

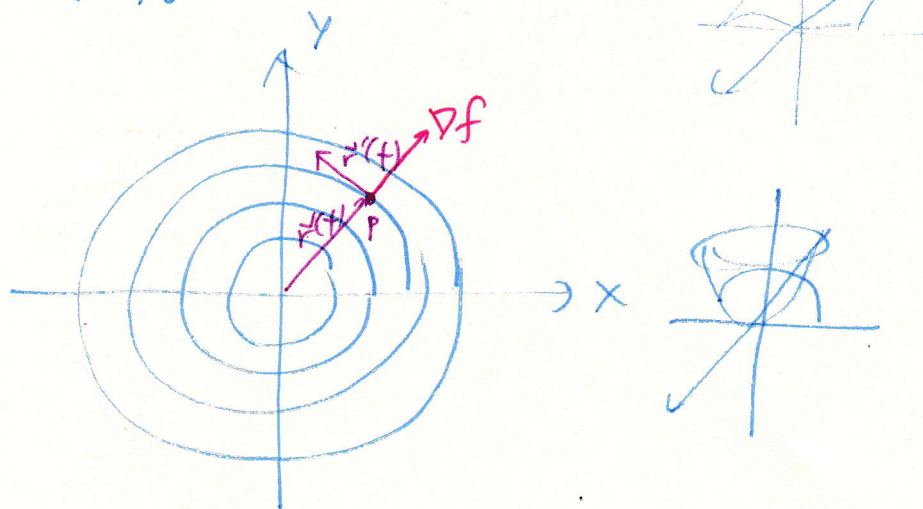
направление  $f(x, y, z)$  Directional derivative

$$D_{\vec{b}} f = \nabla f \cdot \vec{b}$$

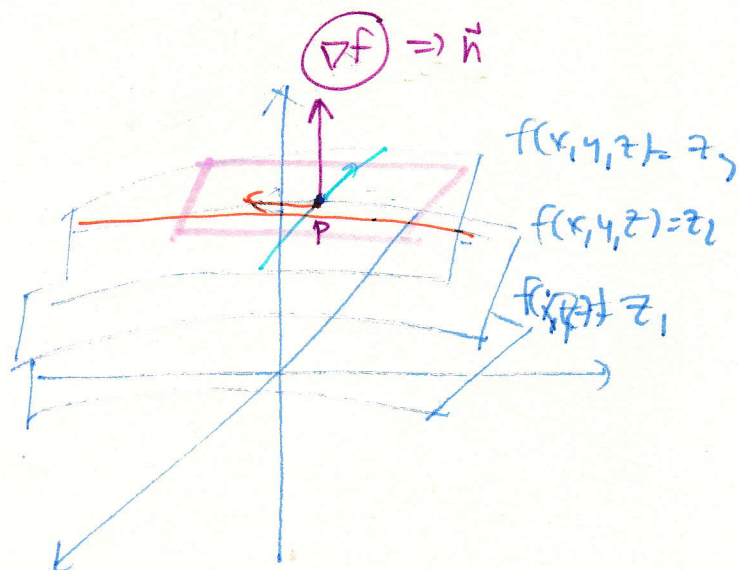
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$\text{Del operator: } \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

(2D)  $f(x, y) = C \quad \vec{z} = f(x, y)$



(3D)  $f(x, y, z) = C$



### 3.1.3 เวกเตอร์ตั้งฉากต่อพื้นผิว

เราจะพิจารณาความหมายของเกรเดียนต์ในแง่ของการเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากต่อพื้นผิว

พิจารณาสมการพื้นผิว  $S$  ในสามมิติ  $f(x, y, z) = c$  จะเห็นว่า เมื่อแทนค่า  $c$  ต่างๆ จะได้ชุดของพื้นผิว เรียกว่า พื้นผิวระดับ (level surface) ของฟังก์ชัน  $f$

ถ้า  $C$  เป็นเส้นโค้งบนพื้นผิว  $S$  กำหนดโดย  $\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$  เราจะเขียน  $f(x, y, z) = c$  ได้เป็น

$$f(x(t), y(t), z(t)) = c$$

ดังนั้น เมื่อหาอนุพันธ์เทียบกับ  $t$  จะได้

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

หรือ  $\nabla \cdot \vec{r}'(t) = 0$  เมื่อ  $\vec{r}'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t)]$  นั่นคือ เวกเตอร์สัมผัส  $\vec{r}'(t)$  และ เวกเตอร์  $\nabla f$  ตั้งฉากกัน

หากพิจารณาเส้นโค้ง  $S$  เส้นอื่นที่ผ่านจุด  $P$  บน  $S$  เวกเตอร์สัมผัสที่จุด  $P$  ของเส้นโค้งเหล่านี้จะอยู่ในระนาบเดียวกัน เรียกระนาบนี้ว่า **ระนาบสัมผัส** (tangent plane) ของ  $S$  ที่จุด  $P$  จะได้ว่า เวกเตอร์สัมผัสเหล่านี้ จะตั้งฉากกับเกรเดียนต์ของ  $f$  ดังนั้น เวกเตอร์ที่ตั้งฉากต่อพื้นผิว  $S$  ที่จุด  $P$  จะอยู่ในทิศทางของเกรเดียนต์ของ  $f$

ถ้าให้  $\vec{N}$  แทนเวกเตอร์ตั้งฉากของ  $S$  จะได้ว่า  $\vec{N} = \nabla f$

ในกรณีที่ฟังก์ชัน  $f(x, y)$  เป็นฟังก์ชันสเกลาร์สองตัวแปร สมการ  $f(x, y) = c$  จะแทนโค้งระดับของ  $f$  และเวกเตอร์ที่ตั้งฉากต่อเส้นโค้งนี้คือ เวกเดียนต์ของ  $f$

**ทฤษฎีบท 3.1.6.** ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ที่นิยามและสามารถหาอนุพันธ์ได้ในโดเมน  $D$  ในปริภูมิสามมิติ และให้  $P$  เป็นจุดใดๆ ใน  $D$  อยู่บนพื้นผิวระดับ  $S$  ของ  $f$  แล้ว ถ้าเกรเดียนต์ของ  $f$  ที่จุด  $P$  ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์แล้ว  $\nabla f$  จะตั้งฉากต่อ  $S$  ที่จุด  $P$  นั่นคือ เวกเตอร์ตั้งฉากต่อ  $S$  ที่  $P$  มีทิศทางตาม  $\nabla f$



**ทฤษฎีบท 3.1.7.** ให้  $f, g$  เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ และ  $\nabla$  เป็นตัวดำเนินการเกรเดียนต์ จะได้ว่า

$$1. \nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$$

$$2. \nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

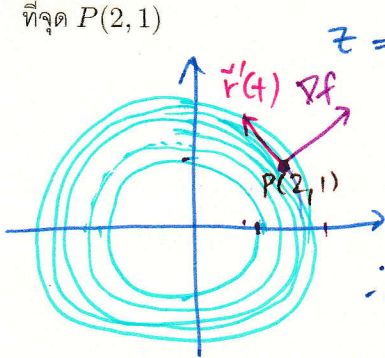
$$3. \nabla(f^n) = nf^{n-1}\nabla f$$

$$4. \nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

$$5. \nabla^2(fg) = g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g$$

ตัวอย่าง 3.1.8. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.38 หน้า 80)

ให้  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  จงหาทิศทางของเส้นตั้งฉากต่อโค้งระดับ  $f(x, y) = c$  ที่จุด  $P(2, 1)$



$$z = f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

$$0 = \ln(x^2 + y^2) \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$1 = \ln(x^2 + y^2) \Rightarrow x^2 + y^2 = e$$

$$2 = \ln(x^2 + y^2) \Rightarrow x^2 + y^2 = e^2$$

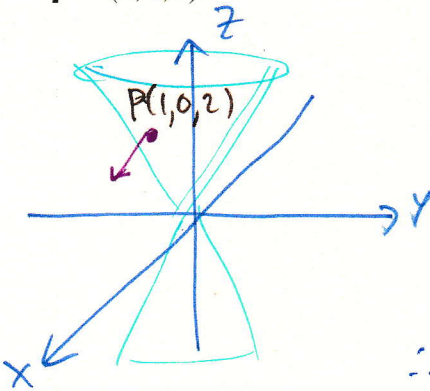
$$\therefore \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}$$

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

$$\nabla f(2, 1) = \frac{4}{5} \mathbf{i} + \frac{2}{5} \mathbf{j} \neq$$

ตัวอย่าง 3.1.9. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.39 หน้า 81)

จงหาเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย  $\mathbf{n}$  ของพื้นผิวกรวย  $z^2 = 4(x^2 + y^2)$  ที่จุด  $P(1, 0, 2)$



$$f(x, y, z) = 4(x^2 + y^2) - z^2$$

$$\text{หา } \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$= 8x \mathbf{i} + 8y \mathbf{j} - 2z \mathbf{k}$$

$$\text{หาค่า } P(1, 0, 2); \nabla f(1, 0, 2) = 8\mathbf{i} - 4\mathbf{k} \leftarrow \text{เวกเตอร์ตั้งฉาก}$$

$$\therefore |\nabla f(1, 0, 2)| = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore \mathbf{n} = \frac{\nabla f(1, 0, 2)}{|\nabla f(1, 0, 2)|} = \frac{1}{\sqrt{80}} (8\mathbf{i} - 4\mathbf{k}) = \frac{1}{4\sqrt{5}} (8\mathbf{i} - 4\mathbf{k}) = \left( \frac{2}{\sqrt{5}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{k} \right)$$

### 3.1.4 เกรเดียนต์ของฟังก์ชันศักย์และสมการลาปลาซ

ในทางฟิสิกส์ การกำหนดสนามเวกเตอร์มักกำหนดสนามที่อยู่ในรูปของเกรเดียนต์ของฟังก์ชันสเกลาร์ ฟังก์ชันสเกลาร์นี้เรียกว่า **ฟังก์ชันศักย์** หรือ **ศักย์** (potential) สมมติให้  $\mathbf{F}(x, y, z)$  แทนสนามเวกเตอร์ที่มี  $f(x, y, z)$  เป็นฟังก์ชันศักย์ จะได้ว่า

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \text{grad} f(x, y, z) = \nabla f$$

ดังนั้น เมื่อกำหนดเกรเดียนต์ซึ่งเป็นสนามเวกเตอร์มาให้ เราจะสามารถหาฟังก์ชันศักย์ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.1.10. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.42 หน้า 84)

จงหาฟังก์ชันสเกลาร์  $f$  ที่มีเกรเดียนต์คือ  $\nabla f = y\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$

$$\nabla f = y\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + y\mathbf{k} \rightarrow f \text{ คืออะไร?}$$

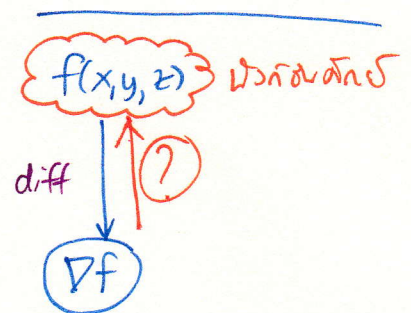
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$\text{จาก } \frac{\partial f}{\partial x} = y \rightarrow f(x, y, z) = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int y dx = xy + C_1 \quad \text{--- ①}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x+z) \rightarrow f(x, y, z) = \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int (x+z) dy = xy + zy + C_2 \quad \text{--- ②}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y \rightarrow f(x, y, z) = \int \frac{\partial f}{\partial z} dz = \int y dz = yz + C_3 \quad \text{--- ③}$$

$$\therefore g(y, z) = yz + C, \quad h(x, z) = C, \quad k(x, y) = xy + C \Rightarrow f(x, y, z) = xy + yz + C$$



หาเวกเตอร์ที่ทำใน  $f(x, y, z)$  เป็นฟังก์ชันได้เช่นกัน

$g(y, z)$

$h(x, z)$

$k(x, y)$

ให้นักศึกษาศึกษาตัวอย่างที่ 2.40 ในเอกสารหน้า 82 และตัวอย่างที่ 2.41 ในเอกสารหน้า 84 ด้วยตนเอง

### 3.2 ไดเวอร์เจนซ์ของสนามเวกเตอร์

เมื่อนำตัวดำเนินการ  $\text{del } \nabla f = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$  ไปตอบกับฟังก์ชันเวกเตอร์ จะได้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันสเกลาร์

**นิยาม 3.2.1.** ให้  $\vec{v} = v_1(x, y, z)\bar{i} + v_2(x, y, z)\bar{j} + v_3(x, y, z)\bar{k}$  เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่หาอนุพันธ์ได้ **ไดเวอร์เจนซ์** (divergence) ของ  $\vec{v}$  เขียนแทนด้วย  $\text{div } \vec{v}$  คือ

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{v} &= \nabla \cdot \vec{v} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \cdot (v_1(x, y, z)\bar{i} + v_2(x, y, z)\bar{j} + v_3(x, y, z)\bar{k}) \\ &= \frac{\partial v_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial v_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v_3(x, y, z)}{\partial z} \end{aligned}$$

**ตัวอย่าง 3.2.1.** (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.43 หน้า 87)

จงหาไดเวอร์เจนซ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1. \vec{v}(x, y, z) = y \sin z \bar{i} + x \sin z \bar{j} + xy \cos z \bar{k}$$

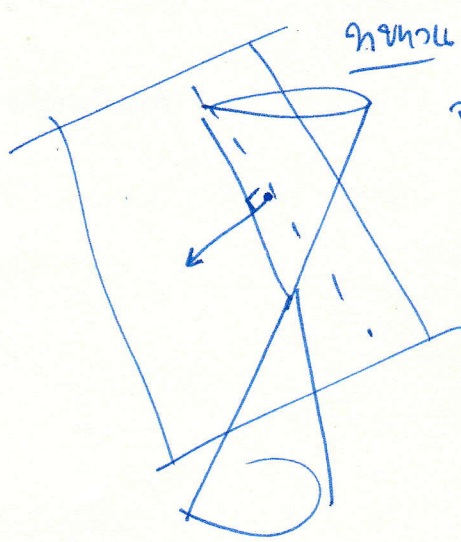
$$2. \vec{v}(x, y, z) = ye^x \bar{i} + xz \bar{j} + xy^2 z \bar{k}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{div}(\vec{v}) &= \nabla \cdot \vec{v} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \cdot (y \sin z \bar{i} + x \sin z \bar{j} + xy \cos z \bar{k}) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x} (y \sin z) + \frac{\partial}{\partial y} (x \sin z) + \frac{\partial}{\partial z} (xy \cos z) \right) = -xy \sin z \quad \# \\ \textcircled{2} \text{div}(\vec{v}) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \cdot (ye^x \bar{i} + xz \bar{j} + xy^2 z \bar{k}) \\ &= ye^x + xy^2 z \quad \# \end{aligned}$$

ถ้า  $\vec{v} = \text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k}$  และ  $f$  หาอนุพันธ์ได้สองครั้ง ได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{v} &= \nabla \cdot (\nabla f) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned}$$

เรียก  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$  ว่า เรียกว่า **ลาปลาเซียนของ  $f$**  (Laplacian) ของ  $f$  เขียนแทนด้วย  $\text{div}(\text{grad } f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \Delta f$



หาพิกัด ถ้า ถ้า สี่เหลี่ยมผืนผ้า มีจุดที่จุด  $P(1, 0, 2)$   
จุดที่ตรงกลาง  
(แล้ว ก็ หาพิกัด)

$f(x, y, z)$  ฟังก์ชันสเกลาร์  $\rightarrow$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

del operator เป็น vector

สมมติว่าเวกเตอร์  $\vec{v}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\vec{i} + v_2(x, y, z)\vec{j} + v_3(x, y, z)\vec{k}$

①  $\nabla \cdot \vec{v} \rightarrow$  divergence ของเวกเตอร์

②  $\nabla \times \vec{v} \rightarrow$  curl ของเวกเตอร์

① Divergence ของเวกเตอร์

$$\text{div } \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}$$

$$= \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left( v_1(x, y, z)\vec{i} + v_2(x, y, z)\vec{j} + v_3(x, y, z)\vec{k} \right)$$

$$= \frac{\partial v_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial v_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v_3(x, y, z)}{\partial z}$$

สมมติว่า  $f(x, y, z) \xrightarrow{\text{grad } f} \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$

$$\text{div}(\text{grad } f) = \nabla \cdot \nabla f$$

$$= \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\textcircled{*} \quad \text{div (grad } f) = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f$$

laplacian of  $f$   
(လပ်လာရှင်း)

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \Delta = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2}$$

laplacian  
operator

$f$  လာပလက်ရှင်း  $\nabla^2 f = 0 :$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

→ လာပလက်ရှင်း

$\nabla^2$  หรือ  $\Delta$  เรียกว่า ตัวดำเนินการลาปลาซ (Laplace Operator) นิยามโดย

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

เรียกว่า สมการลาปลาซ (Laplace's equation)

ตัวอย่าง 3.2.2. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.44 หน้า 88)

จงหา  $\text{grad}(\text{div } \vec{v})$  หรือ  $\nabla(\nabla \cdot \vec{v})$  เมื่อ  $\vec{v} = xy \sin z (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

vector      scalar

$$\text{grad}(\text{div } \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) \neq \nabla^2 \vec{v}$$

$\nabla(\nabla \cdot \vec{v})$

$$\begin{aligned} \text{①} \text{ หา } \text{div } \vec{v} &= \nabla \cdot \vec{v} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (xy \sin z (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (xy \sin z) + \frac{\partial}{\partial y} (xy \sin z) + \frac{\partial}{\partial z} (xy \sin z) \\ &= y \sin z + x \sin z + xy \cos z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{② } \text{grad}(\text{div } \vec{v}) &= \nabla (y \sin z + x \sin z + xy \cos z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \\ &= (\sin z + y \cos z) \vec{i} + (\sin z + x \cos z) \vec{j} + (y \cos z + x \cos z - xy \sin z) \vec{k} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.2.3. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.45 หน้า 88)

กำหนด  $f(x, y, z) = x^3 y z^4$  จงหา  $\nabla^2 f$  โดยใช้  $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$=$$

$$\nabla \cdot \nabla f =$$

ให้นักศึกษาศึกษาตัวอย่างที่ 2.46, 2.47, 2.48, 2.49 ในเอกสารหน้า 87 - 90 ด้วย

ตนเอง

### 3.3 เคิร์ลของสนามเวกเตอร์

นิยาม 3.3.1. เคิร์ล (curl) ของสนามเวกเตอร์  $\vec{v}$  เขียนแทนด้วย  $\text{curl } \vec{v}$  หรือ  $\text{rot } \vec{v}$  นิยามโดย

$$\begin{aligned}\text{curl } \vec{v} &= \nabla \times \vec{v} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \vec{k}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.3.1. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.50 หน้า 92)

กำหนด  $\vec{v} = yz\vec{i} + 3zx\vec{j} + z\vec{k}$  จงหา  $\text{curl } \vec{v}$

$$\begin{aligned}\text{curl } \vec{v} &= \nabla \times \vec{v} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & 3zx & z \end{vmatrix} \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(3zx) \right] \vec{i} - \left[ \frac{\partial}{\partial x}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(yz) \right] \vec{j} + \left[ \frac{\partial}{\partial x}(3zx) - \frac{\partial}{\partial y}(yz) \right] \vec{k} \\ &= -3x\vec{i} - y\vec{j} + [3z - z]\vec{k} \\ &= -3x\vec{i} - y\vec{j} + 2z\vec{k} \quad \# \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.3.2. ให้  $f, g$  เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ และ  $\vec{u}, \vec{v}$  เป็นสนามเวกเตอร์ จะได้ว่า

1.  $\text{curl}(\vec{u} + \vec{v}) = \text{curl } \vec{u} + \text{curl } \vec{v}$  หรือ  $\nabla \times (\vec{u} + \vec{v}) = \nabla \times \vec{u} + \nabla \times \vec{v}$
2.  $\text{div}(\text{curl } \vec{v}) = 0$  หรือ  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$
3.  $\text{curl}(f\vec{v}) = \text{grad } f \times \vec{v} + f \times \text{curl } \vec{v}$   
หรือ  $\nabla \times (f\vec{v}) = \nabla f \times \vec{v} + f(\nabla \times \vec{v})$
4.  $\text{curl}(\text{grad } f) = \vec{0}$  หรือ  $\nabla \times \nabla f = \vec{0}$
5.  $\text{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \text{curl } \vec{u} - \vec{u} \cdot \text{curl } \vec{v}$   
หรือ  $\nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \times \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla \times \vec{v}$
6.  $\text{div}(g\nabla f \times f\nabla g) = 0$  หรือ  $\nabla \cdot (g\nabla f \times f\nabla g) = 0$

ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ที่สามารถหาอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้ง และ  $\vec{v} =$

$\text{grad } f = \nabla f$  แล้ว

$$\text{curl } \vec{v} = \text{curl}(\text{grad } f) = \vec{0}$$

$$\downarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$\begin{aligned}f &\rightarrow \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \\ \text{curl}(\text{grad } f) &= \nabla \times (\nabla f) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{พิจารณา component } i &\quad \nabla \times \vec{v} = \nabla \times (\nabla f) = \vec{0} \\ \left| \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right| &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0\end{aligned}$$