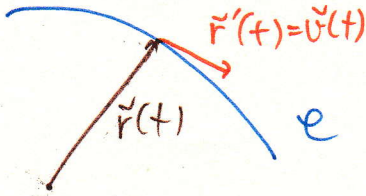


- **เส้นทางการไหล (pathline)** คือเส้นที่แสดงทางเดินของอนุภาคของของไหลแต่ละตัวที่เคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง
- **สายกระแส (streamline)** คือเส้นที่ลากสัมผัสกับเวกเตอร์ความเร็วของอนุภาคของของไหลในสนามความเร็วในขณะนั้น และจากนิยามดังกล่าวทำให้ไม่มีการไหลผ่าน streamline

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการประยุกต์ในด้านกลศาสตร์ของไหลให้นักศึกษาศึกษาตัวอย่างดังกล่าวด้วยตนเอง



$\vec{r}(t)$
 diff ↓ ↑ integrate
 $\vec{v}(t)$
 diff ↓ ↑ integrate
 $\vec{a}(t)$

ตัวอย่าง 2.5.3. (เอกสาร: ตัวอย่าง 2.30 หน้า 69)

เมื่อพิจารณาสนามความเร็วสนามหนึ่งมีความเร็วเป็น $\vec{v} = -2xi + 2yj$ เมตร/วินาที จงหาสมการของ streamline และจงวาดเส้น streamline ที่ลากผ่านจุด $(x, y) = (1, 1)$ และจงหาตำแหน่งของอนุภาคที่เวลา $t = 4$ วินาที ถ้าที่เวลา $t = 0$ อนุภาคอยู่ที่จุด $(1, 1)$

ตัวอย่าง 2.5.4. (เอกสาร: ตัวอย่าง 2.31 หน้า 71)

จงแสดงว่า ถ้า $\vec{v}(t)$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ที่มีขนาดคงที่แล้ว อนุพันธ์ของ $\vec{v}(t)$ จะเป็นเวกเตอร์ศูนย์ หรือเป็นเวกเตอร์ตั้งฉากต่อ $\vec{v}(t)$

$$\text{สมมติว่า } |\vec{v}(t)| = c \Rightarrow \sqrt{\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)} = c$$

$$\text{เราจะพบว่า } \frac{d}{dt}(\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)) = \vec{v}(t) \cdot \vec{v}'(t) + \vec{v}'(t) \cdot \vec{v}(t) = 2\vec{v}(t) \cdot \vec{v}'(t).$$

$$\text{จาก } \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) = c^2 \text{ คงที่}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}[\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)] = 2\vec{v}(t) \cdot \vec{v}'(t) = 0$$

$$\therefore \vec{v}'(t) = 0 \text{ หรือ } \vec{v}'(t) \perp \vec{v}(t) \quad \#$$

2.5.2 ความเร่งตามแนวสัมผัสและความเร่งในแนวตั้งฉาก

เนื่องจากนิยามของความเร่ง คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว นั่นคือ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{u}(s) \frac{ds}{dt}$$

เมื่อ $\vec{u}(s)$ คือเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยต่อ C ดังนั้น เมื่อหาอนุพันธ์อีกครั้ง จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\vec{u}(s) \frac{ds}{dt} \right] = \vec{u}(s) \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d}{dt} (\vec{u}(s)) \\ &= \vec{u}(s) \cdot \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{u}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{u}}{ds} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \vec{u}(s) \frac{d^2s}{dt^2} \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

ความเร่งในแนวตั้งฉาก ความเร่งในแนวสัมผัส

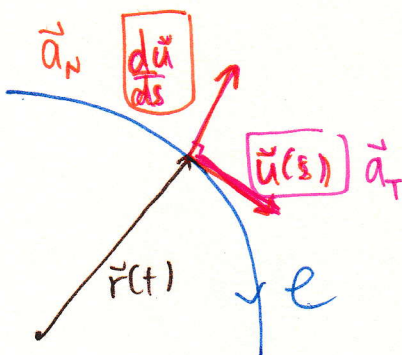
เนื่องจาก $\vec{u}(s)$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสต่อ C มีขนาดคงที่ และเนื่องจาก $\frac{d\vec{u}}{ds}$ ตั้งฉากต่อ $\vec{u}(s)$ ดังนั้น สมการ (2.5.1) จะแยกออกเป็นสองส่วน คือ

1. ส่วนประกอบในแนวตั้งฉาก $\frac{d\vec{u}}{ds} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$ เรียกว่า ความเร่งในแนวตั้งฉาก แทน

$$\text{ด้วย } \vec{a}_N \text{ เมื่อ } \vec{u}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds}$$

2. ส่วนประกอบในแนวสัมผัส $\vec{u}(s) \frac{d^2s}{dt^2}$ เรียกว่า ความเร่งในแนวสัมผัส แทนด้วย $\vec{a}_T$

$$\text{ดังนั้น } \vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T = \frac{d\vec{u}}{ds} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \vec{u}(s) \frac{d^2s}{dt^2}$$



$$\vec{u}(t) = \frac{1}{|\vec{r}'(t)|} \vec{r}'(t)$$

↓
ถ้า parametrize ด้วย
ความยาวส่วนโค้ง

$$\vec{u}(s) = \vec{r}'(s)$$

ตัวอย่าง 2.5.5. (เอกสาร: ตัวอย่าง 2.32 หน้า 72)

จงหาความเร่งในแนวสัมผัส และความเร่งในแนวตั้งฉากของการเคลื่อนที่ กำหนดโดย

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} - t^2\vec{j};$$

①๓ $\vec{a}_T = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}(t)) = \frac{d}{dt}(\vec{r}'(t))$

$$= \frac{\vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t)|} \frac{ds}{dt} = \frac{\vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t)|} \frac{d}{dt}(\sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)})$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\vec{r}'(\tilde{t}) \cdot \vec{r}'(\tilde{t})} d\tilde{t}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^t \sqrt{\vec{r}'(\tilde{t}) \cdot \vec{r}'(\tilde{t})} d\tilde{t}$$

FTC

$$= \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)}$$

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} - 2t\vec{j} \Rightarrow |\vec{r}'(t)| = \sqrt{1 + (-2t)^2} = \sqrt{1 + 4t^2}$$

$$\therefore \vec{a}_T = \frac{\vec{i} - 2t\vec{j}}{\sqrt{1 + 4t^2}} \frac{d}{dt} \sqrt{1 + 4t^2} = \frac{\vec{i} - 2t\vec{j}}{\sqrt{1 + 4t^2}} \cdot \frac{4t}{\sqrt{1 + 4t^2}} = \left(\frac{4t}{1 + 4t^2} \right) (\vec{i} - 2t\vec{j}). \text{ so } \textcircled{๓}$$

ให้ C เป็นเส้นโค้ง ซึ่งแทนการเคลื่อนที่ของวัตถุ กำหนดโดย

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

เมื่อ t แทนเวลา และ $t \geq 0$ ถ้าเวกเตอร์ความเร็ว $\vec{v}(t) \neq \vec{0}$ และเวกเตอร์ความเร่ง $\vec{a}(t) \neq \vec{0}$ แล้ว เวกเตอร์ความเร่ง $\vec{a}(t)$ สามารถเขียนได้ในรูป $\vec{a}(t) = \vec{a}_N(t) + \vec{a}_T(t)$ ดังภาพ 2.9

ดังนั้น จากภาพ 2.9 จะเห็นว่า $\vec{a}_T(t)$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{v}(t)$ นั่นคือ $\vec{a}_T = \text{Proj}_{\vec{v}} \vec{a}$ ดังนั้น

$$\vec{a}_T = \text{Proj}_{\vec{v}} \vec{a} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \vec{v} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \right) \vec{v}$$

$$\text{และ } \vec{a}_N(t) = \vec{a}(t) - \vec{a}_T(t)$$

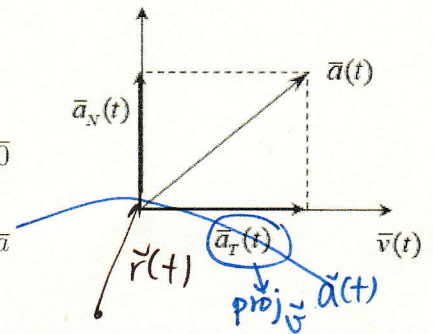


Figure 2.9. เวกเตอร์ความเร่งในรูปเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน

ตัวอย่าง 2.5.6. (เอกสาร: ตัวอย่าง 2.33 หน้า 73)

จงหาความเร่งในแนวสัมผัส และความเร่งในแนวตั้งฉากของการเคลื่อนที่ กำหนดโดย

$$\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} - \sin t\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = -\sin t\vec{i} - \cos t\vec{j}$$

$$\vec{a}(t) = -\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (-\sin t)^2 + (-\cos t)^2 = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = (-\sin t)(-\cos t) + (-\cos t)(\sin t) = 0$$

$$\therefore \vec{a}_T = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \right) \vec{v} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{a}_N = \vec{a} - \vec{a}_T = \vec{a} = -\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} \quad \#$$



การหาเวกเตอร์ใน. $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} - t^2\vec{j}$$

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} - 2t\vec{j}$$

$$\vec{r}''(t) = -2\vec{j} \quad (\vec{a}(t))$$

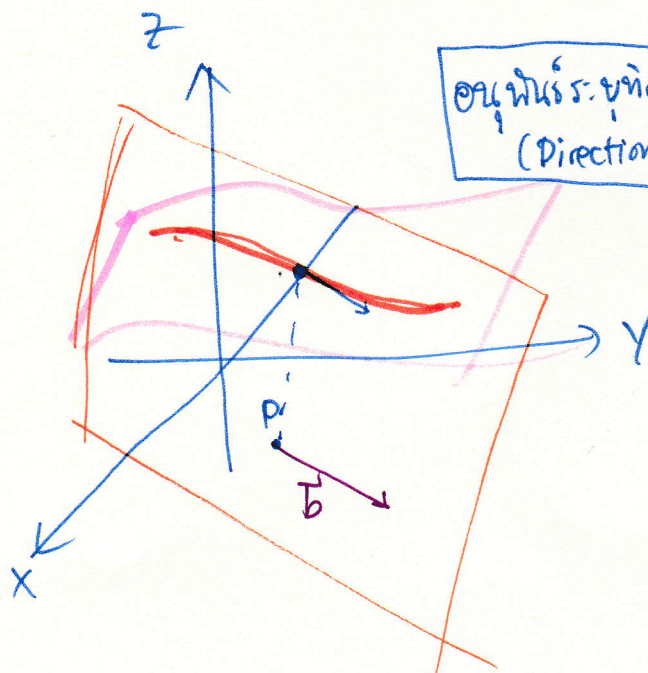
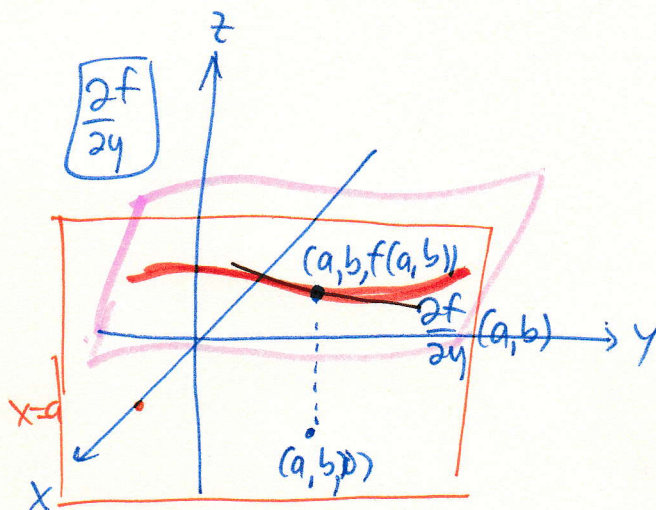
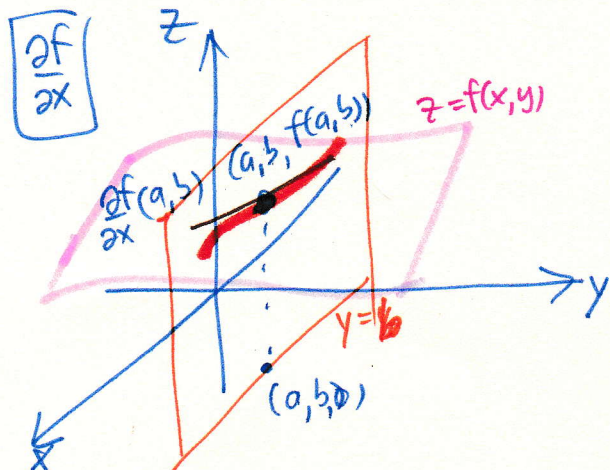
$$\vec{a}_N = \vec{a} - \vec{a}_T$$

$$= -2\vec{j} - \left(\frac{4t}{1+4t^2} \right) (\vec{i} - 2t\vec{j})$$

$$= \left(-\frac{4t}{1+4t^2} \right) \vec{i} + \left(-2 + \frac{8t^2}{1+4t^2} \right) \vec{j} \quad \#$$

$$f(P) = f(x, y, z) \rightarrow \text{or } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

อนุพันธ์ 2 ชนิด $f(x, y)$



อนุพันธ์: อนุพันธ์
(Directional derivative)

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}; \quad s > 0, \quad |\vec{b}| = 1$$

$$= \vec{P}_0 + s\vec{b}$$

$$D_{\vec{b}} f = \frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{ds}$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] \cdot \left[\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{ds}$$

$$f(x, y, z) = f(x(s), y(s), z(s))$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] \cdot \vec{b}$$

$$\vec{r}'(s) = x'(s)\vec{i} + y'(s)\vec{j} + z'(s)\vec{k} = \vec{r}'(s)$$

$$\vec{r}(s) = \vec{P}_0 + s\vec{b} \Rightarrow \vec{r}'(s) = \vec{b}$$

ทิศทาง

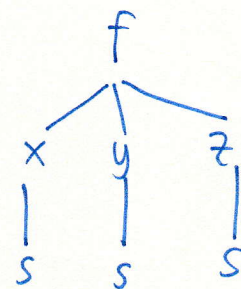
grad f
(gradient of f)

ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับ ฟังก์ชันหลายตัวแปร

บทที่
3

3.1 เกรเดียนต์ของสนามสเกลาร์

พิจารณาสนามสเกลาร์ที่กำหนดโดย $f(P) = f(x, y, z)$ จะเห็นว่า อนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ในทิศทางของแกน x, y และ z ตามลำดับ เพื่อขยายแนวคิดนี้สู่ทิศทางใดๆ เราจึงจะพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ในทิศทางที่นอกเหนือจากทิศดังกล่าว



3.1.1 อนุพันธ์ระบุทิศทาง

เพื่อกำหนดอนุพันธ์ระบุทิศทาง เราจะกำหนดจุด P ในปริภูมิสามมิติมาหนึ่งจุด พร้อมทิศทาง $\vec{b}$ ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่ P สมมติให้ C เป็นเส้นตรงที่ลากจากจุด P และมีทิศทาง $\vec{b}$ และให้จุด Q เป็นอีกจุดหนึ่งบน C ที่อยู่ห่างจากจุด P เป็นระยะ s ถ้าลิมิต

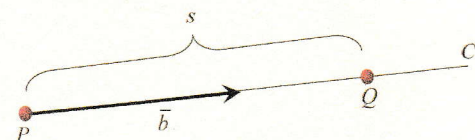


Figure 3.1. อนุพันธ์ระบุทิศทาง $D_{\vec{b}}f$

หาค่าได้ เราจะเรียกลิมิตนี้ว่า อนุพันธ์ระบุทิศทาง (directional derivative) ของ f ที่จุด P ในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{b}$ เขียนแทนด้วย $D_{\vec{b}}f$ หรือ $\frac{df}{ds}$ นั่นคือ

$$D_{\vec{b}}f = \frac{df}{ds} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(Q) - f(P)}{s}$$

จะเห็นว่า การหาอนุพันธ์ด้วยนิยามดังกล่าวทำได้ค่อนข้างยาก เพื่อให้เราสามารถพิจารณาการหาอนุพันธ์ตามทิศทางดังกล่าวได้ง่ายขึ้น เราจะพิจารณาอนุพันธ์ระบุทิศทางในรูปของอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ f ที่จุด P ดังนี้ สมมติให้ P มีเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{P}_0$ และมีเวกเตอร์ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่บอกทิศทาง ดังนั้น เส้น C จะแทนได้โดย

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k} = \vec{P}_0 + s\vec{b}; s > 0, |\vec{b}| = 1$$

ดังนั้น $D_{\vec{b}}f = \frac{df}{ds}$ จะเป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x(s), y(s), z(s))$ เทียบกับความยาวส่วนโค้ง s ของ C

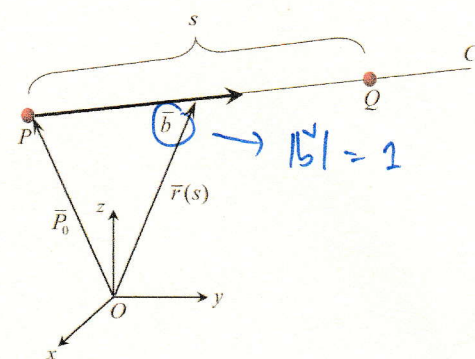


Figure 3.2. อนุพันธ์ระบุทิศทาง

สมมติว่า f มีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งที่ต่อเนื่อง โดยใช้กฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} D_{\vec{b}}f &= \frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{ds} \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] \cdot \left[\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right] \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\vec{r}'(s) = x'(s)\vec{i} + y'(s)\vec{j} + z'(s)\vec{k} = \vec{b}$ จะได้ว่า

$$D_{\vec{b}}f = \vec{b} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right]$$

นิยาม 3.1.1. จะเรียกเวกเตอร์ $\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$ ว่า **เกรเดียนต์ (Gradient)** ของ f เขียนแทนด้วย $\text{grad} f$ นั่นคือ

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

และนิยามตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (อ่านว่า nabla หรือ del) โดย

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

ดังนั้น จะเห็นว่า

$$D_{\vec{b}}f = \vec{b} \cdot \text{grad} f = \vec{b} \cdot \nabla f$$

โดยที่ $|\vec{b}| = 1$



หมายเหตุ. หากเวกเตอร์ที่ชี้ทิศทาง ไม่เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ต้องทำเวกเตอร์นั้นให้กลายเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยเสียก่อน

ตัวอย่าง 3.1.1. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.34 หน้า 77)

จงหาเกรเดียนต์ และอนุพันธ์ระดับทิศทางของ $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ ที่จุด $P(2, 1, 3)$ ในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{k}$

① หาเกรเดียนต์ $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$

$$\nabla f = 4x\vec{i} + 6y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

เกรเดียนต์ที่จุด $P(2, 1, 3)$: $\nabla f(2, 1, 3) = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$

② หาเวกเตอร์
ในทิศทาง : $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{k} \rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$
normalize $\vec{b} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} - 2\vec{k})$

③ $D_{\vec{b}}f = \nabla f \cdot \vec{b}$
 $= (8\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k} \right)$
 $= \frac{8}{\sqrt{5}} - \frac{12}{\sqrt{5}} = -\frac{4}{\sqrt{5}}$

สรุปว่า f ลดลงที่จุด P ในทิศทาง $\vec{a}$. #



$$D_{\vec{b}} f = \nabla f \cdot \vec{b} \quad \leftarrow |\vec{b}| = 1$$

29

ตัวอย่าง 3.1.2. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.35 หน้า 77)

กำหนดฟังก์ชัน $f(x, y, z) = xy + z^3$ จงหาอนุพันธ์ทิศทางของ f ที่จุด

$P(3, -2, -1)$ ในทิศทางตรงสู่จุด $Q(-5, 0, 3)$

คิดหา $\rightarrow \vec{PQ} = (-5-3)\vec{i} + (0-(-2))\vec{j} + (3-(-1))\vec{k} = -8\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$; $|\vec{PQ}| = \sqrt{(-8)^2 + (2)^2 + (4)^2} = \sqrt{84}$

$$\therefore \vec{b} = \frac{\vec{PQ}}{|\vec{PQ}|} = \frac{1}{\sqrt{84}} (-8\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k})$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} = y\vec{i} + x\vec{j} + 3z^2\vec{k}$$

$$\nabla f(3, -2, -1) = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\therefore D_{\vec{b}} f = \nabla f(3, -2, -1) \cdot \vec{b} = (-2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot \left(\frac{-8}{\sqrt{84}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{84}} \vec{j} + \frac{4}{\sqrt{84}} \vec{k} \right)$$

3.1.2 ทิศทางที่ฟังก์ชันสเกลาร์มีค่าเพิ่มมากที่สุด

จาก $D_{\vec{b}} f = \vec{b} \cdot \nabla f = |\vec{b}| |\nabla f| \cos \gamma$ โดยที่ γ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{b}$ และ ∇f

เนื่องจาก $|\vec{b}| = 1$ และ $\cos \gamma$ มากที่สุดคือ 1 ดังนั้น $(D_{\vec{b}} f)_{\max} = |\nabla f|$ คือค่ามากที่สุด จะได้ว่า ทิศทางของ ∇f จะเป็นทิศที่ f มีค่าเพิ่มมากที่สุด

$$= \frac{16}{\sqrt{84}} + \frac{6}{\sqrt{84}} + \frac{12}{\sqrt{84}} = \frac{34}{\sqrt{84}}$$

แสดงว่า f เพิ่มขึ้น หักัด P
ในทิศ ∇f (ที่ P)

ทฤษฎีบท 3.1.3. ให้ $f(P) = f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ที่มีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งที่ต่อเนื่อง แล้ว ∇f หาค่าได้ และมีขนาดและทิศทางเป็นอิสระต่อพิกัดฉากที่เลือกใช้ในปริภูมิสามมิติ ถ้า ∇f ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ที่จุด P ทิศทางของ ∇f จะเป็นทิศทางที่ f มีค่าเพิ่มมากที่สุดที่จุด P

ตัวอย่าง 3.1.4. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.36 หน้า 78)

จงหาทิศทางที่ทำให้ $f(x, y, z) = x^2 y z^3$ มีค่าเพิ่มมากที่สุดที่จุด $P(2, 1, -1)$ และ
จงหาขนาดที่มากที่สุด

$$\nabla f(2, 1, -1)$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$= 2xy z^3 \vec{i} + x^2 z^3 \vec{j} + 3x^2 y z^2 \vec{k}$$

$$\nabla f(2, 1, -1) = -4\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$$

$$\therefore f \text{ มีค่าเพิ่มมากที่สุดที่จุดในทิศทาง } \nabla f = -4\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$$

$$\text{ขนาดมากที่สุด} : |\nabla f| = \sqrt{(-4)^2 + (4)^2 + (12)^2} = 4\sqrt{11} \quad \#$$

ตัวอย่าง 3.1.5. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.37 หน้า 77)

กำหนดฟังก์ชัน $f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 z$ พิกัด (x, y, z) ควรต้องเปลี่ยนไปในทิศทางของเวกเตอร์ใด เพื่อให้ค่าของฟังก์ชัน f ลดลงในอัตราสูงสุด และอัตราสูงสุดนี้เป็นเท่าใด

$$-\nabla f$$

นั่นคือ $\nabla f = 2x\vec{i} - 4yz\vec{j} - 2y^2\vec{k}$

แสดงว่า $-\nabla f = -2x\vec{i} + 4yz\vec{j} + 2y^2\vec{k}$

$$\text{อัตราสูงสุด} \quad |\nabla f| = \sqrt{(-2x)^2 + (4yz)^2 + (2y^2)^2}$$

$$= \sqrt{4x^2 + 16y^2 z^2 + 4y^4} \quad \#$$

$$D_{\vec{b}} f = \nabla f \cdot \vec{b} \quad |\vec{b}| = 1$$

$$= |\nabla f| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma \quad ; \gamma \text{ คือมุมระหว่าง } \nabla f, \vec{b}$$

$$\text{ถ้า } \gamma = 0 \Rightarrow \cos \gamma = 1$$

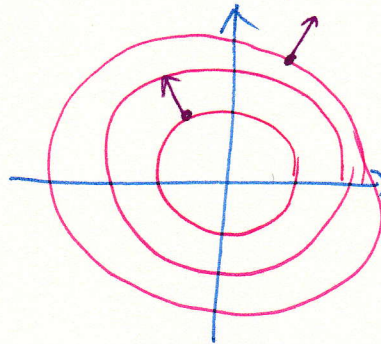
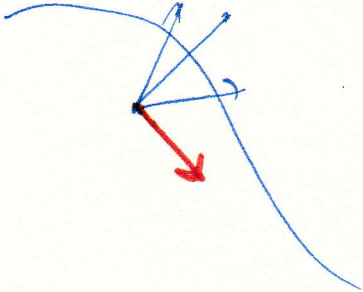
$$(D_{\vec{b}} f)_{\max} = |\nabla f|$$

$$-1 \leq \cos \gamma \leq 1$$

และทิศของเวกเตอร์ ∇f เป็นทิศทางที่ f มีค่าเพิ่มขึ้นมากที่สุด.

Spoil Alert

$$f(x, y) = c$$



$$f(x, y, z) = c$$

