

၇၇၇၇၇၇ Line integral

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \rightarrow C$$

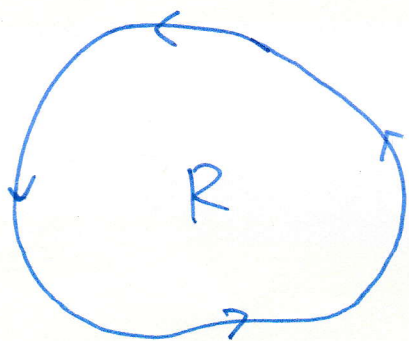
$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} \quad a \leq t \leq b$$

Form 1 $\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$

Form 2 $\vec{F} = [F_1, F_2, F_3] \quad d\vec{r} = [dx, dy, dz]$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_a^b F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \\ &= \int_a^b (F_1 x' + F_2 y' + F_3 z') dt. \end{aligned}$$

⊗



Green's Theorem

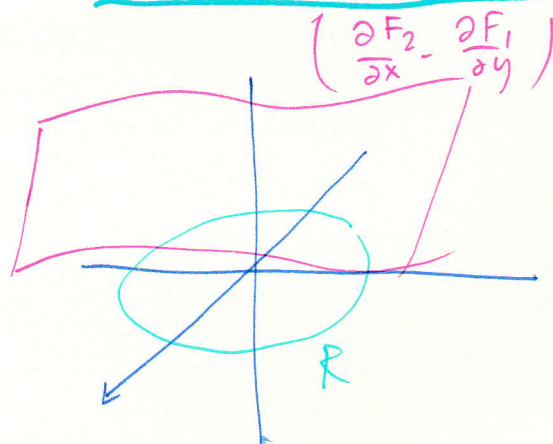
• R ပြင်ညာ ဖြစ်ရမည်။ (ပြင်ညာပေါ်တွင် C)

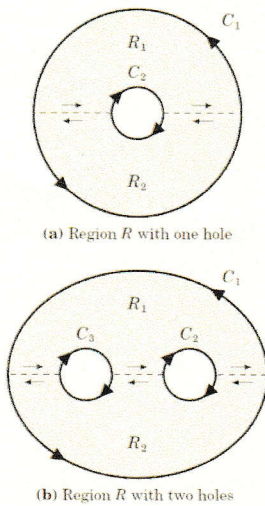
• $\vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j}$

• $F_1(x, y), F_2(x, y)$ ပြင်ညာပေါ်တွင် ဆက်တိုက်ရှိရမည်။

• $\frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_2}{\partial x}$ ဆက်တိုက်ရှိရမည်။

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy)$$



Figure 3.5. บริเวณ R

3.4.4 การแปลงอินทิกรัลสองชั้นสู่อินทิกรัลตามเส้น

อินทิกรัลสองชั้นบนระนาบ อาจ แปลงให้อยู่ในรูปของอินทิกรัลตามเส้นบนขอบเขตของบริเวณนั้นได้ เราจะใช้การแปลงนี้ช่วยในการคำนวณอินทิกรัลตามเส้นให้ง่ายขึ้น โดยอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.4.9. ทฤษฎีบทกรีนในระนาบ (Green's Theorem)

ให้ R เป็นบริเวณปิดที่มีขอบเขตในระนาบ xy โดยที่เส้นขอบเขต C ประกอบด้วยเส้นโค้งเรียบหลายเส้นเป็นจำนวนนับได้ ให้ $F_1(x, y)$ และ $F_2(x, y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและมีอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ และ $\frac{\partial F_2}{\partial x}$ ต่อเนื่องทุกแห่งในโดเมนที่รวมบริเวณ R แล้ว

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy)$$

หรือสามารถเขียนในรูปเวกเตอร์ได้เป็น

$$\iint_R (\text{curl } \vec{F}) \cdot \vec{k} dx dy = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

เมื่อ $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$ ขณะที่เคลื่อนตามทิศทางการอินทิเกรตบริเวณ R ต้องอยู่ซ้ายมือเสมอ ดังภาพ 3.5

ตัวอย่าง 3.4.10. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.62 หน้า 108)

จงแสดงทฤษฎีบทกรีนให้เห็นจริงสำหรับ $F_1 = y^2 - 7y$, $F_2 = 2xy + 2x$ และ C เป็นวงกลม $x^2 + y^2 = 1$

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy)$$

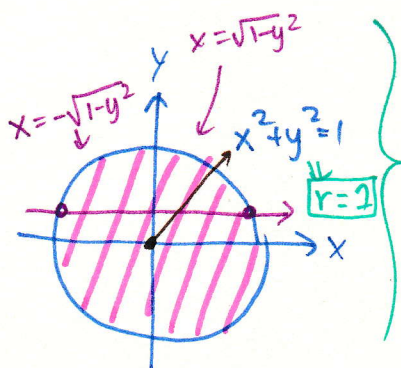
หาค่า $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2y + 2$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y - 7$

$$\therefore \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = (2y + 2) - (2y - 7) = 9$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 9 dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 9r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{9r^2}{2} \right]_0^1 d\theta = \frac{9}{2} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 9\pi.$$



ใช้การแปลง

Set $x = r \cos \theta$
 $y = r \sin \theta$

အသုံးပြု $\oint_C (F_1 dx + F_2 dy) = \oint_C [F_1 x'(t) + F_2 y'(t)] dt.$

၅) သို့မဟုတ် $x^2 + y^2 = 1$ အတွက် ဝက်လက်ပတ်ကြည့်ရင် $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}; 0 \leq t \leq 2\pi$
 $\vec{F}(\vec{r}) = (y^2 - 7y) \vec{i} + (2xy + 2x) \vec{j}$
 $x = \cos t; y = \sin t$
 $x' = -\sin t; y' = \cos t$

$$\oint_C (F_1 x'(t) + F_2 y'(t)) dt = \int_0^{2\pi} [(\sin^2 t - 7 \sin t) (-\sin t) + [2(\cos t \sin t) + 2 \cos t] \cos t] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [-\sin^3 t + 7 \sin^2 t + 2 \cos^2 t \sin t + 2 \cos^2 t] dt$$

$$\int \sin t \cdot \sin^2 t dt$$

$$= \int \sin t (1 - \cos^2 t) dt$$

$$u = \cos t \rightarrow du = -\sin t$$

$$\frac{1}{2} (1 - \cos 2t)$$

$$u = \cos t$$

$$du = -\sin t dt$$

$$\frac{1}{2} (1 + \cos 2t)$$

$$= 9\pi$$

ตัวอย่าง 3.4.11. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.63 หน้า 109)

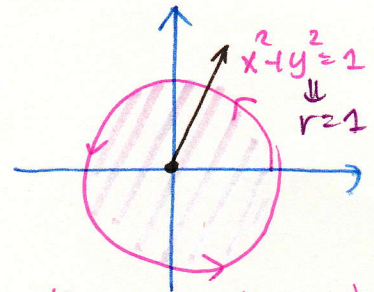
จงใช้ทฤษฎีบทกรีน หาค่าอินทิกรัลตามเส้น $\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ รอบเส้น C ในทิศทวนเข็มนาฬิกา เมื่อกำหนด $\vec{F} = y^3\vec{i} + x^3\vec{j}$ และ C เป็นวงกลม $x^2 + y^2 = 1$

จาก Green's Thm: $\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$

$$F_1: y^3 \rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3y^2$$

$$F_2: x^3 \rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} = 3x^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \iint_R (3x^2 - 3y^2) dx dy &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 [r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta] r dr d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta]_0^1 d\theta \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta] d\theta \end{aligned}$$



$$\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}; 0 \leq t < 2\pi$$

$$\text{Set } x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} (x + \cos 2\theta) - \frac{1}{2} (1 - 2\cos 2\theta) \right] d\theta \\ &= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} 2\cos 2\theta d\theta \\ &= \frac{3}{8} \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad \# \end{aligned}$$

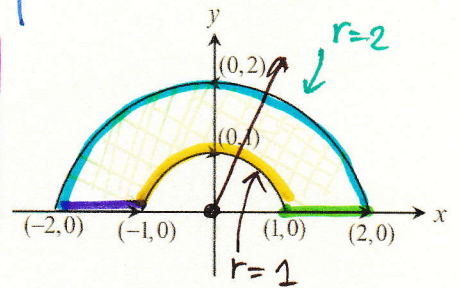
ตัวอย่าง 3.4.12. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.64 หน้า 109)

จงใช้ทฤษฎีบทกรีน หาค่าอินทิกรัลตามเส้น $\int_C \underbrace{xy}_{F_1} dx + \underbrace{(x+y)}_{F_2} dy$

เมื่อ C คือเส้นทางที่กำหนดตามรูป 3.6

$$\oint_C (xy) dx + (x+y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x} &= 1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= x \end{aligned}$$



$$= \iint_R (1-x) dx dy$$

$$= \int_0^\pi \int_1^2 (1-r\cos\theta) r dr d\theta = \int_0^\pi \int_1^2 (r - r^2 \cos\theta) dr d\theta$$

$$= \int_0^\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \cos\theta \right]_1^2 d\theta = \int_0^\pi \left(2 - \frac{8}{3} \cos\theta - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cos\theta \right) d\theta$$

$$= \int_0^\pi \left[\frac{3}{2} - \frac{7}{3} \cos\theta \right] d\theta$$

$$= \left[\frac{3}{2} \theta - \frac{7}{3} \sin\theta \right]_0^\pi = \frac{3\pi}{2} \quad \#$$

Figure 3.6. เส้นโค้ง C

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

3.4.5 พื้นที่ของบริเวณในระนาบในรูปอินทิกรัลตามเส้น

จากสูตร

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy)$$

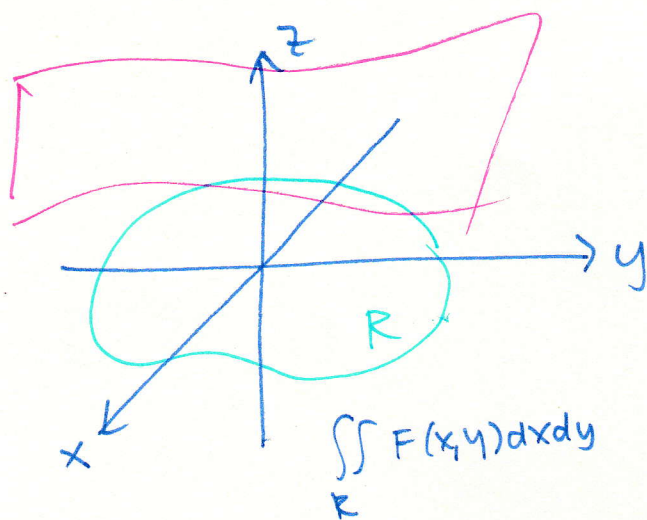
ถ้าให้ $F_1 = 0$ และ $F_2 = x$ จะได้ว่า $\iint_R dx dy = \oint_C x dy$

ถ้าให้ $F_1 = -y$ และ $F_2 = 0$ จะได้ว่า $\iint_R dx dy = - \oint_C y dx$

$$\text{ดังนั้น } \iint_R dx dy + \iint_R dx dy = \oint_C (x dy - y dx)$$

$$\text{นั่นคือ } A = \iint_R dx dy = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$$

การหาค่า double integral



หา ห.ม. ปริมาตร R โดย
Set $F(x,y) = 1$

$$A = \iint_R dx dy$$

ใช้ทฤษฎีบทของ Green เพื่อหาค่าปริมาตร R

Green Thm : $\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy)$

① Set $F_1 = 0, F_2 = x$

$\therefore \iint_R dx dy = \oint_C x dy$

② Set $F_1 = -y, F_2 = 0$

$\therefore \iint_R dx dy = \oint_C -y dx$

$\therefore 2 \iint_R dx dy = \oint_C x dy - \oint_C y dx$

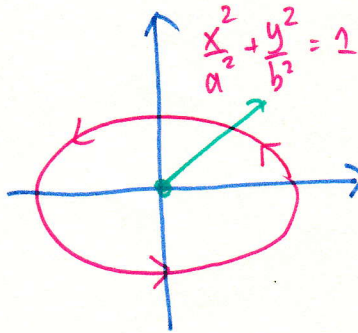
$$\iint_R dx dy = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$$

ใช้ทฤษฎีบทของ Green เพื่อหาค่าปริมาตร R

Green

W.K. $\iint_R dx dy = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$

อินทิกรัลตามเส้น



ตัวอย่าง 3.4.13. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.65 หน้า 111)

จงหาพื้นที่ A ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยวงรี

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

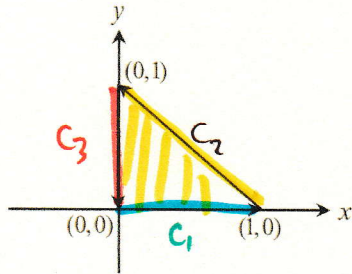
$$\vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + b \sin t \vec{j};$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$x = a \cos t \rightarrow dx = -a \sin t dt$$

$$y = b \sin t \rightarrow dy = b \cos t dt$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t) \cdot b \cos t dt - \int_0^{2\pi} (b \sin t) (-a \sin t) dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt \\ &= \frac{2\pi}{2} \cdot ab = \pi ab. \quad \# \end{aligned}$$



ตัวอย่าง 3.4.14. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.66 หน้า 112)

จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง ดังรูป 3.7

พิกัดเส้น C_1

$$\vec{r}(t) = t \vec{i}; \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$x(t) = t, \quad y(t) = 0$$

$$dx = dt; \quad dy = 0$$

$$\frac{1}{2} \int_{C_1} x dy - y dx = 0$$

C_2

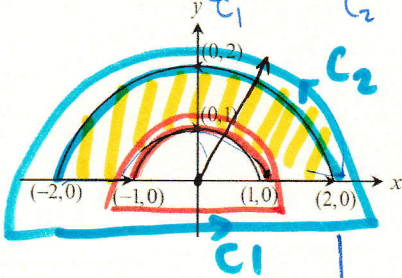
$$\vec{r}(t) = (1-t) \vec{i} + t \vec{j}; \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$x(t) = 1-t, \quad y(t) = t$$

$$dx = -dt, \quad dy = dt$$

$$\iint_R dx dy = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} \right] \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$



ตัวอย่าง 3.4.15. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.66 หน้า 112)

จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง ดังรูป 3.8

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j}; \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t$$

$$dx = -2 \sin t dt; \quad dy = 2 \cos t dt$$

$$A = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$$

$$(u_{C_2}) = \frac{1}{2} \int_0^\pi [4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t] dt = 2\pi$$

$$(\text{พิกัดเส้น } C_1 = 0, \text{ พิกัดเส้น } C_2 = 2\pi)$$

$$\text{วงกลม } x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}; \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

$$dx = -\sin t dt; \quad dy = \cos t dt$$

$$A = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$$

$$(u_{C_1}) = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos^2 t + \sin^2 t] dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \text{พิกัดเส้นวงกลม } \text{คือ } 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \quad \#$$

Figure 3.7. เส้นโค้ง C

Figure 3.8. เส้นโค้ง C

อินทิกรัลพื้นที่

$$\begin{aligned} A &= \iint_R dx dy \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 r dr d\theta \end{aligned}$$