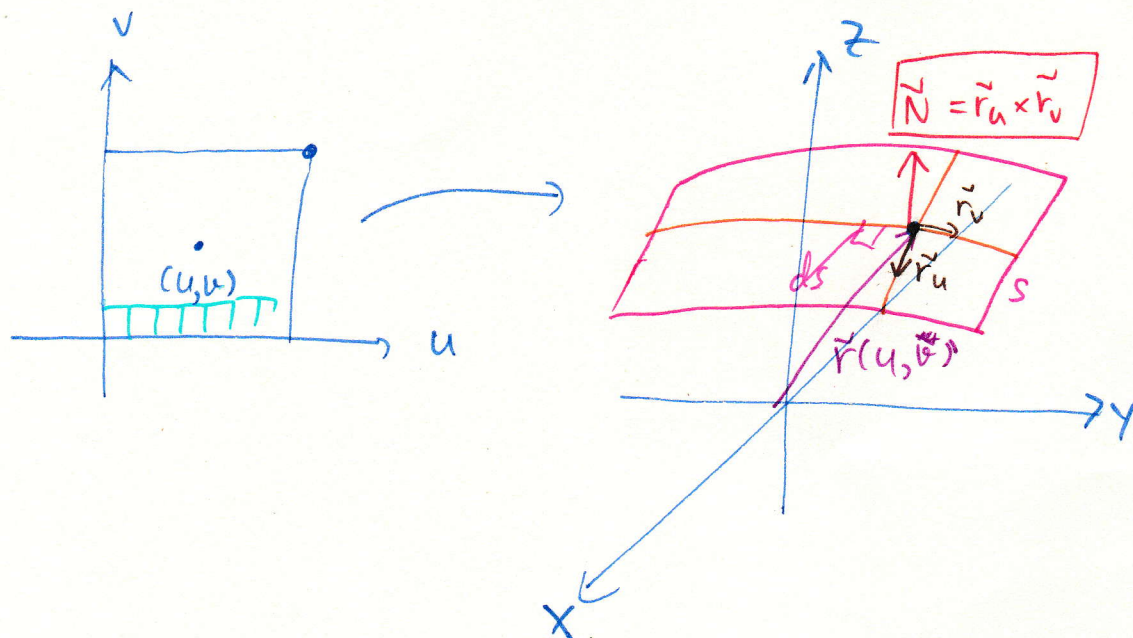
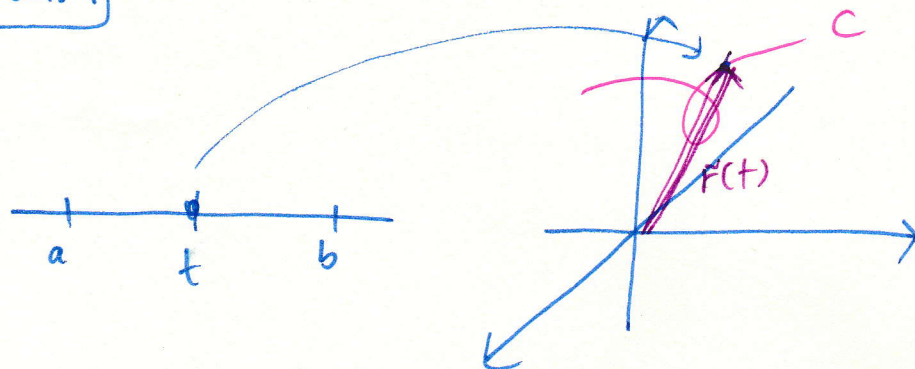


Review



Line integral

① $\vec{F}$, ② $C \Rightarrow \vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}'(t)$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

Thm Green's Theorem $F = [F_1, F_2]$

$$\rightarrow \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C F_1 dx + F_2 dy$$

$$\rightarrow \text{w.n.} \iint_R dx dy = \frac{1}{2} \oint x dy - y dx$$



Surface integral

① $\vec{F}$ ② $S \Rightarrow \vec{r}(u, v)$

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

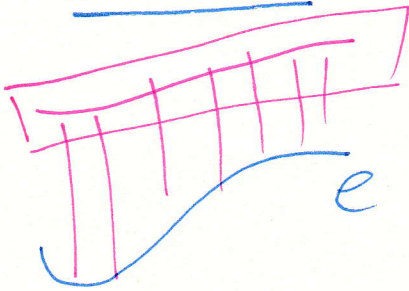
$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} ; \vec{N} := \vec{r}_u \times \vec{r}_v$$

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$$

$$\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_R \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{N}(u, v) du dv.$$

Line integral



→ Surface integral

$$\vec{F} = p\vec{v}$$

↓

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = p\vec{v} \cdot \vec{n} = p(\vec{v} \cdot \vec{n})$$

$$\boxed{\iint_R \vec{F} \cdot \vec{n} dS}$$

← flux vychuwađa S.

3.6 อินทิกรัลตามพื้นผิว

3.6.1 พื้นผิวและปริพันธ์ตามพื้นผิวของพื้นผิวที่มีการแทนแบบอิงตัวแปรเสริม

ให้ S เป็นพื้นผิวเรียบ หรือมีผิวเรียบเป็นส่วนๆ ที่กำหนดโดย

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

โดยมีเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยคือ

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} \quad \text{เมื่อ } \vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$$

อินทิกรัลตามพื้นผิวของฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{F}$ บน S นิยามโดย

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_R \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{N}(u, v) \, du \, dv$$

$\vec{F} \cdot \vec{n}$ คือส่วนประกอบในแนวตั้งฉากต่อ S ของ $\vec{F}$

ตัวอย่างการประยุกต์ที่สำคัญคือ **ฟลักซ์อินทิกรัล** (flux integral) มีประโยชน์ในปัญหาที่เกี่ยวข้องกับของไหล กล่าวคือ ถ้ากำหนด $\vec{F} = \rho \vec{v}$ โดยที่ ρ คือความหนาแน่นของการไหล และ $\vec{v}$ คือเวกเตอร์ความเร็วของการไหล ดังนั้น

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} = \rho(\vec{v} \cdot \vec{n})$$

ค่าของอินทิกรัลจะแทนฟลักซ์ที่ผ่านพื้นผิว S (เท่ากับมวลของการไหลที่ผ่าน S ต่อหนึ่งหน่วยเวลา) ค่าที่ได้นี้เรียกว่า flux integral

ตัวอย่าง 3.6.1. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.76 หน้า 132)

จงหาค่าฟลักซ์ของน้ำที่ไหลผ่านทรงกระบอกเชิงพาราโบลา $S: y = x^2$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 3$ เมื่อเวกเตอร์ความเร็ว $\vec{v} = y\vec{i} + 2\vec{j} + xz\vec{k}$ **คิดเร็ว m/s.**

รู้ ① $\vec{F} = \rho \vec{v} = \rho(y\vec{i} + 2\vec{j} + xz\vec{k}) = \rho u^2\vec{i} + 2\rho\vec{j} + \rho uv\vec{k}$

② $\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + u^2\vec{j} + v\vec{k}; 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 3.$

$\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ $\vec{r}_u = \vec{i} + 2u\vec{j}$ $\vec{r}_v = \vec{k}$

$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2u\vec{i} - \vec{j}$

$\vec{F} \cdot \vec{N} = (\rho u^2\vec{i} + 2\rho\vec{j} + \rho uv\vec{k}) \cdot (2u\vec{i} - \vec{j}) = (\rho u^2\vec{i} + 2\rho\vec{j} + \rho uv\vec{k}) \cdot (2u\vec{i} - \vec{j}) = 2\rho u^3 - 2\rho$

$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_R \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{N}(u, v) \, du \, dv$

$$= \int_0^2 \int_0^3 (2\rho u^3 - 2\rho) \, dv \, du$$

$$= \int_0^2 (2\rho u^3 - 2\rho)v \Big|_0^3 \, du$$

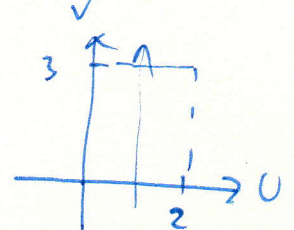
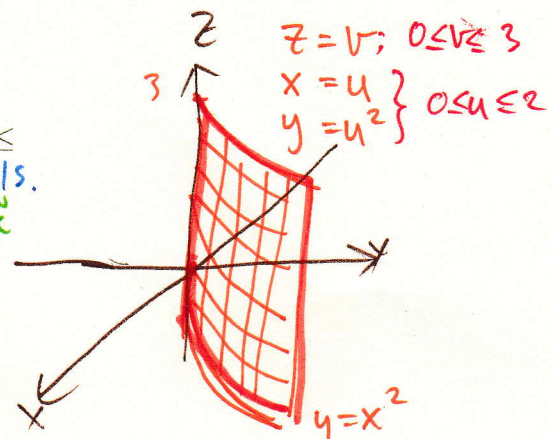
$$= 6\rho \int_0^2 (u^3 - 1) \, du$$

$$= 6\rho \left[\frac{u^4}{4} - u \right]_0^2$$

$$= 6\rho [2] = 12\rho$$

ถ้า $\rho = 1000 \, \text{kg/m}^3$

$\therefore \text{Flux ที่หาต่อ } S = 12,000 \, \text{kg/s.}$



$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_R \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \vec{N}(u,v) du dv$$

อินทิกรัลตามพื้นผิว

ตัวอย่าง 3.6.2. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.75 หน้า 133)

จงหาค่า $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$ เมื่อ $\vec{F} = \sin x \vec{i} + z \vec{j} + y \vec{k}$ และ S เป็นพื้นผิว $y^2 + z^2 = 4$

โดยที่ $-1/2 \leq x \leq 1/2$ และ $z \geq 0$; 470

$$\vec{r}(u,v) = v \vec{i} + 2 \cos u \vec{j} + 2 \sin u \vec{k} \quad ; \quad -\frac{1}{2} \leq v \leq \frac{1}{2}, 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v : \quad \vec{r}_u = -2 \sin u \vec{j} + 2 \cos u \vec{k}, \quad \vec{r}_v = \vec{i}$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 \sin u & 2 \cos u \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cos u \vec{j} + 2 \sin u \vec{k}$$

$$\vec{F} = \sin v \vec{i} + 2 \sin u \vec{j} + 2 \cos u \vec{k}$$

$$\therefore \vec{F} \cdot \vec{N} = (2 \cos u)(2 \sin u) + (2 \sin u)(2 \cos u) = 8 \cos u \sin u$$

$$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_R \vec{F} \cdot \vec{N} du dv = 8 \int_0^{\pi/2} \int_{-1/2}^{1/2} \cos u \sin u dv du$$

$$= 8 \int_0^{\pi/2} \cos u \sin u du = 8 \left[\frac{\sin^2 u}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \#$$

ตัวอย่าง 3.6.3. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.76 หน้า 134)

กำหนดให้ $\vec{F} = 3x \vec{i} + 2y \vec{j} + (1-z) \vec{k}$ และ S เป็นระนาบ $x+y+z=1$ โดยที่

$0 \leq x \leq 1$ และ $0 \leq y \leq 1$ จงหาค่าฟลักซ์ของ $\vec{F}$ ที่ผ่านผิว S

$$\vec{r}(u,v) = u \vec{i} + v \vec{j} + (1-u-v) \vec{k}; \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$$

$$\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v : \quad \vec{r}_u = \vec{i} - \vec{k}, \quad \vec{r}_v = \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{F} = 3u \vec{i} + 2v \vec{j} + (u+v) \vec{k}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = (3u \vec{i} + 2v \vec{j} + (u+v) \vec{k}) \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 3u + 2v + u + v = 4u + 3v$$

$$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_0^1 \int_0^{1-u} (4u + 3v) dv du$$

$$= \frac{7}{2}$$

#

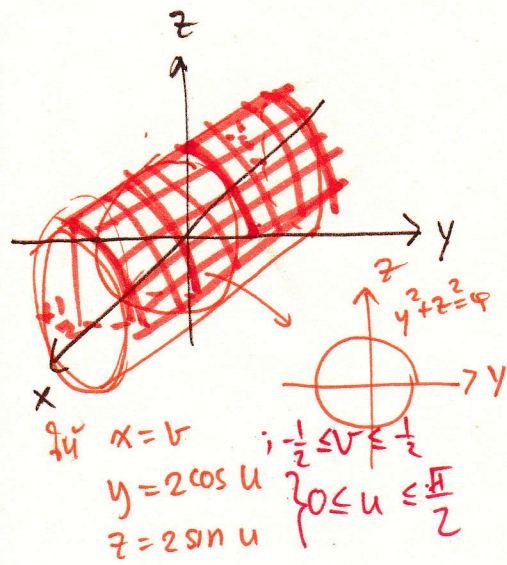
3.6.2 พื้นที่ของพื้นผิว S

เนื่องจากพื้นที่เล็กๆ ของพื้นผิว S หาได้จาก

$$ds \approx \Delta S = |\vec{N}| du dv = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

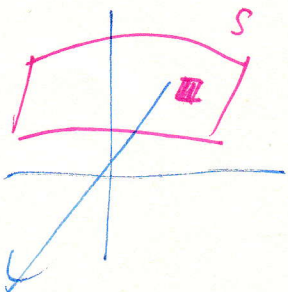
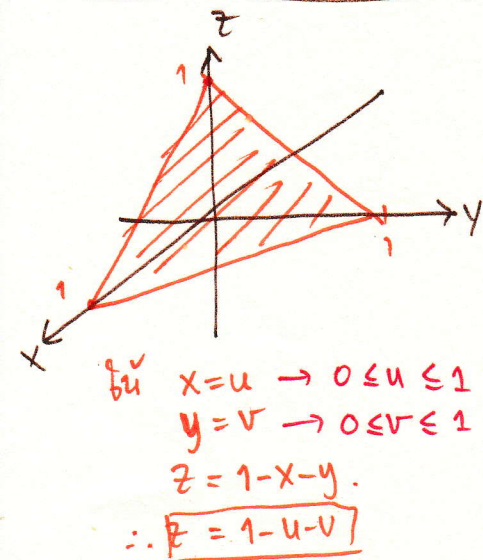
ดังนั้น พื้นที่ A ของ S จะกำหนดโดย

$$A(s) = \iint_R |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$



$$\int \cos u \sin u du$$

ให้ $\heartsuit = \sin u$
 $\therefore d\heartsuit = \cos u du$
 $\Rightarrow \int \cos u \sin u du = \int \heartsuit d\heartsuit$
 $= \frac{\heartsuit^2}{2} + C$
 $= \frac{\sin^2 u}{2} + C$



$$A(s) = \iint_R |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv.$$

ตัวอย่าง 3.6.4. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.77 หน้า 135)

จงหาพื้นที่ผิวของกระบอก $x^2 + y^2 = r_0^2$ เมื่อ $0 \leq z \leq h$

$$\vec{r}(u,v) = r_0 \cos v \vec{i} + r_0 \sin v \vec{j} + u \vec{k}; 0 \leq u \leq h, 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$\vec{r}_u = \vec{k}$$

$$\vec{r}_v = -r_0 \sin v \vec{i} + r_0 \cos v \vec{j}$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -r_0 \sin v & r_0 \cos v & 0 \end{vmatrix} = -r_0 \cos v \vec{i} - r_0 \sin v \vec{j}$$

$$\therefore |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{(-r_0 \cos v)^2 + (-r_0 \sin v)^2} = r_0$$

$$\therefore A(s) = \iint_R |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^h r_0 du dv = 2\pi r_0 h \quad \#$$

ตัวอย่าง 3.6.5. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.78 หน้า 136)

จงหาพื้นที่ผิวของกรวย $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ เมื่อ $0 \leq z \leq 1$

$$\vec{r}(u,v) = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + u \vec{k}; 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$\vec{r}_u =$$

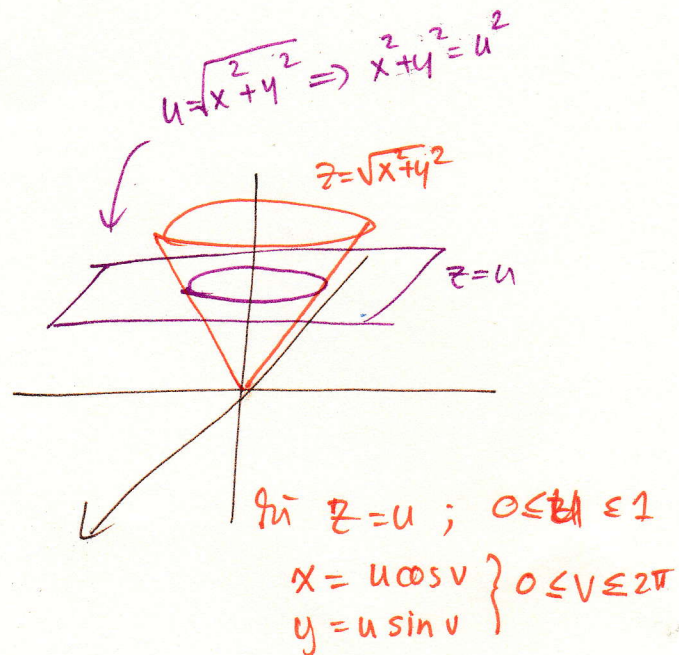
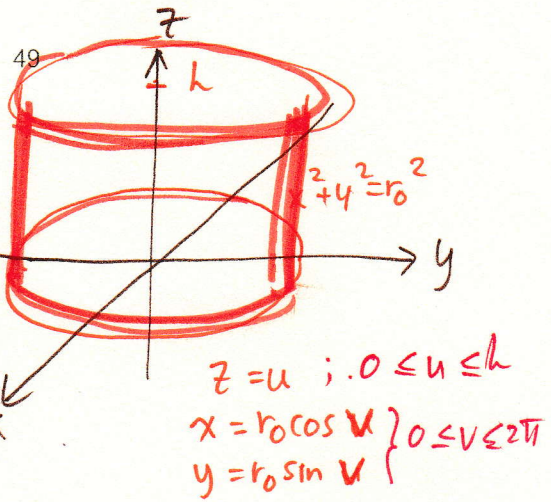
$$\vec{r}_v =$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| =$$

$$A(s) = \iint_R |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

$$= \sqrt{2} \pi$$



ตัวอย่าง 3.6.6.

(HW)

 $(4\pi r^2)$

จงหาพื้นที่ผิวของทรงกลมที่มีการแทนแบบอิงตัวแปรเสริมโดย

$$\vec{r}(u, v) = a \cos u \sin v \vec{i} + a \sin u \sin v \vec{j} + a \cos v \vec{k}$$

เมื่อ $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi$

3.6.3 การแปลงระหว่างอินทิกรัลสามชั้นและอินทิกรัลตามพื้นผิว

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยให้เราสามารถแปลงอินทิกรัลสามชั้นเป็นอินทิกรัลตามพื้นผิวบนพื้นที่ผิวขอบบริเวณหนึ่ง ทำให้เราสามารถหาค่าของอินทิกรัลบนพื้นผิวเรียบเป็นส่วนๆ ได้ง่ายขึ้น เช่น ลูกบาศก์ เป็นต้น

ทฤษฎีบท 3.6.7. ให้ T เป็นบริเวณปิดในสามมิติที่มีขอบเขตเป็นพื้นผิวเรียบเป็นส่วนๆ ที่สามารถกำหนดทิศทางได้ ให้ $\vec{F}(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ที่ต่อเนื่องและมีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งต่อเนื่องในโดเมนที่รวม T แล้ว

$$\iiint_T \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$

เมื่อ $\vec{n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากที่พุ่งออกจาก S

ตัวอย่าง 3.6.8. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.81 หน้า 138)

จงหาค่าของ $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$ เมื่อ $\vec{F} = y^2 \vec{i} + (2xz - 6) \vec{j} + 12yz \vec{k}$ และ S เป็นผิวของกรวย $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ และปิดส่วนบนด้วยระนาบ $z = 2$