

พิกัดสามมิติ

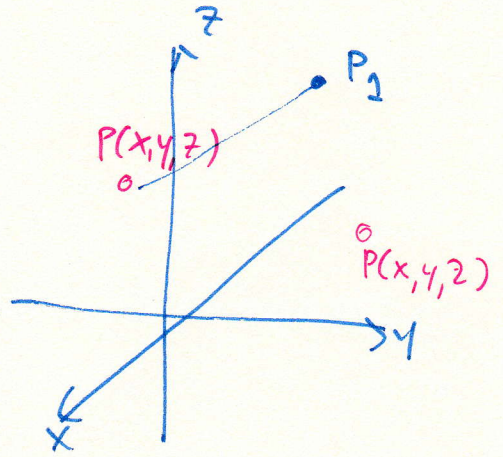
จุดในสามมิติ

$$P_1(x_1, y_1, z_1) \leftarrow \text{fixed}$$

ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใดๆ ในสามมิติ

$$f(P) = f(x, y, z) = D = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$$

พิกัดสามมิติ



พิกัดสามมิติ

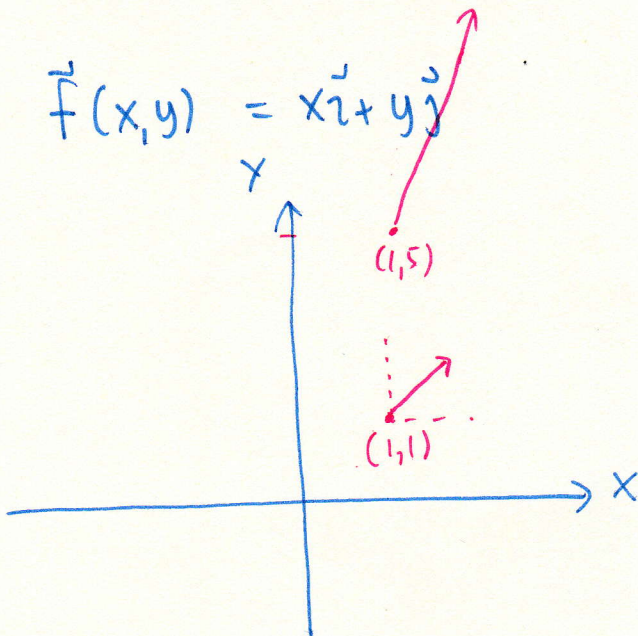
ให้จุด $P(x, y, z)$ ว่าเป็นจุดของสามมิติ จะอยู่ ณ พิกัดสามมิติที่เท่าไร

$$\vec{v}(x, y, z) = [v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z)]$$

$$= v_1(x, y, z)\vec{i} + v_2(x, y, z)\vec{j} + v_3(x, y, z)\vec{k}$$

Ex

$$\vec{f}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$$



<http://earth.nullschool.net>

$$\vec{f}(1, 1) = \vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{f}(1, 5) = \vec{i} + 5\vec{j}$$

ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์เบื้องต้น

บทที่
2

2.1 สนามสเกลาร์และสนามเวกเตอร์

นิยาม 2.1.1. (เอกสาร: นิยาม 2.1 หน้า 38)

ฟังก์ชันสเกลาร์ (scalar-valued function) คือ ฟังก์ชันที่นิยามที่แต่ละจุดของบริเวณ D ในปริภูมิสองมิติหรือสามมิติ และค่าของฟังก์ชันเป็นจำนวนจริงที่ขึ้นอยู่กับจุดนั้น (ไม่ว่าจะใช้ระบบพิกัดใด ค่าของฟังก์ชันเป็นค่าเดียวกัน)

ฟังก์ชัน f ที่เกี่ยวข้องกับแต่ละจุดใน D จะทำให้เกิดสนามของจำนวนจริง (field) มาสนามหนึ่ง เรียกว่า **สนามสเกลาร์** (scalar field)

ตัวอย่าง 2.1.1. (เอกสาร: ตัวอย่าง 2.1 หน้า 38)

ระยะระหว่างจุด $P(x, y, z)$ และจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ กำหนดโดย

$$f(P) = f(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

(ดูตัวอย่าง 2.2 - 2.6 ในเอกสารประกอบ)

นิยาม 2.1.2. (เอกสาร: นิยาม 2.2 หน้า 41)

ฟังก์ชันเวกเตอร์ (vector-valued function) $\vec{v}(P)$ คือ ฟังก์ชันที่นิยามที่แต่ละจุดของบริเวณ D ในปริภูมิสองมิติหรือสามมิติ และที่จุด P แต่ละจุดใน D มีฟังก์ชัน $\vec{v}(P)$ ที่มีค่าเป็นเวกเตอร์

จะเห็นว่าสำหรับแต่ละจุด P ใน D จะมีเวกเตอร์หนึ่งเวกเตอร์ ซึ่ง เวกเตอร์เหล่านี้จะกำหนดสนามเวกเตอร์ใน D ขึ้นมาสนามหนึ่ง เรียกว่า **สนามเวกเตอร์** (vector field)

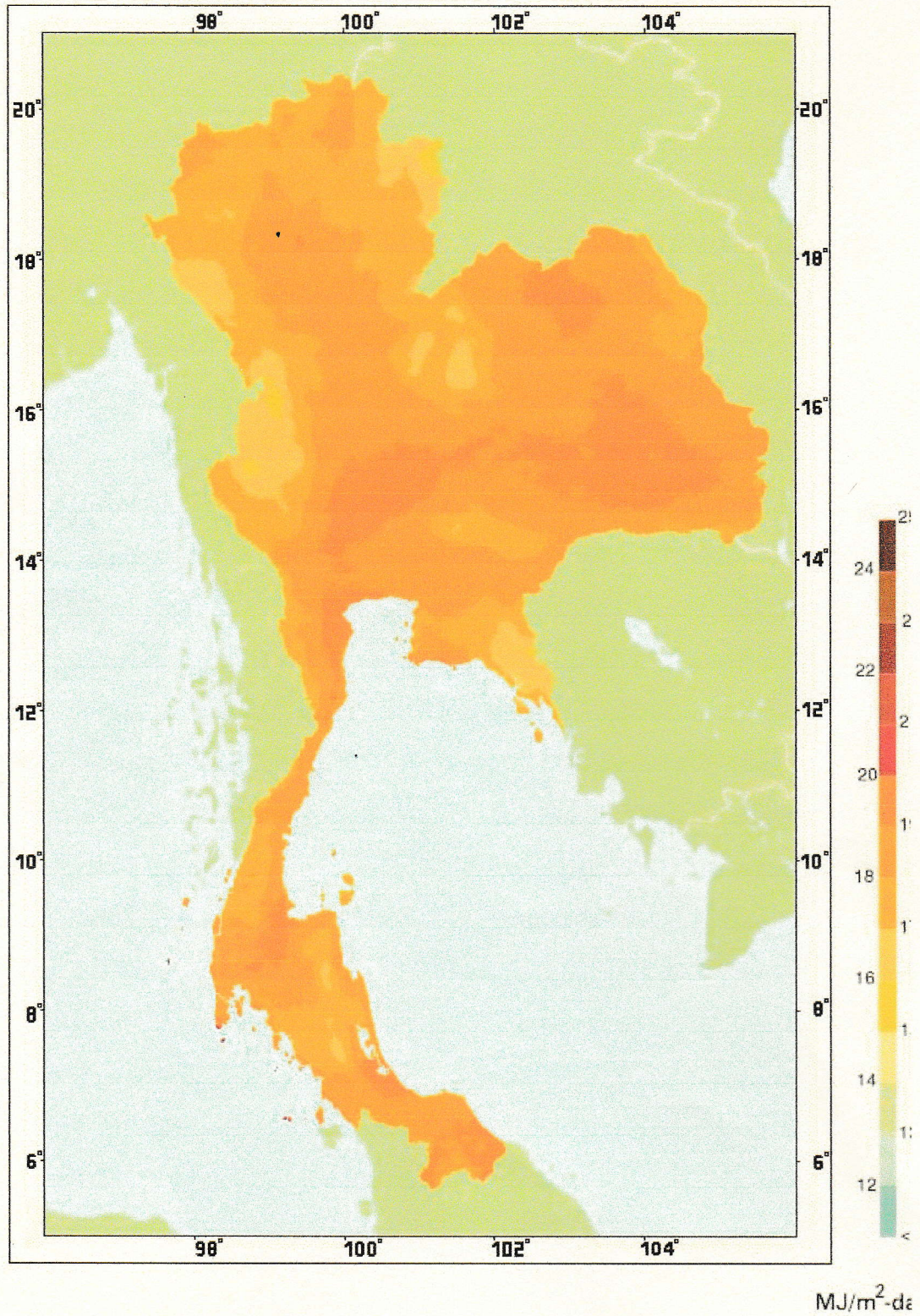
สำหรับจุด (x, y, z) จะเขียนฟังก์ชันเวกเตอร์ในเทอมของฟังก์ชันส่วนประกอบได้เป็น

$$\vec{v}(x, y, z) = [v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z)]$$

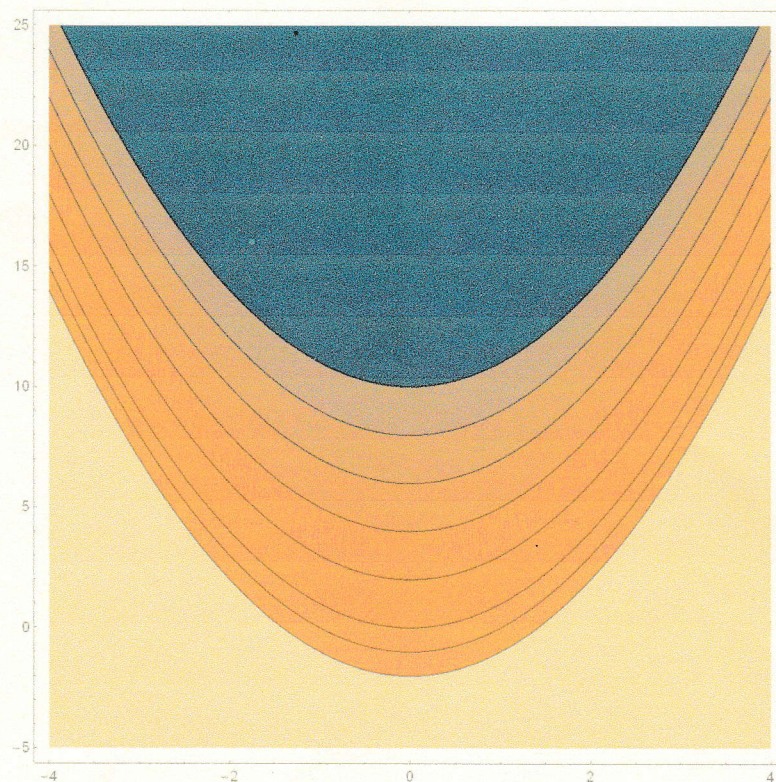
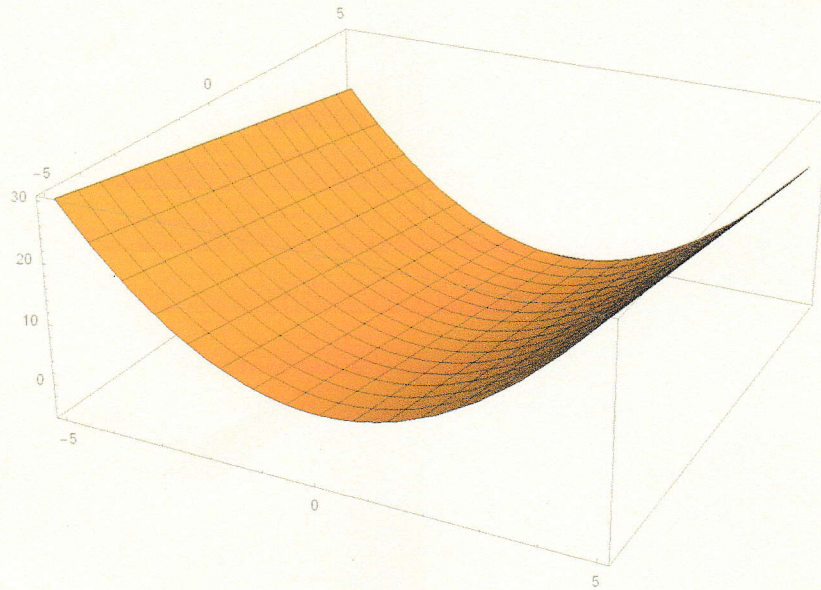
หรือ

$$\vec{v}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\vec{i} + v_2(x, y, z)\vec{j} + v_3(x, y, z)\vec{k}$$

Ex สภาพอากาศในเขตพื้นที่ภาคใต้



โค้งระดับ $T(x, y) = \text{const}$ (เส้นโค้งที่มีอุณหภูมิคงที่)
ของสนามอุณหภูมิที่กำหนดโดยฟังก์ชัน $T(x, y) = x^2 - y$



ข้อตกลง

1. ในการเขียนสนามเวกเตอร์ $\vec{v}(P)$ สำหรับแต่ละจุด P ใน D จะกำหนดให้จุดเริ่มต้นของเวกเตอร์อยู่ที่จุด P นั้นๆ เช่น $\vec{v}(P_0)$ มีจุดเริ่มต้นที่จุด P_0
2. ในการวาดสนามเวกเตอร์ ขั้นแรก ให้กำหนดจุด (x, y) บางจุด และคำนวณค่าเวกเตอร์ $\vec{f}(x, y)$ ที่จุดเหล่านั้นสำหรับแต่ละจุด (x, y)

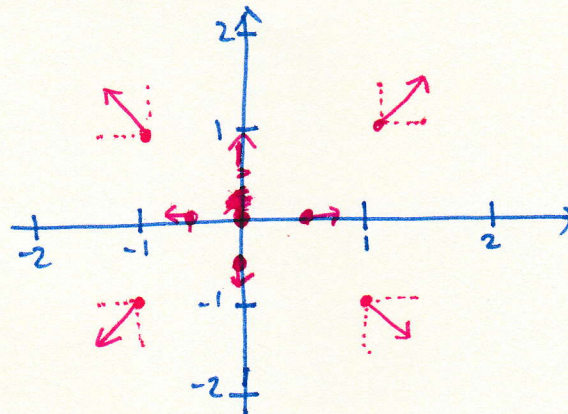
* กำหนดค่าเวกเตอร์

ตัวอย่าง 2.1.2. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.9 หน้า 43)

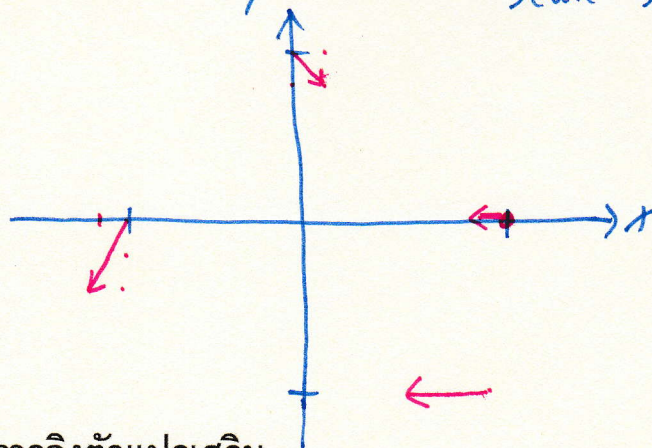
จงวาดสนามเวกเตอร์ $\vec{f}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ ในพิกัด XY

- scale vector 1 unit

(x, y)	$\vec{f}(x, y)$
$(0, 0)$	$\vec{0}$
$(1, 1)$	$\vec{i} + \vec{j}$
$(1, -1)$	$\vec{i} - \vec{j}$
$(-1, 1)$	$-\vec{i} + \vec{j}$
$(-1, -1)$	$-\vec{i} - \vec{j}$
$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}\vec{j}$
$(0, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}\vec{j}$
$(\frac{1}{2}, 0)$	$\frac{1}{2}\vec{i}$
$(-\frac{1}{2}, 0)$	$-\frac{1}{2}\vec{i}$

ตัวอย่าง 2.1.3. จงวาดสนามเวกเตอร์ $\vec{f}(x, y) = (2y - 1)\vec{i} + (x - 1)\vec{j}$ ในพิกัด XY โดยพิจารณาที่จุด $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, -1)$ Scale 3 units = $\vec{i}$

(x, y)	$\vec{f}(x, y)$
$(1, 0)$	$-\vec{i}$
$(-1, 0)$	$-\vec{i} - 2\vec{j}$
$(0, 1)$	$\vec{i} - \vec{j}$
$(1, -1)$	$-3\vec{i}$



2.2 สมการอิงตัวแปรเสริม

สมมติว่ามีวัตถุหนึ่งเคลื่อนที่บนเส้นโค้ง C ในระนาบ XY โดยที่พิกัด x และ y เป็นฟังก์ชันของเวลา t กล่าวคือ

$$x = x(t), y = y(t)$$

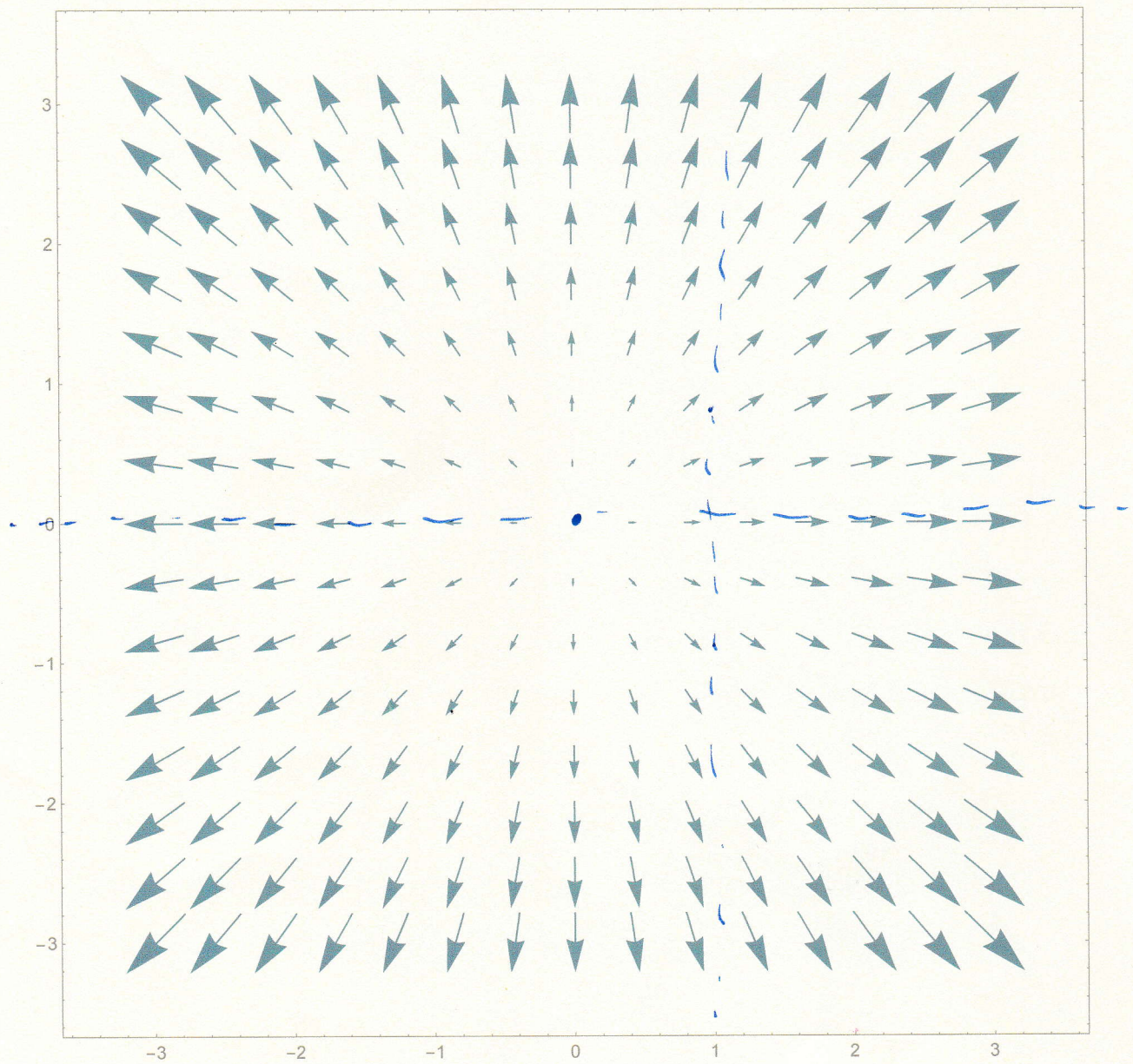
สมการดังกล่าวจะเรียกว่า **สมการอิงตัวแปรเสริม** (parametric equation) ของการเคลื่อนที่ของวัตถุ แนวเส้นโค้ง C ที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของวัตถุจะเรียกว่า **แนววิถี** (trajectory) และเรียก t ว่า **ตัวแปรเสริม** หรือ **พารามิเตอร์** (parameter)

ดังนั้น เส้นโค้ง C ดังกล่าวสามารถแทนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันเวกเตอร์ได้ คือ

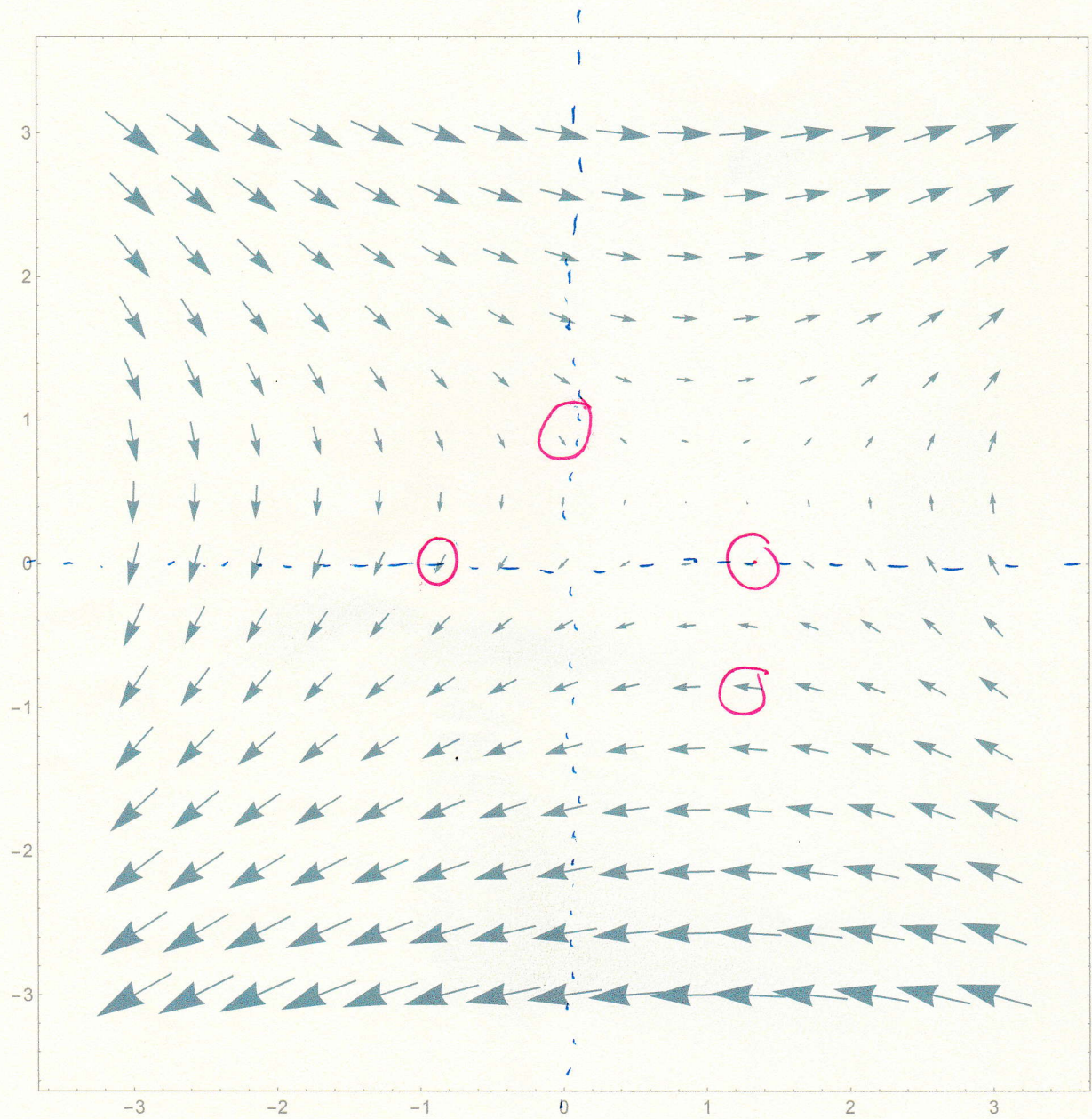
$$\vec{r}(t) = [x(t), y(t)] = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

โดยที่ $\vec{r}(t)$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งที่มีจุดปลายอยู่ที่ $(x(t), y(t))$

สนามเวกเตอร์ $\bar{f}(x, y) = x\bar{i} + y\bar{j}$

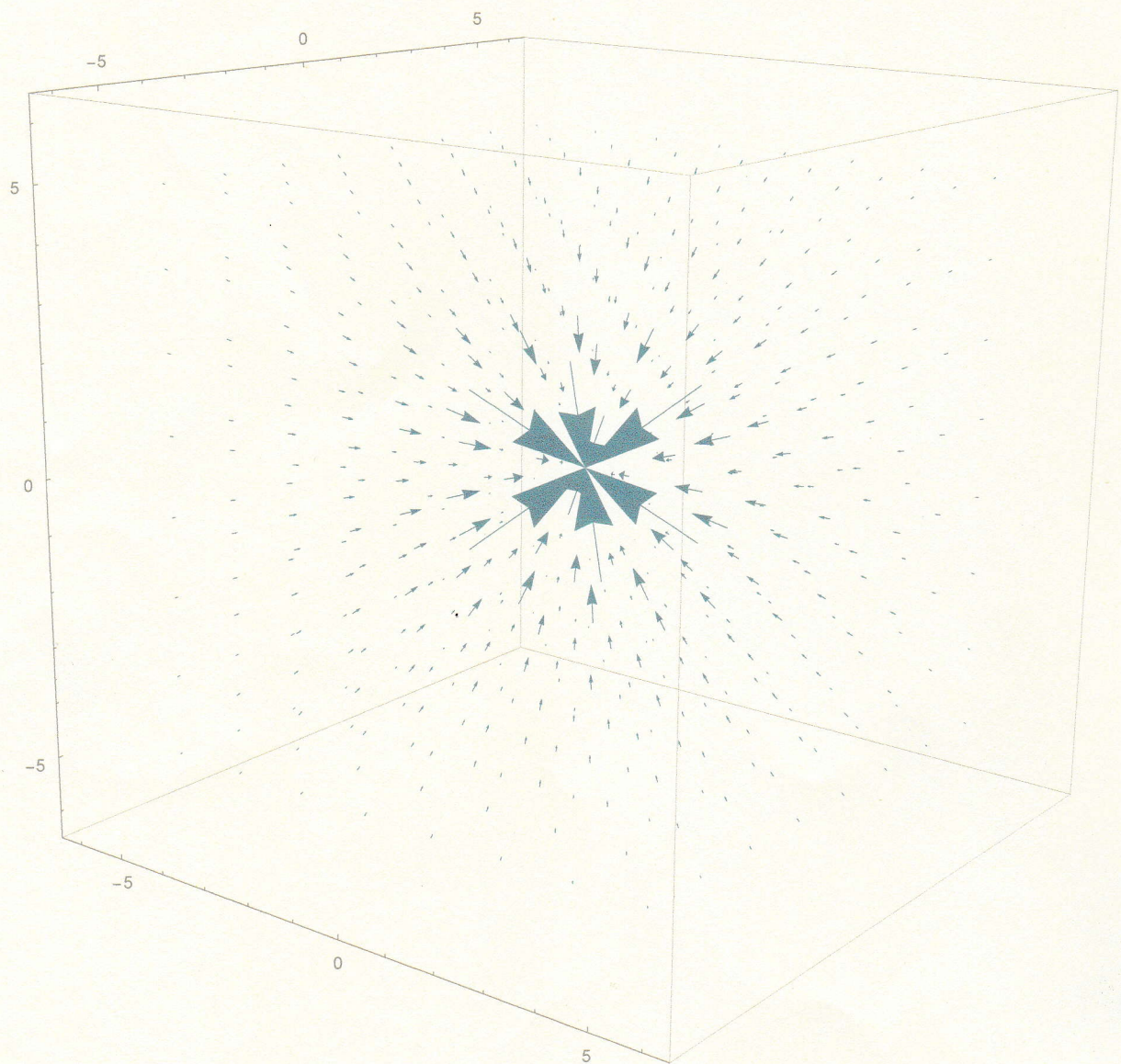


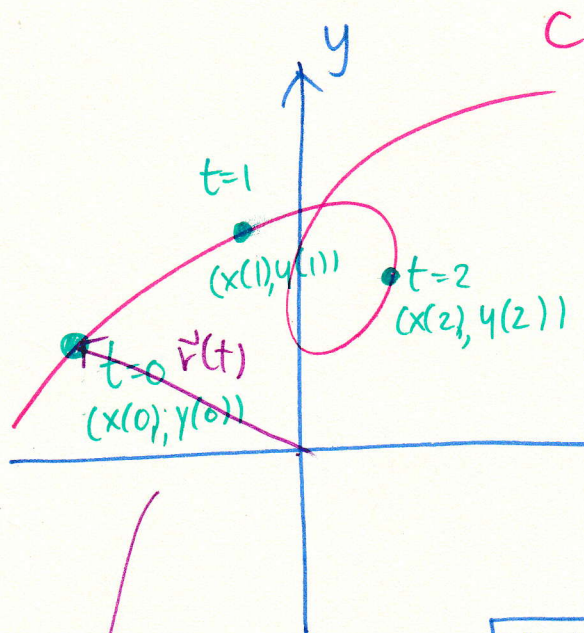
สนามเวกเตอร์ $\bar{f}(x, y) = (2y - 1)\bar{i} + (x - 1)\bar{j}$



สนามเวกเตอร์

$$\vec{f}(x, y, z) = -\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$





ณ เวลา t เราสนใจทิศทาง
วิถีได้

$$\boxed{x = x(t), y = y(t)}$$

$\therefore$ ตำแหน่งของ x, y ขึ้นอยู่กับ
ตัวแปร t

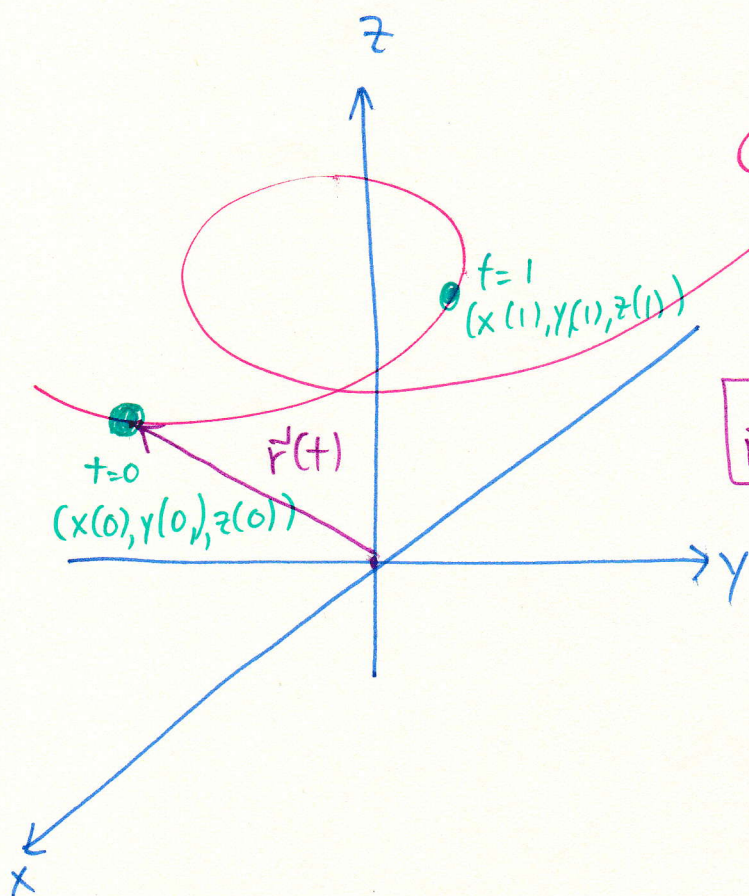
↓
พารามิเตอร์ t (ตัวแปรเสริม)

$$\boxed{x = x(t), y = y(t)}$$

สมการพารามิเตอร์ (parametric equation)
↓
สมการตัวแปรเสริม

$$\vec{r}(t) = [x(t), y(t)] = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

↑
เวกเตอร์บอกตำแหน่ง ณ เวลา t .
↓
พิกัดในเวกเตอร์ โดยตัวแปรคือ t



ณ เวลา t

$$\boxed{x = x(t), y = y(t), z = z(t)}$$



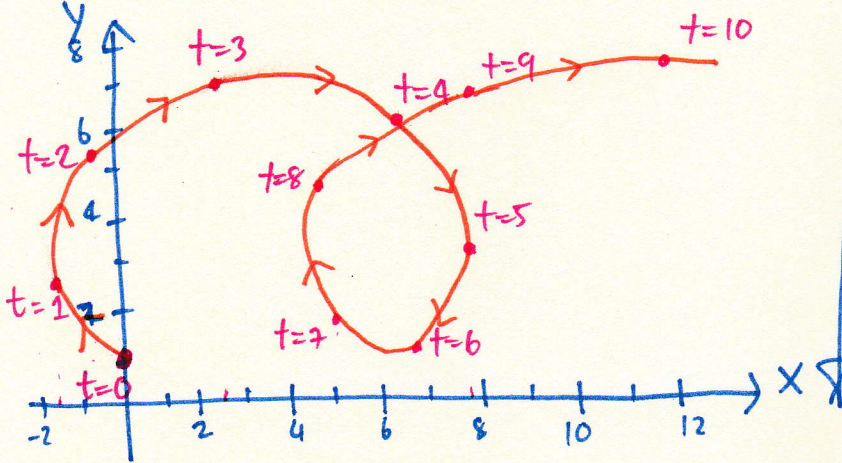
$$\boxed{\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}}$$

ตัวอย่าง 2.2.1. กำหนดสมการอิงตัวแปรเสริมของการเคลื่อนที่โดย

$$x = t - 3 \sin t, y = 4 - 3 \cos t$$

$$\vec{r}(t) = (t - 3 \sin t)\vec{i} + (-3 \cos t)\vec{j}$$

จงวาดแนววิถีในช่วงเวลา $0 \leq t \leq 10$



t	x(t)	y(t)
0	0.0	1.0
1	-1.5	2.4
2	-0.7	5.2
3	2.6	7.0
4	6.3	6.0
5	7.9	3.1
6	6.8	1.1
7	5.0	1.7
8	5.0	4.4
9	7.8	6.4
10	11.6	6.5

เราสามารถพิจารณาสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้ง ในระบบพิกัดสามมิติได้ในทำนองเดียวกัน กล่าวคือ ให้พิกัด x, y, z เป็นฟังก์ชันของเวลา t กล่าวคือ

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

ดังนั้น สมการดังกล่าวจะก่อกำเนิดแนวเดินในทิศทางเมื่อ t เพิ่มขึ้น

เมื่อพิจารณาในรูปฟังก์ชันเวกเตอร์ จะได้ว่า

$$\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

โดยที่ $\vec{r}(t)$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งที่มีจุดปลายอยู่ที่ $(x(t), y(t), z(t))$

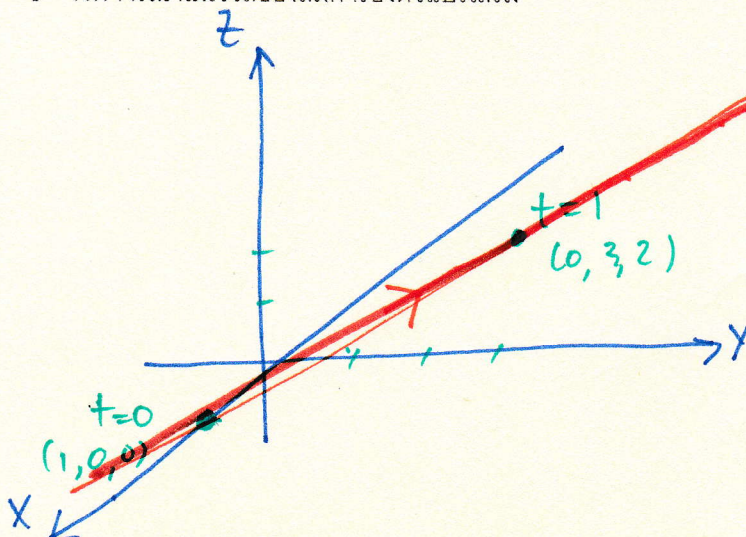
ตัวอย่าง 2.2.2. กำหนดสมการอิงตัวแปรเสริมของการเคลื่อนที่โดย

$$x = 1 - t, y = 3t, z = 2t$$

(สมการเส้นตรง)

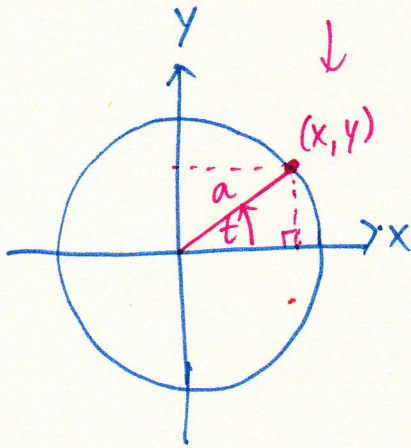
$$\vec{r}(t) = (1-t)\vec{i} + (3t)\vec{j} + (2t)\vec{k}$$

จงพิจารณาแนววิถีของสมการอิงตัวแปรเสริม



t	x(t)	y(t)	z(t)
0	1	0	0
1	0	3	2
2	-1	6	4
⋮	⋮	⋮	⋮

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= a \sin t \end{aligned}$$



2.2.1 สมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้งบางชนิด

ตัวอย่าง 2.2.3. (เอกสาร: หน้า 49)

สมการวงกลม $x^2 + y^2 = a^2$

กำหนด $x = a \cos t, y = a \sin t$ ได้ฟังก์ชันเวกเตอร์

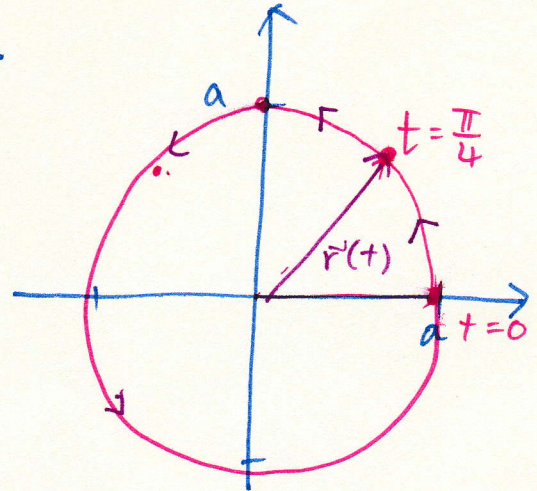
$$\vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j}$$

เมื่อ $0 \leq t \leq 2\pi$

ถ้ากำหนด $x = a \cos t$
 $y = a \sin t$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (a \cos t)^2 + (a \sin t)^2 \\ &= a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t \\ &= a^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= a^2 \end{aligned}$$

t	$\vec{r}'(t)$
0	$a\vec{i} + 0\vec{j}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}a\vec{j}$
$\frac{\pi}{2}$	$0\vec{i} + a\vec{j}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}a\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}a\vec{j}$
π	$-a\vec{i} + 0\vec{j}$



ตัวอย่าง 2.2.4. (เอกสาร: หน้า 50)

สมการวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

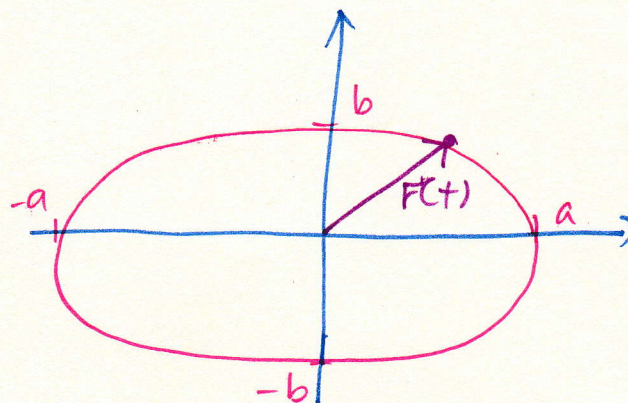
กำหนด $x = a \cos t, y = b \sin t$ ได้ฟังก์ชันเวกเตอร์

$$\vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + b \sin t \vec{j}$$

เมื่อ $0 \leq t \leq 2\pi$

ถ้ากำหนด $x = a \cos t$
 $y = b \sin t$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(a \cos t)^2}{a^2} + \frac{(b \sin t)^2}{b^2} = 1$$



ตัวอย่าง 2.2.5. (เอกสาร: หน้า 50)

ฮีลิคัลกอล หรือเกลียวกอล (Helix)

กำหนดฟังก์ชันเวกเตอร์

$$\vec{r}(t) = \underbrace{a \cos t}_{x(t)} \vec{i} + \underbrace{a \sin t}_{y(t)} \vec{j} + \underbrace{ct}_{z(t)} \vec{k}$$

เมื่อ $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\therefore 0 \leq z \leq 2c\pi$$

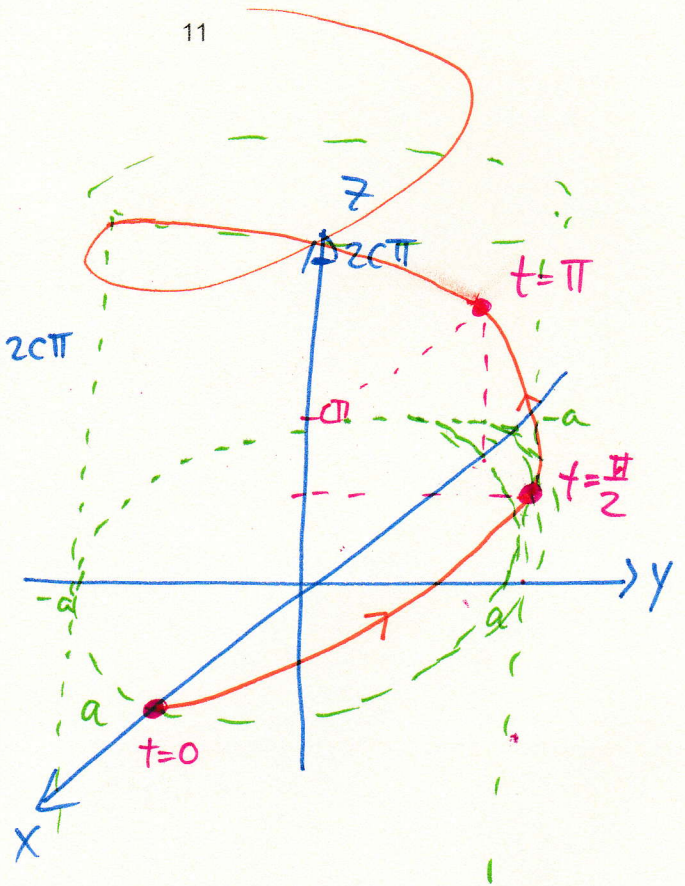
กำหนด $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = ct$

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t = a^2$$

$t=0$ $\left. \begin{array}{l} x = a \cos 0 = a \\ y = a \sin 0 = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \vec{r}(t) = a\vec{i}$

$t = \frac{\pi}{2}$ $\left. \begin{array}{l} x = a \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ y = a \sin \frac{\pi}{2} = a \\ z = \frac{\pi}{2}c \end{array} \right\} \vec{r}(t) = a\vec{j} + \frac{\pi}{2}c\vec{k}$

$t = \pi$ $\left. \begin{array}{l} x = a \cos \pi = -a \\ y = a \sin \pi = 0 \\ z = \pi c \end{array} \right\} \vec{r}(t) = -a\vec{i} + \pi c\vec{k}$



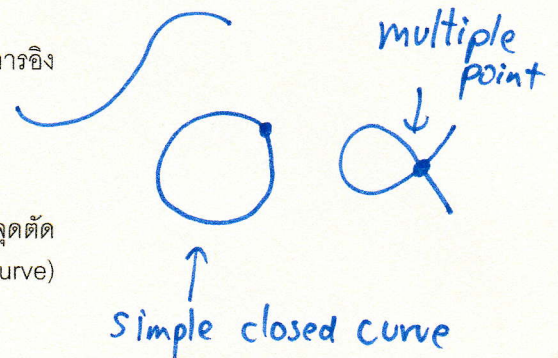
จะเห็นว่า สมการเส้นตรงในปริภูมิสามมิติที่ได้กล่าวในส่วนแรกนั้น อยู่ในรูปสมการอิงตัวแปรเสริมเช่นกัน (ดูตัวอย่างในบทที่ 1 ประกอบกับเอกสารหน้าที่ 52-53)

2.2.2 เส้นโค้งเชิงเดียว (simple curve)

เส้นโค้งเส้นหนึ่งอาจมีจุดตัดในตัวเอง หรือจุดสัมผัสในตัวเอง เรียกจุดตัดดังกล่าวว่า จุดตัดซ้อน (multiple point) และเรียกเส้นโค้งที่ไม่มีจุดตัดซ้อนว่า เส้นโค้งเชิงเดียว (simple curve)

2.2.3 การเปลี่ยนตัวแปรเสริม

สมมติกำหนดเส้นโค้ง C มาให้เส้นโค้งหนึ่ง การแทนเส้นโค้งดังกล่าวในรูปสมการอิงตัวแปรเสริมอาจทำได้หลายแบบ โดยมีเงื่อนไขสำคัญคือ การเลือกนั้นจะต้องให้ค่า t ทั้งหมด



ตัวอย่าง 2.2.6. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.16 หน้า 54)

จงหาการแทนอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $z = -\frac{1}{2}$