

Review

Vector Calculus → Vector : dot, cross, normalization

1 Vector field / Scalar field

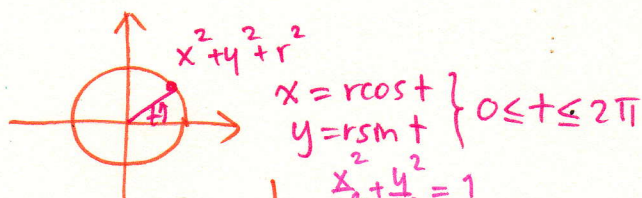
2 Parametric equation

• ตัวแปรเดียว $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}; a \leq t \leq b$
เส้นโค้งในสามมิติ

• ตัวแปรสองตัว $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}; a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$
surface

ประเด็นที่ 1 $\vec{r}(t)$ (เส้นโค้งในสามมิติ)

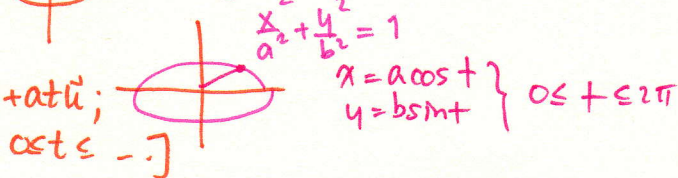
(2D) วงกลม, วงรี



(3D) เส้นโค้ง, Helix

$$\vec{r}(t) = r \cos t \vec{i} + r \sin t \vec{j} + at \vec{k};$$

- จุด, จุด → พิกัดของเส้นโค้ง
- จุด, เวลาต่อ



Q $\vec{r}(t)$ จะอะไรที่บอกได้บ้าง?

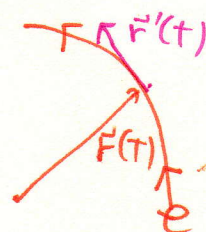
1 $\vec{r}'(t)$: บอกทิศทางของเส้นโค้งที่จุดนั้น

↳ 1 $\vec{r}'(t)$ คือเวกเตอร์ที่ชี้ตามทิศทางของเส้นโค้ง

- unit vector ที่ชี้ตาม

- สามารถหาเส้นสัมผัสเส้นโค้งได้

$$\vec{q}(w) = \vec{r}(t) + w \vec{r}'(t)$$



2 $\vec{r}(t)$ คือ สามารถหาตำแหน่งของจุดบนเส้นโค้ง

↳ 2 $\vec{r}'(t)$ คือ เวกเตอร์ความเร็ว

$\vec{r}''(t)$ คือ เวกเตอร์ความเร่ง

ความเร็วในแนวสัมผัส $\vec{a}_T = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \right) \vec{v}$
ความเร่งในแนวสัมผัส $\vec{a}_N = \vec{a} - \vec{a}_T$

3 สามารถหาความยาวได้

จาก a ถึง b : $\int_a^b \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} dt$

Parametrize ให้อยู่ในรูปของพารามิเตอร์

$\vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}(s)$ ① แล้ว $s(t) = \int_a^t \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} dt$

$s = g(t) \Rightarrow t = \sim$

② $\vec{r}(s) = \boxed{\phantom{\vec{r}(s) = \dots}}$;
 $\phantom{\vec{r}(s) = \dots} \leq s \leq \phantom{\vec{r}(s) = \dots}$

④ $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \xrightarrow{①} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$

② $F = [F_1, F_2, F_3], d\vec{r} = [dx, dy, dz]$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

$$= \int_a^b F_1 x'(t) dt + F_2 y'(t) dt + F_3 z'(t) dt.$$

บทนิยาม $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ Green's Thm



$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dR$$

ท.ท.กรีนสำหรับโดเมน

$$A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

⊗ ทิศวนรอบโดเมนที่ชี้ขึ้น

โจทย์ข้อที่ 2 $\vec{f}(u, v)$ (ฟังก์ชันเวกเตอร์)

๙ $f(x, y, z)$ ~~๙๙~~, $\vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k}$

① Directional derivative $\rightarrow$ gradient $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$

$\downarrow$

$$D_{\vec{b}} f = \nabla f \cdot \vec{b} \leftarrow \text{normal vector}$$

(b เป็นเวกเตอร์หน่วย)

• ∇f : เวกเตอร์ชี้ทางลาด $\rightarrow \vec{n} = \pm \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$

• ∇f ทิศชี้ทางลาดชันมากที่สุด, เวกเตอร์หน่วยชี้ทางลาด $|\nabla f|$

② $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$

$\downarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

อนุพันธ์ย่อยของ f ต่อ x, y, z

③ ~~div~~ $\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$

$\text{curl } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$

3] $f(x, y, z) \rightarrow \text{parametrization } (u, v)$

$\downarrow$
 $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}; \quad - \leq u \leq - , - \leq v \leq -$

$\downarrow$
 $\vec{n} = \pm \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \rightarrow \vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$

4] area element $\vec{r}(u, v)$ $A(s) = \iint_S |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$

5] Surface integral

Flux $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_R \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{N}(u, v) du dv$

Divergence $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \text{div } \vec{F} dV$

Stoke's $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\text{curl } \vec{F}) \cdot \vec{n} ds$

