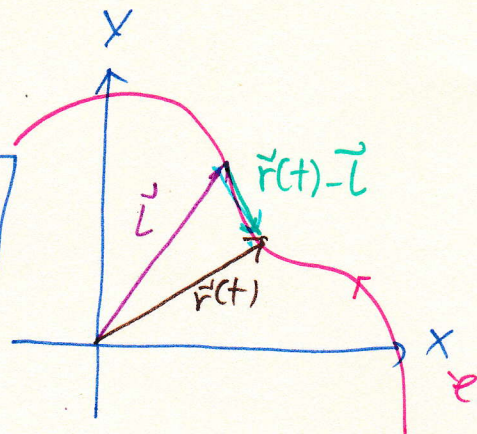
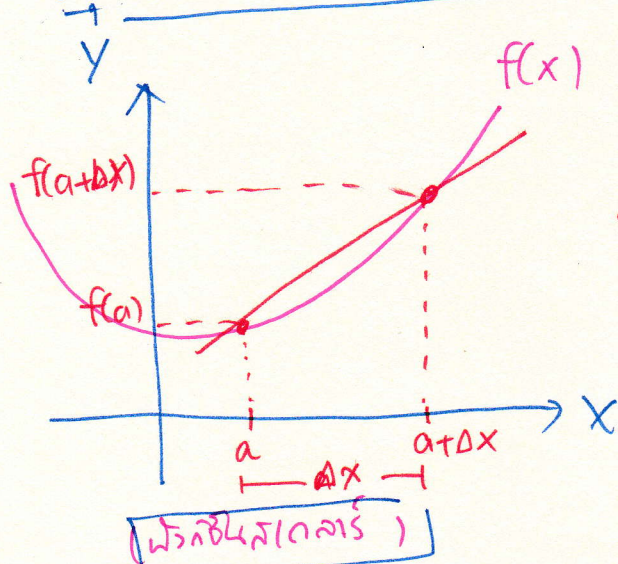


$$\vec{r}(t) = r_1(t)\vec{i} + r_2(t)\vec{j} + r_3(t)\vec{k}$$

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{L} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow a} |\vec{r}(t) - \vec{L}| = 0$$



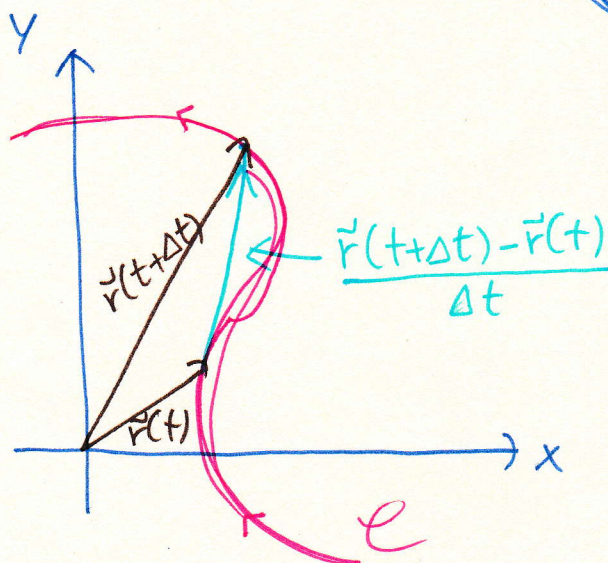
อนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์



$$\text{slope} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$\text{slope at } x=a: f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

same idea



อนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

ถ้าให้ $\Delta t \rightarrow 0$ จะได้ว่า
เวกเตอร์ $\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ มีขนาดเล็กลง
ใกล้กับเวกเตอร์ C ที่คือ $\vec{r}'(t)$

ตัวอย่าง 2.3.4. กำหนดให้ $\vec{F}(t) = t^2\vec{i} + \vec{j} - \sin t\vec{k}$ และ $\vec{G}(t) = t\vec{i} + \frac{1}{t}\vec{j} + 5\vec{k}$ แล้ว จงหา

1. $(\vec{F} + \vec{G})(t)$
2. $(\vec{F} \cdot \vec{G})(t)$
3. $(\vec{F} \times \vec{G})(t)$

2.3.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

นิยาม 2.3.3. ให้ $\vec{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ จะเรียกว่าฟังก์ชัน $\vec{r}(t)$ มีอนุพันธ์ที่จุด t ถ้าลิมิต

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

หาค่าได้ และเรียกเวกเตอร์ $\vec{r}'(t)$ ว่า อนุพันธ์ของ $\vec{r}(t)$

จะเห็นว่า $\vec{r}(t)$ ทำให้เกิดเส้นโค้ง C สมมติว่า อนุพันธ์ $\vec{r}'(t)$ มีค่าไม่เป็นศูนย์ที่ t ถ้าเวกเตอร์ $\vec{r}'(t)$ มีจุดเริ่มต้นที่จุดปลายเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ แล้ว $\vec{r}'(t)$ จะสัมผัสเส้นโค้ง C ในทิศทางที่พารามิเตอร์ t เพิ่มขึ้น (เราจะอธิบายความหมายในภายหลังอีกครั้ง)

ทฤษฎีบท 2.3.5. ถ้า $\vec{r}(t) = r_1(t)\vec{i} + r_2(t)\vec{j} + r_3(t)\vec{k} = [r_1(t), r_2(t), r_3(t)]$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์แล้ว $\vec{r}(t)$ จะหาอนุพันธ์ได้ที่ t ก็ต่อเมื่อ แต่ละองค์ประกอบของฟังก์ชัน $r_1(t), r_2(t), r_3(t)$ หาอนุพันธ์ได้ที่ t นั่นคือ

$$\vec{r}'_m(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_m(t + \Delta t) - \vec{r}_m(t)}{\Delta t} \quad ; m = 1, 2, 3$$

กล่าวคือ $\vec{r}'(t) = [r'_1(t), r'_2(t), r'_3(t)]$

ดิฟฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ คือ ดิฟแต่ละ component ใดตัว

ตัวอย่าง 2.3.6. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.11 หน้า 45)

กำหนดให้ $\vec{r}(t) = \sin t\vec{i} - 3\cos t\vec{j} + 2t^2\vec{k}$ แล้ว จงหา $\vec{r}'(t)$ และ $\vec{r}'(0)$

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= \left[\frac{d}{dt}(\sin t), \frac{d}{dt}(-3\cos t), \frac{d}{dt}(2t^2) \right] \\ &= [\cos t, 3\sin t, 4t] \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{r}'(t) = \cos t\vec{i} + 3\sin t\vec{j} + 4t\vec{k}.$$

$$\vec{r}'(0) = \vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{i}.$$

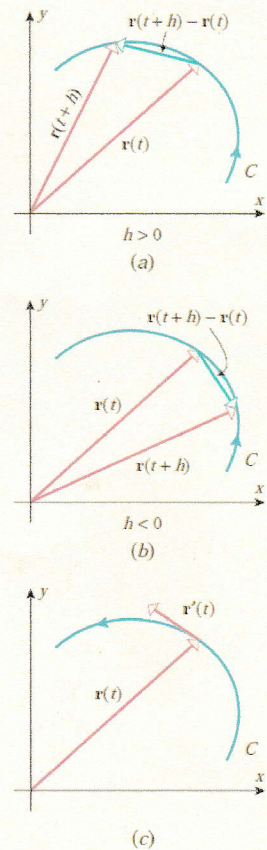


Figure 2.3. ความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์ (ภาพจากหนังสือ Anton Calculus)

ตัวอย่าง 2.3.7. กำหนดให้ $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + e^t\vec{j} - (2\cos \pi t)\vec{k}$ แล้ว จงหา $\vec{r}'(t)$, $\vec{r}''(t)$

$$\vec{r}'(t) = 2t\vec{i} + e^t\vec{j} + 2\sin \pi t \vec{k}$$

$$\vec{r}''(t) = 2\vec{i} + e^t\vec{j} + 2\pi^2 \cos \pi t \vec{k}$$

ทฤษฎีบท 2.3.8. ให้ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ และ f เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ ได้ว่า

$$1. (c\vec{v})' = c\vec{v}' \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

$$2. (f\vec{u})' = f\vec{u}' + f'\vec{u}$$

$$3. (\vec{u} + \vec{v})' = \vec{u}' + \vec{v}'$$

$$4. (\vec{u} \cdot \vec{v})' = \vec{u}' \cdot \vec{v} + \vec{v}' \cdot \vec{u} = \vec{u}' \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}'$$

$$5. (\vec{u} \times \vec{v})' = \vec{u}' \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v}'$$

$$6. [\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})]' = [\vec{u}' \cdot (\vec{v} \times \vec{w})] + [\vec{u} \cdot (\vec{v}' \times \vec{w})] + [\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}')] =$$

ตัวอย่าง 2.3.9. (เอกสาร: ตัวอย่าง 2.12 หน้า 46)

กำหนดให้ $\vec{u} = t\vec{i} + 2t^2\vec{k}$, $\vec{v} = t^3\vec{j} + t\vec{k}$ และ $\vec{w} = \vec{i} + t\vec{j} + t^2\vec{k}$ แล้ว

$$\text{จงหา } \frac{d}{dt}[(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}]$$

วิธีตรง: $\vec{u} + \vec{v} = (t)\vec{i} + t^3\vec{j} + (2t^2+t)\vec{k}$
 $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = [t\vec{i} + t^3\vec{j} + (2t^2+t)\vec{k}] \cdot [\vec{i} + t\vec{j} + t^2\vec{k}]$

$$= t + t^4 + 2t^4 + t^3 = 3t^4 + t^3 + t$$

$$\frac{d}{dt}[(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}] = \frac{d}{dt}(3t^4 + t^3 + t) = 12t^3 + 3t^2 + 1$$

วิธีตรง $\frac{d}{dt}[(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}] = (\vec{u} + \vec{v}) \frac{d}{dt}(\vec{w}) + \frac{d}{dt}(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$
 $= [t\vec{i} + t^3\vec{j} + (2t^2+t)\vec{k}] \cdot [\vec{j} + 2t\vec{k}] +$
 $[t\vec{i} + 3t^3\vec{j} + (4t+t)\vec{k}] \cdot [\vec{i} + t\vec{j} + t^2\vec{k}]$
 $= (0 + t^3 + 4t^3 + 2t^2) + (1 + 3t^3 + 4t^3 + t^2)$
 $= 12t^3 + 3t^2 + 1 \quad \#$

แบบฝึกหัด. 1. ให้ $f(t) = t^2 + 2t + 3$, $\vec{F}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} - 3\vec{k}$ และ $\vec{G} = t(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ แล้ว จงหา

$$(a) [f(t)\vec{F}(t)]'$$

$$(b) [\vec{F}(t) + \vec{G}(t)]'$$

$$(c) [\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)]'$$

$$(d) [\vec{F}(t) \times \vec{G}(t)]'$$

2. ถ้า $\vec{F}(t) = e^{2t}\vec{i} + e^{3t}\vec{j}$ แล้ว จงแสดงว่า $\vec{F}''(t) = -5\vec{F}'(t) + 6\vec{F}(t)$

2.3.3 อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันเวกเตอร์

สมมติให้ $\vec{r}$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ของ n ตัวแปรคือ $t_1, \dots, t_n$ โดยที่ส่วนประกอบ r_1, r_2 และ r_3 ของเวกเตอร์ $\vec{r}$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ $t_1, \dots, t_n$ ได้ แล้วอนุพันธ์ย่อยของ $\vec{r}$ เทียบกับ t_m เขียนแทนด้วย $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t_m}$ จะเป็นฟังก์ชันในรูป

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t_m} = \frac{\partial r_1}{\partial t_m} \vec{i} + \frac{\partial r_2}{\partial t_m} \vec{j} + \frac{\partial r_3}{\partial t_m} \vec{k}$$

และอนุพันธ์อันดับสองของ $\vec{r}$ เทียบกับ t_m และ t_l ตามลำดับ เขียนแทนด้วย $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t_l \partial t_m}$ จะเป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ในรูป

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t_l \partial t_m} = \frac{\partial^2 r_1}{\partial t_l \partial t_m} \vec{i} + \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_l \partial t_m} \vec{j} + \frac{\partial^2 r_3}{\partial t_l \partial t_m} \vec{k}$$

ตัวอย่าง 2.3.10. (เอกสาร: ตัวอย่าง 2.13 หน้า 47)

กำหนด $\vec{f}(x, y, z) = z\vec{i} + y \sin x \vec{j} + e^y \vec{k}$ จงหา $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial y}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial z}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} (z) \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial x} (y \sin x) \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} (e^y) \right) \vec{k} \\ &= y \cos x \vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} &= \left(\frac{\partial}{\partial y} (z) \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y} (y \sin x) \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial y} (e^y) \right) \vec{k} \\ &= \sin x \vec{j} + e^y \vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{f}}{\partial z} &= \left(\frac{\partial}{\partial z} (z) \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} (y \sin x) \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z} (e^y) \right) \vec{k} \\ &= \vec{i}. \end{aligned}$$

#

ตัวอย่าง 2.3.11. กำหนด $\vec{r}(t_1, t_2) = a \cos t_1 \vec{i} + a \sin t_2 \vec{j} + t_2 \vec{k}$

จงหา $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial t_2}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t_1 \partial t_2}$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t_1} = -a \sin t_1 \vec{i}$$

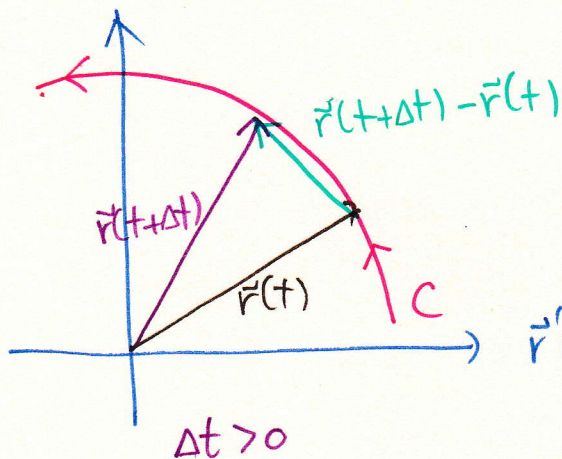
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t_2} = a \cos t_2 \vec{j} + \vec{k}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t_2} \right) = \frac{\partial}{\partial t_1} (a \cos t_2 \vec{j} + \vec{k}) = \vec{0}$$

#

การหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์

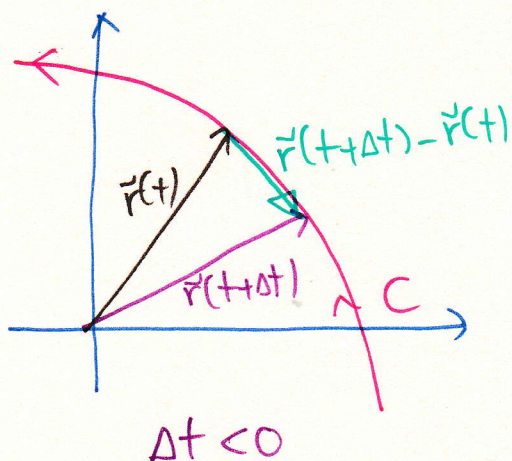
①



$\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ เวกเตอร์ที่ t ไปยัง $t+\Delta t$.
 $\Rightarrow \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$ เวกเตอร์โดยเฉลี่ย.

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

②



$\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ เวกเตอร์ตรงข้ามกับทิศทางที่ t ไปยัง $t+\Delta t$.
 $\Rightarrow$ เมื่อ $\Delta t < 0$ จะได้ว่า
 เวกเตอร์ $\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$ เวกเตอร์ที่
 พากลับมาที่ t นั่นเอง

ถ้ามีเส้นโค้งในระนาบหรือในอวกาศ $\vec{r}(t)$ คือ
 เวกเตอร์ที่ชี้จากจุดกำเนิดไปยังจุดที่เคลื่อนที่โดย $\vec{r}(t)$
 โดยที่จุดเคลื่อนที่อยู่ที่จุด $\vec{r}(t)$

เวกเตอร์นี้ชี้ชื่อว่า เวกเตอร์สัมผัส: $\boxed{\vec{r}'(t)}$
 (tangent vector)

$\therefore$ เวกเตอร์สัมผัสหน่วย $\vec{u}(t) = \frac{1}{|\vec{r}'(t)|} \vec{r}'(t)$
 (unit tangent vector)

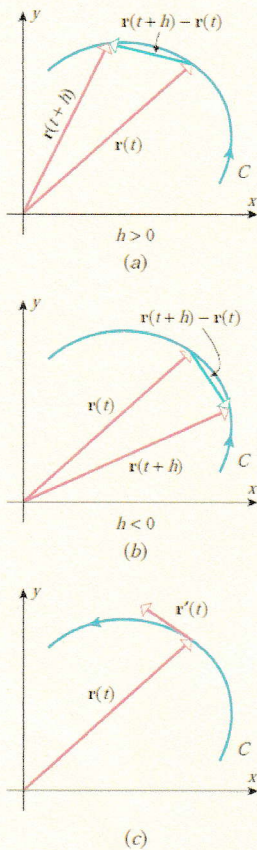


Figure 2.4. ความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์ (ภาพจากหนังสือ Anton Calculus)

2.4 เวกเตอร์สัมผัสและความยาวส่วนโค้ง

2.4.1 เวกเตอร์สัมผัส

จากนิยามเส้นสัมผัสต่อเส้นโค้ง C ณ จุด A คือเส้นตรงที่มีความชันคือลิมิตของเส้นตัดกราฟ AB เมื่อ B เคลื่อนที่เข้าหาจุดนั้น

สมมติว่าเส้นโค้ง C แทนด้วยฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ ที่หาอนุพันธ์ได้และอนุพันธ์มีความต่อเนื่อง เมื่อ t เป็นตัวแปรเสริม

ถ้าให้ A เป็นจุดที่เวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ อยู่ในตำแหน่ง ณ เวลา t และ B เป็นจุดที่เวกเตอร์ $\vec{r}(t + \Delta t)$ อยู่ในตำแหน่ง ณ เวลา $t + \Delta t$ ดังนั้น เส้นตรง L ที่ผ่านจุด A และ B จะมีทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์ $\frac{1}{\Delta(t)} [\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)]$

เนื่องจากอนุพันธ์ของ $\vec{r}(t)$ เป็นเวกเตอร์ที่กำหนดโดย

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta(t)} [\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)]$$

ซึ่งจะเห็นว่า ถ้า $\vec{r}(t)$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์แล้ว เวกเตอร์นี้จะมีทิศทางเดียวกันกับเส้นสัมผัส C ที่จุด A และชี้ไปในทิศทางที่เพิ่มขึ้นของค่า t ดังนั้น ทิศทางของเวกเตอร์สัมผัสนี้จะขึ้นอยู่กับทิศทางของ C

เรียกเวกเตอร์ $\vec{r}'$ ว่า เวกเตอร์สัมผัส (tangent vector) ของเส้น C ที่จุด A และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\vec{r}'$ กำหนดโดย $\vec{u}$ คือ

$$\vec{u}(t) = \frac{1}{|\vec{r}'(t)|} \vec{r}'(t)$$

เรียก $\vec{u}$ ว่า เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย (unit tangent vector) ต่อเส้น C ที่จุด A

ตัวอย่าง 2.4.1. (เอกสาร: ตัวอย่าง 2.22 หน้า 60)

กำหนด $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$ จงหาเวกเตอร์สัมผัส $\vec{r}'(t)$ และเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย $\vec{u}(t)$ ของเส้นโค้ง C ที่กำหนดโดย $\vec{r}(t)$

หาเวกเตอร์สัมผัส. $\vec{r}'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j}$

เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย $\vec{u}(t) = \frac{1}{|\vec{r}'(t)|} \cdot \vec{r}'(t)$

(จงหา $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(1)^2 + (2t)^2} = \sqrt{1+4t^2}$)

$\therefore \vec{u}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \cdot (\vec{i} + 2t\vec{j})$ #

ตัวอย่าง 2.4.2. (เอกสาร: ตัวอย่าง 2.23 หน้า 60)

กำหนด $\vec{r}(t) = 2\cos t \vec{i} + 2\sin t \vec{j} + t\vec{k}$ จงหาเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย ของเส้นโค้ง C ที่กำหนดโดย $\vec{r}(t)$ ณ จุด $(2, 0, 2\pi)$

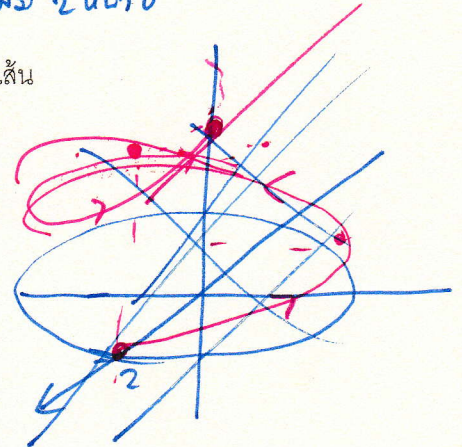
Helix กลม รัศมี 2 หน่วย

เวกเตอร์สัมผัส: $\vec{r}'(t) = -2\sin t \vec{i} + 2\cos t \vec{j} + \vec{k}$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

$\therefore$ เวกเตอร์สัมผัสทั้งโดย หักพหุคูณ t ด้วย
หน่วยไม่

$$\vec{u}(t) = \frac{1}{3}(-2\sin t)\vec{i} + (2\cos t)\vec{j} + \vec{k}$$



2.4.2 สมการของเส้นสัมผัสในรูปเวกเตอร์

ให้ C เป็นเส้นโค้งที่แทนด้วยเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ และ A เป็นจุดใดๆ บนเส้น C ถ้า B เป็นจุดจุดหนึ่งบนเส้นสัมผัส C ที่จุด A โดยมีเวกเตอร์ $\vec{q}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งแล้ว $\vec{q}$ จะเป็นผลบวกของเวกเตอร์ $\vec{r}$ และเวกเตอร์ในทิศทางของเส้นสัมผัส

ดังนั้น การแทนแบบอิงตัวแปรเสริมของเส้นสัมผัส จะอยู่ในรูป

$$\vec{q}(w) = \vec{r} + w\vec{r}'$$

เมื่อ $\vec{r}$ และ $\vec{r}'$ ขึ้นอยู่กับจุด A และ w เป็นตัวแปรเสริมที่มีค่าเป็นจำนวนจริง

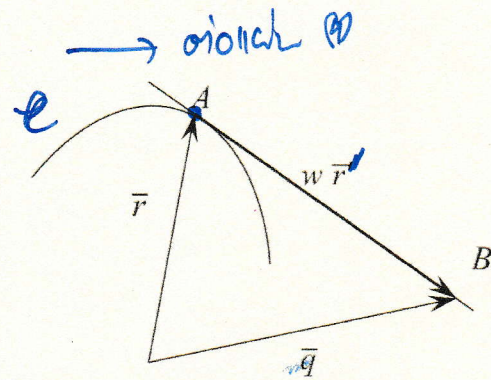


Figure 2.5. เส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง

ตัวอย่าง 2.4.3. (เอกสาร: ตัวอย่าง 2.24 หน้า 61)

จงหาสมการในรูปเวกเตอร์ของเส้นสัมผัสวงรี $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ที่จุด $P(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

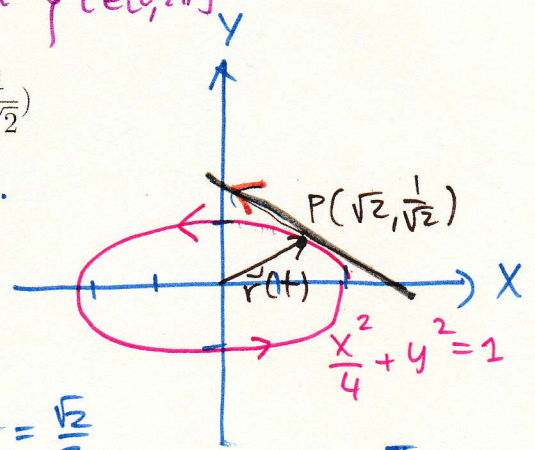
$$\vec{r}(t) = (2\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j} ; t \in [0, 2\pi]$$

เวกเตอร์สัมผัส $\vec{r}'(t)$ (ที่จุด P)

$$\vec{r}'(t) = -2\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}$$

ที่จุด $P(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ พหุคูณ t คืออะไร?

$$\begin{cases} \sqrt{2} = 2\cos t \\ \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin t = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$



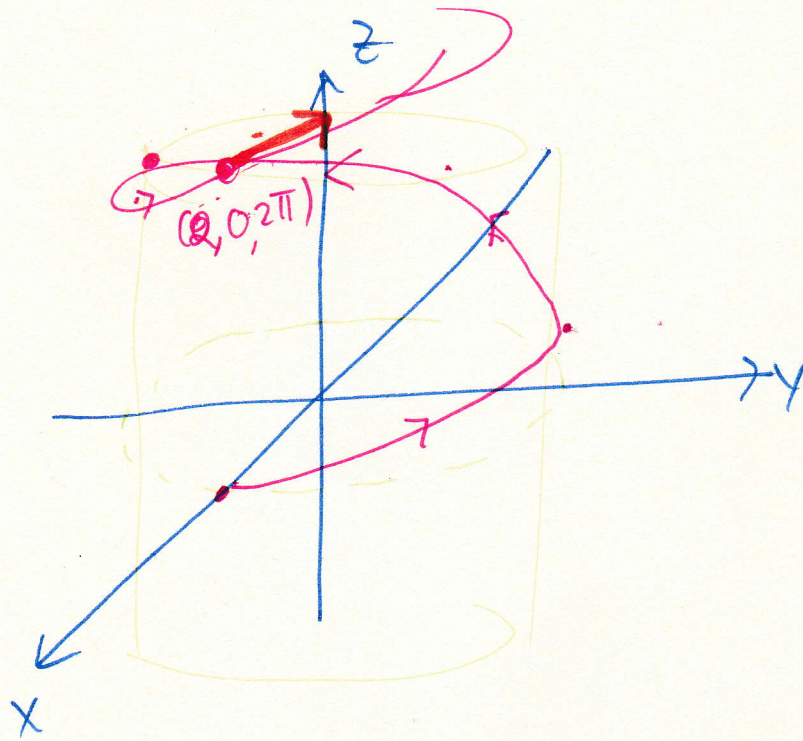
$$\vec{r}(\frac{\pi}{4}) = 2\cos \frac{\pi}{4} \vec{i} + \sin \frac{\pi}{4} \vec{j} = \sqrt{2} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j}$$

$$\vec{r}'(\frac{\pi}{4}) = -2\sin \frac{\pi}{4} \vec{i} + \cos \frac{\pi}{4} \vec{j} = -\sqrt{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$$

$$\therefore \vec{q}(w) = \vec{r} + w\vec{r}' \quad (w \text{ คือพหุคูณ})$$

$$= (\sqrt{2} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j}) + (-\sqrt{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}) w$$

$$= \sqrt{2}(1-w) \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+w) \vec{j} \quad \#$$



หาค่า $(2, 0, 2\pi)$ แทนค่าในสมการ t คือ

$$\vec{r}(t) = \underline{2\cos t} \vec{i} + \underline{2\sin t} \vec{j} + \underline{t} \vec{k}$$

$$x = 2\cos t = 2$$

$$y = 2\sin t = 0$$

$$z = \boxed{t = 2\pi}$$

$\therefore$ หาค่า $(2, 0, 2\pi)$ t คือ 2π

$$\therefore \vec{u}(2\pi) = \frac{1}{3} [(-2\sin 2\pi) \vec{i} + (2\cos 2\pi) \vec{j} + \vec{k}]$$

$$= \frac{1}{3} [2\vec{j} + \vec{k}]$$

#