

ตัวอย่าง 3.3.3. กำหนด $\vec{u} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ และ $\vec{v} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ จงหา $\vec{u} \times \text{curl } \vec{v}$, $\text{curl } (\vec{u} \times \vec{v})$

3.4 อินทิกรัลตามเส้น

จะเรียกเส้นโค้ง C ว่า เส้นโค้งเรียบ (smooth curve) ถ้า C มีการแทนในรูป

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad a \leq t \leq b$$

โดยที่ $\vec{r}(t)$ มีอนุพันธ์ $\vec{r}'(t)$ ที่ต่อเนื่อง และไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ที่ใดเลย

ในทางเรขาคณิต เส้นโค้งเรียบหมายถึงเส้นโค้ง C ที่มีเส้นสัมผัสแต่ละจุดเพียงเส้นเดียว และมีทิศทางเปลี่ยนไปอย่างต่อเนื่องขณะที่เคลื่อนที่ตามเส้นโค้ง C

3.4.1 การคำนวณอินทิกรัลตามเส้น

นิยาม 3.4.1. ให้ C เป็นเส้นโค้งเรียบ แทนด้วย $\vec{r}(t)$ โดยที่ $a \leq t \leq b$ และ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน C เขียนแทนด้วย $\vec{F}(\vec{r})$ แล้ว อินทิกรัลตามเส้นของฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{F}(\vec{r})$ จะนิยามโดย

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left[\vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right] dt$$

หากเส้นทางของการอินทิเกรต เป็นเส้นโค้งปิด เราจะเขียน $\oint_C$ แทน $\int_C$

ตัวอย่าง 3.4.1. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.54 หน้า 97)

จงหาค่าของอินทิกรัลตามเส้น $\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ เมื่อ $\vec{F}(\vec{r}) = -y\vec{i} + xy\vec{j}$ และ C เป็นส่วนโค้งของวงกลมจาก A ไป B ดังรูป 3.3

$$\textcircled{3} \vec{F}(\vec{r}(t)) = -\sin t \vec{i} + (\cos t)(\sin t) \vec{j} = -\sin t \vec{i} + \sin t \cos t \vec{j}$$

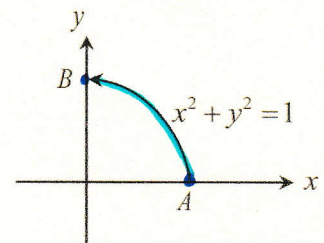
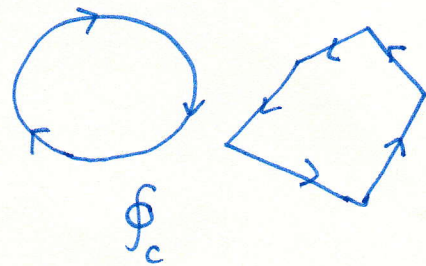
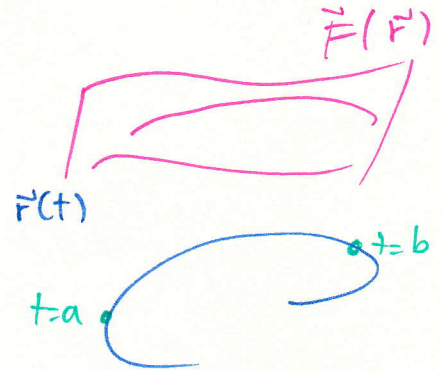
$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} (-\sin t \vec{i} + \sin t \cos t \vec{j}) \cdot (-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}) dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t + \cos^2 t \sin t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} + \left[-\frac{1}{3} \cos^3 t \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sin \pi}{2} - 0 + \frac{\sin 0}{2} \right] + \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \cos^3 0 \right]$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \quad \#$$



$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Figure 3.3. การหาอินทิกรัลตามเส้น

$$\textcircled{1} \vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}; \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{2} \vec{r}'(t) = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}$$

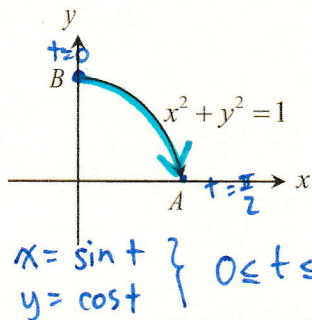


Figure 3.4. การหาอินทิกรัลตามเส้น

$$\textcircled{1} \vec{r}(t) = \sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{2} \vec{r}'(t) = \cos t \vec{i} - \sin t \vec{j}$$

ตัวอย่าง 3.4.2. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.54 หน้า 97)

จงหาค่าของอินทิกรัลตามเส้น $\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ เมื่อ $\vec{F}(\vec{r}) = -y\vec{i} + xy\vec{j}$ และ C เป็นส่วนโค้งของวงกลมจาก B ไป A ดังรูป 3.3

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

$$\textcircled{3} \vec{F}(\vec{r}(t)) = -\cos t \vec{i} + \sin t \cos t \vec{j}$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-\cos t \vec{i} + \sin t \cos t \vec{j}) \cdot (\cos t \vec{i} - \sin t \vec{j}) dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-\cos^2 t - \sin^2 t \cos t) dt = - \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t + \sin^2 t \cos t) dt$$

$$= - \left[\frac{1}{2} t + \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \quad \#$$

ตัวอย่าง 3.4.3. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.54 หน้า 97)

จงหาค่าของอินทิกรัลตามเส้น $\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ เมื่อ $\vec{F}(\vec{r}) = x\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ และ C

เป็นอีลิคซ์ที่กำหนดโดย $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + 3t \vec{k}, 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \sin t \\ z(t) &= 3t \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\textcircled{1} \vec{r}'(t) = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\textcircled{2} \vec{F}(\vec{r}) = 3t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \sin t \vec{k}$$

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (3t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \sin t \vec{k}) \cdot (-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + 3\vec{k}) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-3t \sin t + \cos^2 t + 3 \sin t) dt$$

$$= [3t \cos t + \sin t]_0^{2\pi} + \left[\frac{1}{2} (t + \frac{\sin^2 t}{2}) \right]_0^{2\pi} - [3 \cos t]_0^{2\pi}$$

$$= [6\pi \cos 2\pi - 3 \sin 2\pi - 0] + \left[\frac{1}{2} (2\pi + \frac{\sin^2 2\pi}{2}) \right] - [3 \cos 0]$$

$$= 6\pi - 0 + \frac{1}{2} (2\pi + 0) - 3 = 7\pi$$

$$= 7\pi \quad \#$$

Log inverse trig
algebraic fⁿ
trig
expo

LIATE

$$\int t \sin t dt \quad (\text{by parts})$$

$$u = t \quad ; dv = \sin t dt$$

$$du = dt \quad ; v = -\cos t$$

$$\int t \sin t dt = -t \cos t + \int \cos t dt$$

$$= -t \cos t + \sin t + C$$



$$\int \sin^2 t \, dt = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2t) \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right] + C$$

$$\sin^2 t = \frac{1}{2} (1 - \cos 2t)$$

$$\cos^2 t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2t)$$


$$\int \underbrace{\cos^2 t}_{u} \overset{du}{(-\sin t \, dt)} =$$

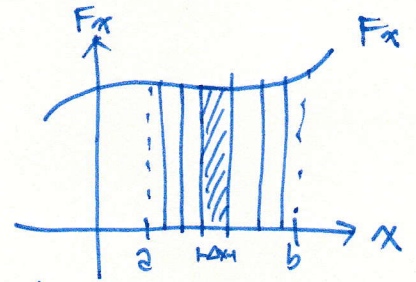
$$\text{Let } u = \cos t; \, du = -\sin t \, dt$$

$$\therefore \int \cos^2 t \sin t \, dt = -\int u^2 \, du$$

$$= -\frac{u^3}{3} + C$$

$$= -\frac{\cos^3 t}{3} + C.$$

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F_x \Delta x$$



3.4.2 ความหมายของอินทิกรัลตามเส้น

จากอินทิกรัลตามเส้น $\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ จะเห็นว่า ความหมายของอินทิกรัลตามเส้นขึ้นอยู่กับเวกเตอร์ $\vec{F}$ ว่าแทนด้วยปริมาณอะไร

ถ้า $\vec{F}$ แทนด้วยแรงที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง C แล้ว จะเห็นว่า ค่าของอินทิกรัลตามเส้นจะแทนงานที่เกิดขึ้น

งาน W ที่ได้จากแรงคงที่ F_x ในระยะทางตามส่วนของเส้นตรงที่กำหนดโดยเวกเตอร์ Δx มีค่าเป็น

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F_x \Delta x$$

ดังนั้น งานที่เกิดจากแรง F_x ในระยะทางตามเส้นโค้ง C ที่กำหนดโดย Δx จะนิยามในรูปลิมิตของผลบวกของงานในระยะทางตามคอร์ดเล็กๆ ของส่วนโค้ง C งาน ΔW_k ที่ได้จากแรง $\vec{F}(\vec{r}(t_k))$ ในระยะทางจาก $\vec{r}(t_k)$ ถึง $\vec{r}(t_{k+1})$ คือ

$$\begin{aligned} \Delta W_k &= \vec{F}(\vec{r}(t_k)) \cdot [\vec{r}(t_{k+1}) - \vec{r}(t_k)] \\ &\approx \vec{F}(\vec{r}(t_k)) \cdot \vec{r}'(t_k) \Delta t_k \quad \text{เมื่อ } \Delta t_k = t_{k+1} - t_k \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของงาน n ส่วนคือ

$$W_n = \Delta W_0 + \Delta W_1 + \dots + \Delta W_{n-1} \approx \sum_{k=0}^{n-1} \vec{F}(\vec{r}(t_k)) \cdot \vec{r}'(t_k) \Delta t_k$$

เมื่อทำให้ Δt_k ที่ใหญ่ที่สุดเข้าใกล้ศูนย์ จะเห็นว่า $n \rightarrow \infty$ ได้ว่า

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

3.4.3 อินทิกรัลตามเส้นแบบอื่นๆ

ถ้า $\vec{F} = [F_1, F_2, F_3]$ และ $d\vec{r} = [dx, dy, dz]$ คือส่วนเปลี่ยนแปลงของ $\vec{r}$

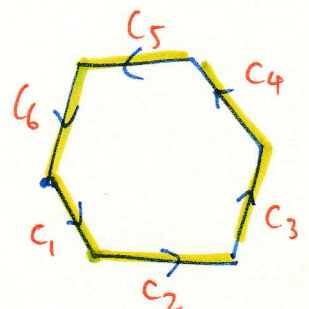
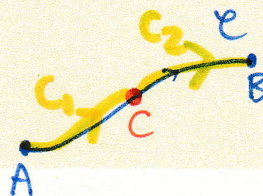
$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) \\ &= \int_a^b (F_1 x'(t) + F_2 y'(t) + F_3 z'(t)) dt \end{aligned}$$

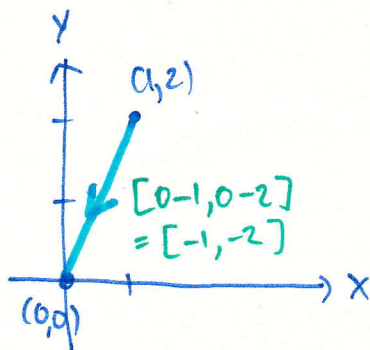
$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

$$(\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k})$$

ทฤษฎีบท 3.4.4. ให้ $\vec{F}, \vec{G}$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{r}$ เป็นเส้นโค้งเรียบ จะได้ว่า

1. $\int_C k\vec{F} \cdot d\vec{r} = k \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$
2. $\int_C (\vec{F} + \vec{G}) \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$
3. $\int_C (\vec{F}) \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$
เมื่อ C แบ่งเป็นสองส่วนคือ C_1 และ C_2





38

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

อินทิกรัลตามเส้น

ตัวอย่าง 3.4.5. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.58 หน้า 102)

จงหาค่าของอินทิกรัลตามเส้น $\int_C (x+y) dx + xy dy$ เมื่อ C เป็นเส้นตรงจากจุด $(1, 2)$ ไปยังจุด $(0, 0)$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \vec{r}(t) &= [1, 2] + t[-1, -2] \\ &= [1-t, 2-2t] \end{aligned}$$

$$\vec{F}(t) = (1-t)\vec{i} + (2-2t)\vec{j}; 0 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-t) \rightarrow x' = -1 \\ y(t) &= (2-2t) \rightarrow y' = -2 \end{aligned}$$

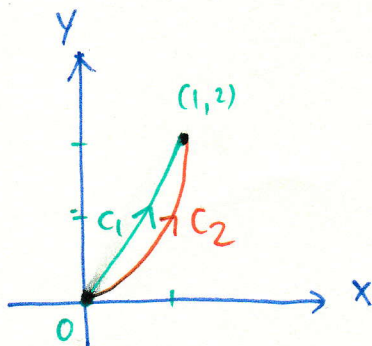
$$\textcircled{2} \begin{cases} F_1 = (1-t) + (2-2t) = 3-3t \\ F_2 = (1-t)(2-2t) = 2(1-2t+t^2) \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (F_1 x'(t) + F_2 y'(t) + F_3 z'(t)) dt$$

$$= \int_0^1 [(3-3t)(-1) + (2-4t+2t^2)(-2)] dt$$

$$= \int_0^1 [3t-3-4+8t-4t^2] dt$$

$$= \int_0^1 [-7+11t-4t^2] dt = -\frac{17}{6} \quad \#$$



ตัวอย่าง 3.4.6. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.59 หน้า 103)

จงหาค่าของ $\int_C (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งที่กำหนดโดย

1. $C_1: x=t, y=2t, 0 \leq t \leq 1 \rightarrow y=2x$

2. $C_2: x=t, y=2t^2, 0 \leq t \leq 1 \rightarrow y=2x^2$

บนเส้น C_1 $\mathcal{C}: \vec{r}(t) = t\vec{i} + 2t\vec{j}; 0 \leq t \leq 1$
 $x=t \rightarrow x'=1$
 $y=2t \rightarrow y'=2$

$$\begin{aligned} \int_C (F_1 dx + F_2 dy) &= \int_0^1 (F_1 x' + F_2 y') dt \\ &= \int_0^1 [(5t^2)(1) + (4t^2)(2)] dt \\ &= \int_0^1 [5t^2 + 8t^2] dt = \int_0^1 13t^2 dt = \frac{13t^3}{3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{13}{3} \quad \# \end{aligned}$$

Note $F_1 = t^2 + (2t)^2 = 5t^2$
 $F_2 = 2(t)(2t) = 4t^2$

บนเส้น C_2 $\mathcal{C}: \vec{r}(t) = t\vec{i} + 2t^2\vec{j}; 0 \leq t \leq 1$
 $x=t \rightarrow x'=1$
 $y=2t^2 \rightarrow y'=4t$

$$\begin{aligned} \int_C (F_1 dx + F_2 dy) &= \int_0^1 (F_1 x' + F_2 y') dt \\ &= \int_0^1 [(t^2 + 4t^4)(1) + (4t^3)(4t)] dt \\ &= \int_0^1 [t^2 + 4t^4 + 16t^4] dt \\ &= \int_0^1 [t^2 + 20t^4] dt = \frac{t^3}{3} + 4t^5 \Big|_0^1 \\ &= \frac{13}{3} \quad \# \end{aligned}$$

Note $F_1 = t^2 + (2t^2)^2 = t^2 + 4t^4 = \frac{13}{3}$
 $F_2 = 2(t)(2t^2) = 4t^3$

บนเส้น C_1, C_2 ได้ค่าเหมือนกัน

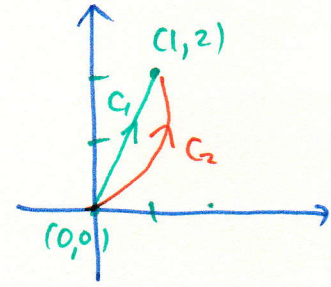
(ในความเป็นจริงแล้ว อาจจะไม่เหมือนกัน ขึ้นอยู่กับเส้นพาราเมตริกที่เราใช้)

ตัวอย่าง 3.4.7. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.60 หน้า 104)

จงหาค่าของ $\int_C y dx + xy dy$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งที่กำหนดโดย

(3/3) 1. $C_1: x = t, y = 2t, 0 \leq t \leq 1$

(3/4/5) 2. $C_2: x = t, y = 2t^2, 0 \leq t \leq 1$

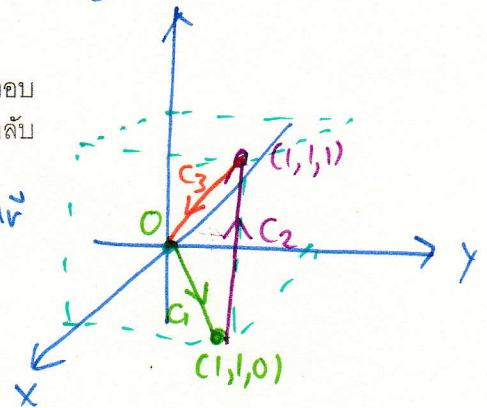


Form 1 $\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$

ตัวอย่าง 3.4.8. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.61 หน้า 104)

จงหางานที่เกิดจากแรง $\vec{F} = x\vec{i} - z\vec{j} + 2y\vec{k}$ ในระยะทางตามเส้นปิดที่ประกอบด้วยส่วนของเส้นตรงสามเส้น จาก $(0, 0, 0)$ ไปยัง $(1, 1, 0)$ ไปยัง $(1, 1, 1)$ และกลับไปที่ $(0, 0, 0)$

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



$C_1 \vec{r}(t) = t\vec{i} + t\vec{j}; 0 \leq t \leq 1$

$\vec{r}'(t) = \vec{i} + \vec{j}$

$\vec{F}(\vec{r}) = t\vec{i} + 2t\vec{k}$

$$\int_{C_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_0^1 (t\vec{i} + 2t\vec{k}) \cdot (\vec{i} + \vec{j}) dt = \dots = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$C_2 \vec{r}(t) = \vec{i} + \vec{j} + t\vec{k}; 0 \leq t \leq 1 \rightarrow \vec{r}'(t) = \vec{k}, \vec{F}(\vec{r}) = \vec{i} - t\vec{j} + 2t\vec{k}$

$$\int_{C_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \dots = \int_0^1 2 dt = 2$$

$C_3 \vec{r}(t) = (1-t)\vec{i} + (1-t)\vec{j} + (1-t)\vec{k} \rightarrow \vec{r}'(t) = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, \vec{F}(\vec{r}) = (1-t)\vec{i} - (1-t)\vec{j} + 2(1-t)\vec{k}$

$$\int_{C_3} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \dots = \int_0^1 (2t - 2) dt = -1$$

$$\therefore W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} + 2 - 1 = \frac{3}{2} \neq$$