

ตัวอย่าง 3.6.6.

จงหาพื้นที่ผิวของทรงกลมที่มีการแทนแบบอิงตัวแปรเสริมโดย

$$\vec{r}(u, v) = a \cos u \sin v \vec{i} + a \sin u \sin v \vec{j} + a \cos v \vec{k}$$

เมื่อ $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$

3.6.3 การแปลงระหว่างอินทิกรัลสามชั้นและอินทิกรัลตามพื้นผิว

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยให้เราสามารถแปลงอินทิกรัลสามชั้นเป็นอินทิกรัลตามพื้นผิวบนพื้นที่ผิวขอบบริเวณหนึ่ง ทำให้เราสามารถหาค่าของอินทิกรัลบนพื้นผิวเรียบเป็นส่วนๆ ได้ง่ายขึ้น เช่น ลูกบาศก์ เป็นต้น

Divergence Thm. von Gauss.

ทฤษฎีบท 3.6.7. ให้ T เป็นบริเวณปิดในสามมิติที่มีขอบเขตเป็นพื้นผิวเรียบเป็นส่วนๆ ที่สามารถกำหนดทิศทางได้ ให้ $\vec{F}(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ที่ต่อเนื่องและมีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งต่อเนื่องในโดเมนที่รวม T แล้ว

$$\iiint_T \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$

divergence int. Flux integral

เมื่อ $\vec{n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากที่พุ่งออกจาก S

ตัวอย่าง 3.6.8. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.81 หน้า 138)

จงหาค่าของ $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$ เมื่อ $\vec{F} = y^2 \vec{i} + (2xz - 6) \vec{j} + 12yz \vec{k}$ และ S เป็นผิวของกรวย $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ และปิดส่วนบนด้วยระนาบ $z = 2$

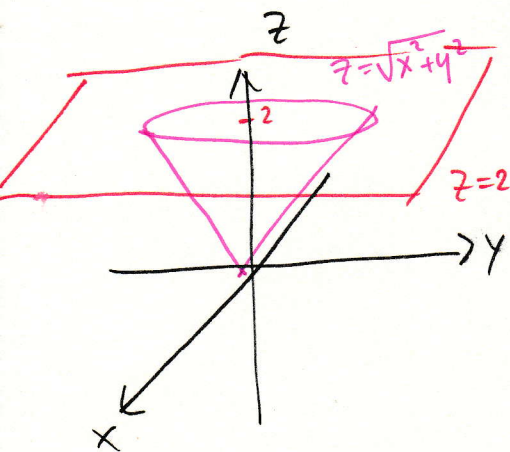
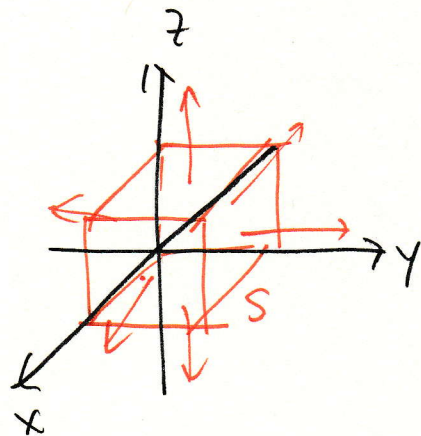
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iiint_T \operatorname{div} \vec{F} dV$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2xz - 6) + \frac{\partial}{\partial z}(12yz)$$

$$= 12y$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iiint_T 12yz dV.$$

⊗



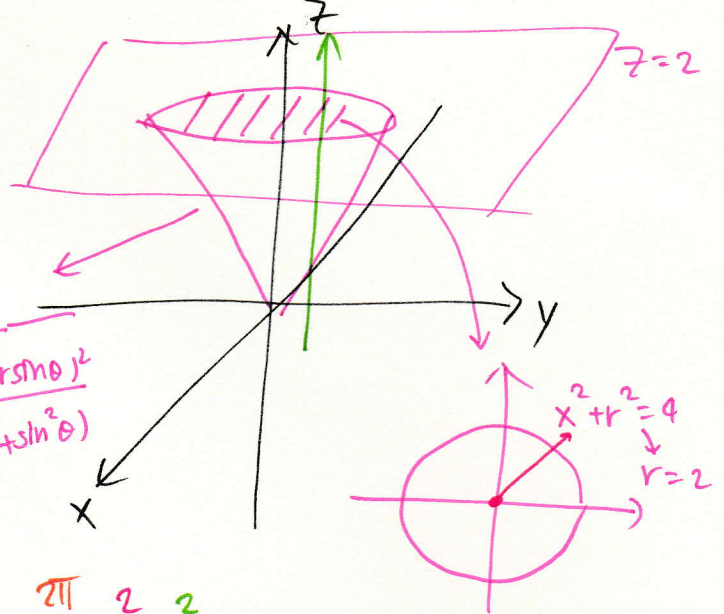
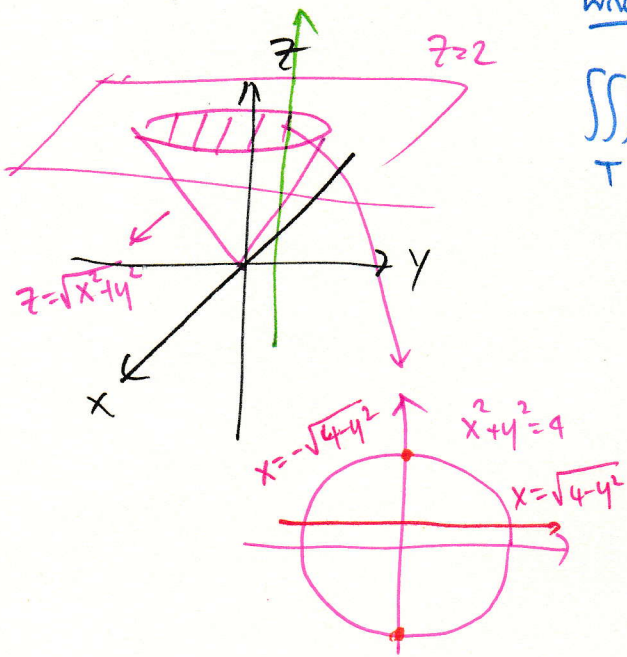
วิธีที่ 1

$$\iiint_T 12y \, dz \, dx \, dy = \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 12y \, dz \, dx \, dy$$



วิธีที่ 2 หรือ

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore z &= \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} \\ &= \sqrt{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \\ z &= r \end{aligned}$$

$$\iiint_T 12y \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 12r \sin \theta \, r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 12r^2 \sin \theta \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 12r^2 \sin \theta (2-r) \, dr \, d\theta$$

$$= 12 \int_0^{2\pi} \int_0^2 [2r^2 \sin \theta - r^3 \sin \theta] \, dr \, d\theta$$

$$= 12 \int_0^{2\pi} \left[\frac{2r^3}{3} \sin \theta - \frac{r^4}{4} \sin \theta \right]_0^2 \, d\theta$$

$$= 12 \int_0^{2\pi} \left(\frac{16}{3} \sin \theta - 4 \sin \theta \right) \, d\theta$$

$$= 12 \left[-\frac{16}{3} \cos \theta + 4 \cos \theta \right]_0^{2\pi} = 0$$

#

$$z = x^2 + y^2 \rightarrow x^2 + y^2 + z = 3$$

$$z = 3 - (x^2 + y^2)$$

$$z - 3 = -(x^2 + y^2)$$

51

ตัวอย่าง 3.6.9. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.82 หน้า 139)

จงหาค่าของ $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$ เมื่อ $\vec{F} = xy^2\vec{i} + (x^2y + z)\vec{j} - \cos(xy)\vec{k}$ และ S เป็นผิวปิด ซึ่งปิดด้านบนด้วยพาราโบลอยด์ $x^2 + y^2 + z = 3$ และปิดด้านล่างด้วยระนาบ $z = 2$

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V \text{div } \vec{F} \, dV$$

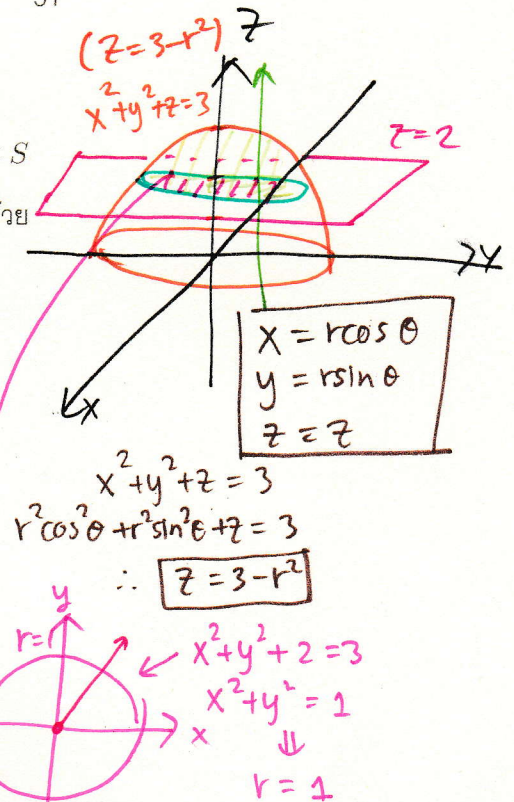
$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + z) + \frac{\partial}{\partial z}(-\cos(xy)) = x^2 + y^2$$

$$\therefore \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V (x^2 + y^2) \, dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_2^{3-r^2} r^2 r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_2^{3-r^2} r^3 \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 [3 - r^2 - 2] \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^3 - r^5) \, dr \, d\theta$$

$$= \left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right]_0^1 d\theta = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{6} \neq$$



3.6.4 ทฤษฎีบทสโตกส์ (Stokes' Theorem)

เราจะศึกษาการแปลงระหว่างอินทิกรัลตามผิวและอินทิกรัลตามเส้น โดยการแปลงนี้เป็นทฤษฎีบทกรีนในสามมิติ เรียกว่า **ทฤษฎีบทสโตกส์** ซึ่งเป็นทฤษฎีที่เกี่ยวกับการแปลงระหว่างอินทิกรัลตามพื้นผิว S ที่กำหนดเส้นทางได้ และอินทิกรัลตามเส้นโค้ง C ซึ่งเป็นขอบของ S

ดังนั้น การกำหนดทิศทางของพื้นผิว S จะทำให้ได้ทิศของเส้นโค้ง C ซึ่งหาได้จากกฎมือขวา

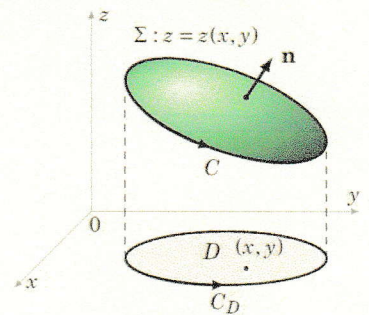


Figure 3.15. การกำหนดทิศทางพื้นผิว S

ทฤษฎีบท 3.6.10. ทฤษฎีบทสโตกส์

ให้ S เป็นพื้นผิวเรียบเป็นส่วนๆ ที่สามารถกำหนดทิศทางได้ ซึ่งมีเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากกับพื้นผิวเป็น $\vec{n}$ และมีขอบเป็นเส้นโค้งเชิงเดียวปิด C ที่มีทิศทางบวก ถ้า $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ เป็นสนามเวกเตอร์ซึ่ง F_1, F_2, F_3 เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง ต่อเนื่องในโดเมนที่รวม S และ C แล้ว

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\text{curl } \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\bullet \text{ กรณีที่ 1 } \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\text{curl } \vec{F}) \cdot \pm \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \, dA$$

$$\text{เมื่อ } \vec{n} = \pm \frac{\nabla f}{|\nabla f|}, dS = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f|} \, dA$$

และ R คือบริเวณที่เป็นเงาของพื้นผิว S บนระนาบ

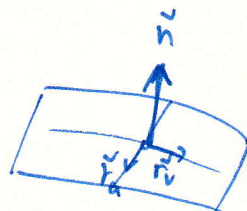
(explicit function)

(ปัญหาคือการแปลงเป็นพื้นที่ R)

$$\bullet \text{ กรณีที่ 2 } \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\text{curl } \vec{F}) \cdot \pm (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \, dA$$

$$\text{เมื่อ } \vec{n} = \pm \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}, dS = \frac{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \, dA$$

และ R คือบริเวณซึ่งเป็นขอบเขตของตัวแปรเสริม u, v



$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

$$\text{Stoke's } \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\text{curl } \vec{F}) \cdot \vec{n} dS$$

อินทิกรัลตามพื้นผิว

ตัวอย่าง 3.6.11. (เอกสาร: ตัวอย่างที่ 2.83 หน้า 140)

จงหาค่าของ $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ เมื่อ $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ และ S เป็นผิวของทรงพาราโบลอยด์ $z = x^2 + y^2$ และ $z \leq 1$

$$\text{curl } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\textcircled{1} \vec{p} = \vec{k}, \textcircled{2} \nabla f \cdot \vec{p} = 1 \Rightarrow |\nabla f \cdot \vec{p}| = 1$$

$$\therefore \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \cdot (-2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}) dA$$

$$= \iint_S (-2x - 2y + 1) dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-2r\cos\theta - 2r\sin\theta + 1) r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-2r^2\cos\theta - 2r^2\sin\theta + r) dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2r^3}{3}\cos\theta - \frac{2r^3}{3}\sin\theta + \frac{r^2}{2} \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2}{3}\cos\theta - \frac{2}{3}\sin\theta + \frac{1}{2} \right] d\theta$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\sin\theta + \frac{2}{3}\cos\theta + \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi$$

ตัวอย่าง 3.6.12: กำหนดสนามเวกเตอร์

$$\vec{F} = (x^2 + z)\vec{i} + (y^2 + 2x)\vec{j} + (z^2 - y)\vec{k}$$

จงหา $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ เมื่อกำหนดเส้นโค้ง C เป็นเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันระหว่างทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ และกรวย $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ เมื่อกำหนดทิศทางทวนเข็มนาฬิกาการรอบแกน z เมื่อมองจากด้านบน

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} dA$$

$$\text{Curl } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + z & y^2 + 2x & z^2 - y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\text{Curl } \vec{F} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\therefore \iint_R \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} dA = 0$$

$$\text{กรวย } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ ตัดกับ}$$

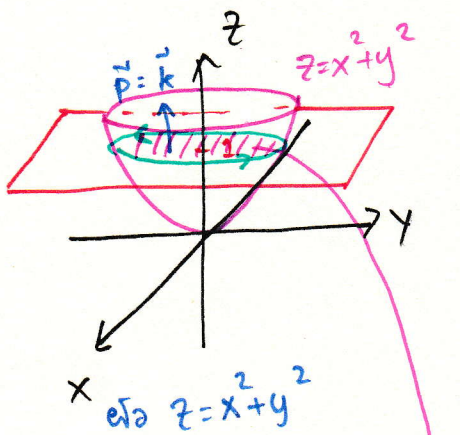
$$\text{กรวย } z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Downarrow$$

$$2z^2 = 1$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

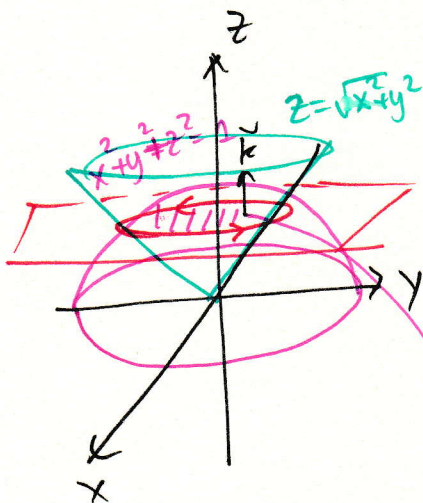
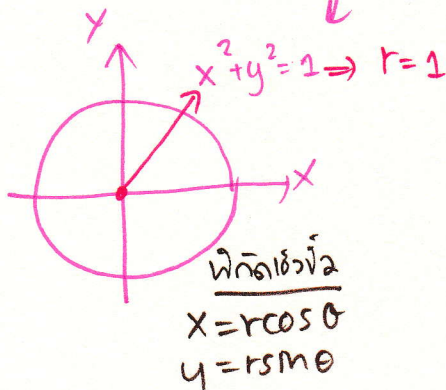
$$= \pi$$



$$\text{ผิว } z = x^2 + y^2$$

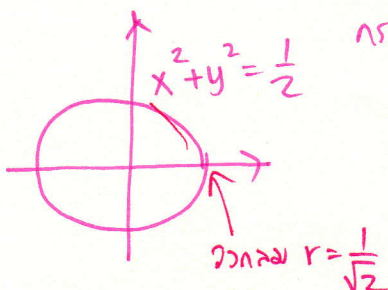
$$\text{สมการ } f(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = 0$$

$$\nabla f = -2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}$$



$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$\vec{n} = \vec{k}$$



Line integral

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt.$$



Green's Theorem

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Surface integral

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_R \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \vec{N}(u,v) du dv.$$

Divergence Thm

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_T \text{div } \vec{F} dV.$$

Stoke's Thm

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\text{curl } \vec{F}) \cdot \vec{n} dS.$$

