวกเตอร์ $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$

อยากได้ เส้นตรง L ที่ผ่านจุด A และทิศทางของเส้นตรงกับเวกเตอร์ $\vec{b}$



สมมติ $P(x, y, z)$ ใดๆ บนเส้นตรง L

หาเวกเตอร์ $\vec{AP} = [x - a_1, y - a_2, z - a_3]$

$$\Downarrow$$

$$\vec{AP} \parallel \vec{b}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{AP} = t \vec{b}$$

หาเวกเตอร์ $\rightarrow [x - a_1, y - a_2, z - a_3] = t[b_1, b_2, b_3]$

$$[x - a_1, y - a_2, z - a_3] = [tb_1, tb_2, tb_3]$$

$$\therefore x - a_1 = tb_1, y - a_2 = tb_2, z - a_3 = tb_3$$

หาสมการพารามิเตอร์

$$\boxed{x = a_1 + tb_1, y = a_2 + tb_2, z = a_3 + tb_3}$$

สมมติ $\vec{r}(t)$ เป็นเวกเตอร์ของตำแหน่งพารามิเตอร์ t

$$\vec{r}(t) = (a_1 + tb_1)\vec{i} + (a_2 + tb_2)\vec{j} + (a_3 + tb_3)\vec{k}$$

ทบทวนเวกเตอร์ในแคลคูลัส 1

บทที่

1

1.1 เส้นตรงในปริภูมิ $\mathbb{R}^3$

สมมติว่ามีจุด $A(a_1, a_2, a_3)$ ในปริภูมิ $\mathbb{R}^3$ หากกำหนดเวกเตอร์ $\vec{b}$ เราจะสามารถหาเส้นตรง L ที่ผ่านจุด A และมีทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์ $\vec{b}$ ได้ดังนี้

ให้จุด $P(x, y, z)$ เป็นจุดบนเส้นตรง L ดังนั้น เราต้องการสร้างเวกเตอร์ $\vec{AP}$ ที่ขนานกับเวกเตอร์ $\vec{b}$ นั่นคือ $\vec{AP} = t\vec{b}$ สำหรับจำนวนจริง t ใดๆ นั่นคือ เราได้ว่า

$$[x - a_1, y - a_2, z - a_3] = t[b_1, b_2, b_3] \quad (1.1.1)$$

ซึ่งสมการ (1.1.1) เรียกว่า สมการเวกเตอร์ หรือเราได้ว่า

$$x = a_1 + tb_1, y = a_2 + tb_2, z = a_3 + tb_3 \quad (1.1.2)$$

ซึ่งสมการ (1.1.2) เรียกว่า สมการพารามетริกของเส้นตรง L

สมมติให้ $\vec{r}(t)$ เป็นเวกเตอร์ที่บอกตำแหน่งใดๆ (ซึ่งแทนด้วยเวกเตอร์ P) จะทำให้เราได้ว่า

$$\vec{r}(t) = \vec{A} + t\vec{b} \quad (1.1.3)$$

$$= (a_1 + tb_1)\vec{i} + (a_2 + tb_2)\vec{j} + (a_3 + tb_3)\vec{k} \quad (1.1.4)$$

$$= [a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, a_3 + tb_3] \quad (1.1.5)$$

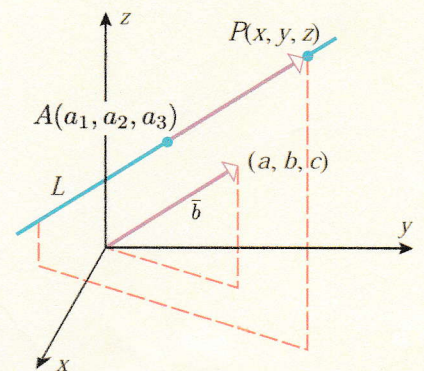


Figure 1.1. เส้นตรงในรูปเวกเตอร์ (ภาพจากหนังสือ Anton Calculus)

ตัวอย่าง 1.1.1. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.15 หน้า 53)

1. จงหาสมการพารามетริกของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(4, \frac{1}{2}, 0)$ และอยู่ในทิศ

เดียวกันกับเวกเตอร์ $\vec{b} = [0, 0, 1]$

$$\vec{AP} = [x-4, y-\frac{1}{2}, z-0] \quad \vec{AP} = t\vec{b}$$

$$\vec{b} = [0, 0, 1]$$

$$\therefore [x-4, y-\frac{1}{2}, z-0] = t[0, 0, 1]$$

$$x-4=0, y-\frac{1}{2}=0, z=t \Rightarrow x=4, y=\frac{1}{2}, z=t$$

2. จงหาสมการพารามетริกของเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(3, 2, 4)$ และ $B(3, 1, 6)$.

$$\text{หาเวกเตอร์ } \vec{AB} = [3-3, 1-2, 6-4]$$

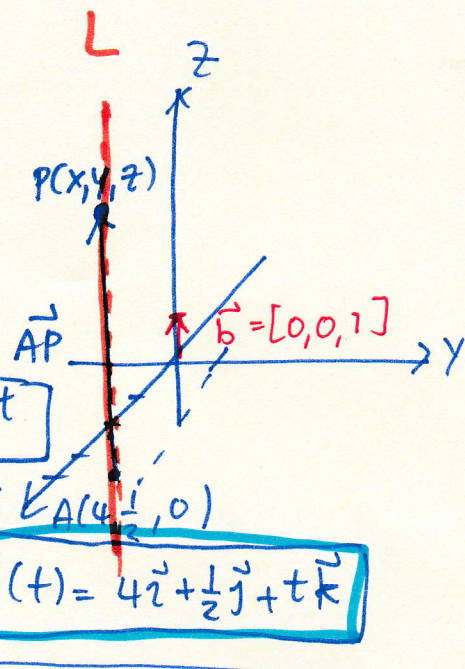
$$\vec{AB} = [0, -1, 2]$$

$$\text{เลือกจุด } A = (3, 2, 4)$$

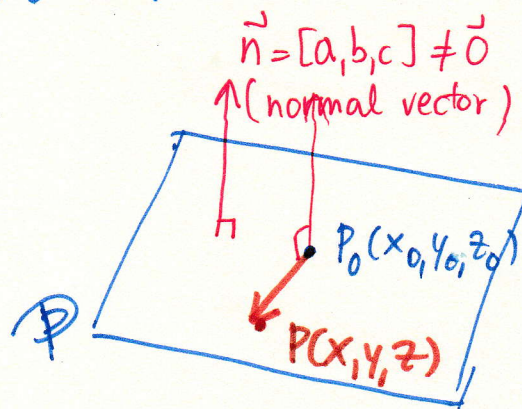
$$\text{เลือกจุด } P(x, y, z) \text{ บน } L \Rightarrow \vec{AP} \parallel \vec{AB}$$

$$\therefore [x-3, y-2, z-4] = t[0, -1, 2]$$

$$x=3, y=2-t, z=4+2t \Rightarrow \vec{r}(t) = 3\vec{i} + (2-t)\vec{j} + (4+2t)\vec{k}$$



② หาสมการระนาบ



สมมติว่า $P(x, y, z)$ เป็นจุดในระนาบ P
 เราสามารถสร้างเวกเตอร์ $\vec{P_0P}$

$$\vec{P_0P} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0]$$

เวกเตอร์ $\vec{P_0P}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{n}$ ($\vec{P_0P} \perp \vec{n}$)

$$\boxed{\vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0}$$

$$[x - x_0, y - y_0, z - z_0] \cdot [a, b, c] = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

↓
d

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

สมการของระนาบทั่วไปในรูปสมการ

Thm 1.6

$$ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow \vec{n} = [a, b, c]$$

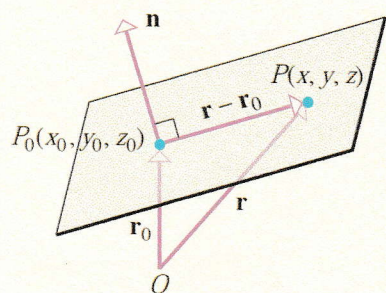


Figure 1.2. การสร้างระนาบจากเวกเตอร์ (ภาพจากหนังสือ Anton Calculus)

1.2 ระนาบในปริภูมิ $\mathbb{R}^3$

1.2.1 ระนาบที่ผ่านจุดหนึ่งจุด และตั้งฉากกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้

สมมติกำหนดจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และเวกเตอร์ $\vec{n} = [a, b, c] \neq \vec{0}$ ต้องการสร้างระนาบที่ผ่านจุด P_0 และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{n}$

สมมติว่าจุด $P(x, y, z)$ เป็นจุดใดๆ บนระนาบ ซึ่งเวกเตอร์ $\vec{P_0P}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{n}$ ดังนั้น จะได้ว่า

$$\vec{n} \cdot \vec{P_0P} = 0$$

เนื่องจาก $\vec{P_0P} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0]$ เราจึงได้ว่า

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

เรียกว่า point-normal form ของสมการระนาบ เมื่อจัดรูปและได้สมการ

$$ax + by + cz + d = 0$$

สมการดังกล่าวจะเรียกว่า รูปแบบทั่วไปของสมการระนาบ

จะเรียกเวกเตอร์ $\vec{n}$ ว่า เวกเตอร์ตั้งฉาก (normal vector)

ทฤษฎีบท 1.2.1. (เอกสาร: ทฤษฎีบท 1.6)

ถ้า a, b, c และ d เป็นค่าคงตัว และ a, b, c ไม่เป็นศูนย์หมด แล้วกราฟของสมการ $ax + by + cz + d = 0$ คือระนาบที่มีเวกเตอร์ $\vec{n} = [a, b, c]$ เป็นเวกเตอร์ตั้งฉาก

ตัวอย่าง 1.2.2. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 1.17 หน้า 31)

จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $P(2, 6, 1)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{n} = [1, 2, 4]$

$$\vec{P_0P} = [x-2, y-6, z-1], \vec{n} = [1, 2, 4]$$

$$\therefore \boxed{\vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0}$$

$$(1)(x-2) + 2(y-6) + 4(z-1) = 0$$

$$x-2 + 2y-12 + 4z-4 = 0$$

$$\boxed{x + 2y + 4z - 18 = 0}$$

ตัวอย่าง 1.2.3. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 1.18 หน้า 31)

ระนาบ $4x - y - 2z + 3 = 0$ ขนานกับระนาบ $x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z = 0$ หรือไม่

$$\downarrow P_1$$

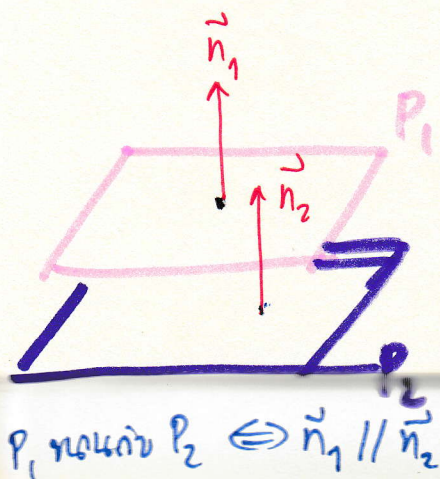
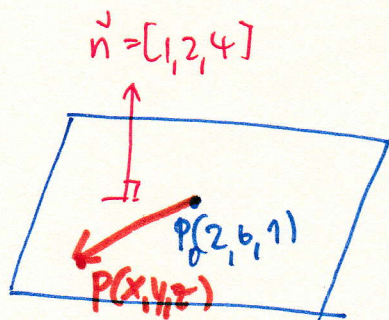
$$\vec{n}_1 = [4, -1, -2]$$

$$\text{เนื่องจาก } \vec{n}_1 = [4, -1, -2] = 4[1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}] = 4\vec{n}_2$$

$$\text{ดังนั้น } \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$$

$$\text{จึงได้ว่า } P_1 \parallel P_2$$

#



เราสามารถหาสมการระนาบได้จากเงื่อนไขต่างๆ ซึ่งอาจจะหาได้เพียงระนาบเดียว หรือมีมากมายไม่จำกัดได้ เช่น

1. ระนาบที่ผ่านจุดหนึ่ง และขนานกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ จะมีระนาบมากมายนับไม่ถ้วน
2. ระนาบที่ผ่านจุดหนึ่ง และขนานกับเวกเตอร์ทั้งสองที่ไม่ขนานกัน จะมีเพียงระนาบเดียว
3. ระนาบที่ผ่านจุด 3 จุด ที่ไม่อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน จะมีระนาบเพียงระนาบเดียว

ตัวอย่าง 1.2.4. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 1.19 หน้า 32)

จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $P_1(1, 2, -1)$, $P_2(2, 3, 1)$, $P_3(3, -1, 2)$

ท้:= $\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}$

$\vec{P_1P_2} = [2-1, 3-2, 1-(-1)] = [1, 1, 2]$

$\vec{P_1P_3} = [3-1, -1-2, 2-(-1)] = [2, -3, 3]$

ท้:= $\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix}$

ท้ = $9\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$

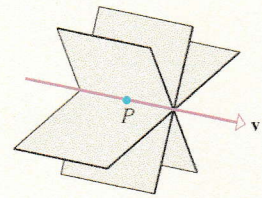
$\vec{P_1P} = [x-1, y-2, z+1] \Rightarrow \vec{P_1P} \cdot \vec{ท้} = 0$

$9(x-1) + (y-2) - 5(z+1) = 0$

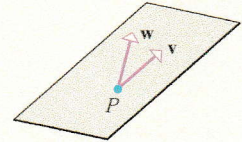
$9x + y - 5z - 16 = 0$

ตัวอย่าง 1.2.5. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.15 หน้า 53)

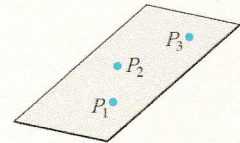
จงหาสมการเส้นตรงที่กำหนดโดยระนาบ $x + y + z = 8$ และ $2x - y + 3z = 4$



There are infinitely many planes containing P and parallel to v .



There is a unique plane through P that is parallel to both v and w .



There is a unique plane through three noncollinear points.

Figure 1.3. ลักษณะของระนาบกับเวกเตอร์ (ภาพจากหนังสือ Anton Calculus)

1.2.2 มุมระหว่างระนาบที่ตัดกัน

เมื่อมีระนาบสองระนาบตัดกัน จะเกิดมุมระหว่างระนาบ โดยที่มุมหนึ่งเป็นมุมแหลม $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ และอีกมุมหนึ่งคือมุม $180^\circ - \theta$ ดังนั้น มุมระหว่างระนาบสองระนาบสามารถพิจารณาได้จากมุมระหว่างเวกเตอร์ตั้งฉากของทั้งสองระนาบ

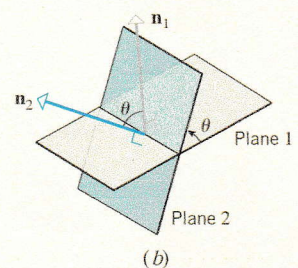
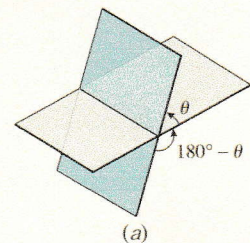


Figure 1.4. มุมระหว่างระนาบ (ภาพจากหนังสือ Anton Calculus)

ตัวอย่าง 1.2.6. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 1.20 หน้า 33)

จงหา มุมแหลม ที่เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบ $2x - 4y + 4z - 7 = 0$ และ $6x + 2y - 3z - 2 = 0$

$P_1 \Rightarrow \vec{n}_1 = [2, -4, 4]$ $P_2 \Rightarrow \vec{n}_2 = [6, 2, -3]$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (12) - 8 + 12 = -8 < 0$

$\therefore \vec{n}_1, \vec{n}_2$ ทำมุมนอกมุมภายใน

กลับทิศ $\vec{n}_2 \Rightarrow -\vec{n}_2 = [-6, -2, 3]$, $|\vec{n}_1| = \sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6$
 $|\vec{n}_2| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + 3^2} = 7$

$\vec{n}_1 \cdot (-\vec{n}_2) = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cos \theta$

$8 = 6 \cdot 7 \cos \theta$

$\cos \theta = \frac{8}{42} = \frac{4}{21} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right) \approx 79^\circ$

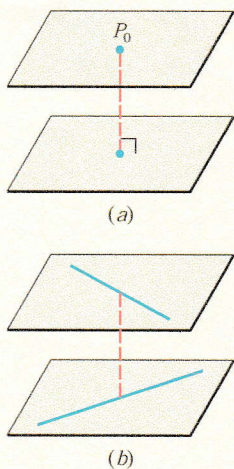


Figure 1.5. ลักษณะของระยะระหว่างจุดและระนาบ 1.2.7 (ภาพจากหนังสือ Anton Calculus)

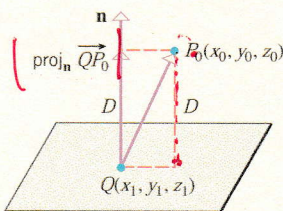


Figure 1.6. การพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.2.7 (ภาพจากหนังสือ Anton Calculus)

1.2.3 ระยะทางที่เกี่ยวข้องกับระนาบ

ในการหาระยะทางในปริภูมิสามมิติที่เกี่ยวข้องกับจุด และระนาบ เราสามารถพิจารณาการหาระยะทางได้ดังนี้

1. ระยะระหว่างจุดและระนาบ
2. ระยะระหว่างระนาบสองระนาบที่ขนานกัน
3. ระยะระหว่างเส้นไขว้ต่างระนาบ (skew line)

หมายเหตุ เส้นไขว้ต่างระนาบ คือเส้นตรงสองเส้นในปริภูมิ $\mathbb{R}^3$ ซึ่งทั้งสองเส้นไม่ตัดกัน และไม่ขนานกัน ในกรณีนี้สำหรับเส้น L_1, L_2 ที่เป็นเส้นไขว้ต่างระนาบ จะมีระนาบ P_1 และ P_2 ที่ขนานกัน

ทฤษฎีบท 1.2.7. (เอกสาร: ทฤษฎีบท 1.7)

ระยะ D ระหว่างจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และระนาบ $ax + by + cz + d = 0$ คือ

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

พิสูจน์. (เค้าโครง)

สมมติให้จุด $Q(x_1, y_1, z_1)$ เป็นจุดใดๆ บนระนาบ $ax + by + cz + d = 0$ ซึ่งมีเวกเตอร์ตั้งฉากคือ $\vec{n} = [a, b, c]$ ดังนั้น ขนาดของภาพฉาย (projection) ของเวกเตอร์ $\rightarrow QP_0$ บนเวกเตอร์ $\vec{n}$ คือระยะทาง D นั่นคือ

$$D = \left| \text{Proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{QP_0} \right| = \frac{\left| \overrightarrow{QP_0} \cdot \vec{n} \right|}{|\vec{n}|^2} = \frac{\left| \overrightarrow{QP_0} \cdot \vec{n} \right|}{|\vec{n}|}$$

จากนั้นทำการหาค่าผลคูณจุดของเวกเตอร์ $\overrightarrow{QP_0} \cdot \vec{n}$ และพิจารณาเงื่อนไขของจุด Q บนระนาบ จะได้สูตรตามต้องการ $\square$

ตัวอย่าง 1.2.8. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 1.21 หน้า 34)

จงหาระยะห่างระหว่างจุด $(1, -2, 3)$ และระนาบ $2x - 2y + z = 4$

$$2x - 2y + z - 4 = 0$$

$$\vec{n} = [2, -2, 1]$$

$$D = \frac{|2(1) + (-2)(-2) + (3)(1) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1}}$$

$$= \frac{|2 + 4 + 3 - 4|}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3} \quad \#$$

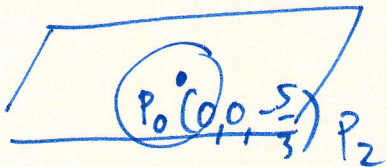
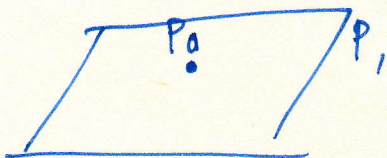
ตัวอย่าง 1.2.9. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 1.22 หน้า 34)

พิจารณาระนาบ $-2x + y + z = 0$ และระนาบ $6x - 3y - 3z = 0$

1. ^{HW} ระนาบสองระนาบขนานกันหรือไม่

2. หากขนานกัน จงหาระยะห่างระหว่างสองระนาบ

👉 มุมัน มนอ มรณนโต มรณนโต มรณนโต มรณนโต



เลือกแนวตั้งฉาก P_1 set: $x=y=0 \Rightarrow z = -\frac{5}{3}$

$$D = \frac{|(-2)(0) + (1)(0) + 1(-\frac{5}{3}) + 0|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2}}$$

$$D = \frac{5}{3\sqrt{6}}$$

#