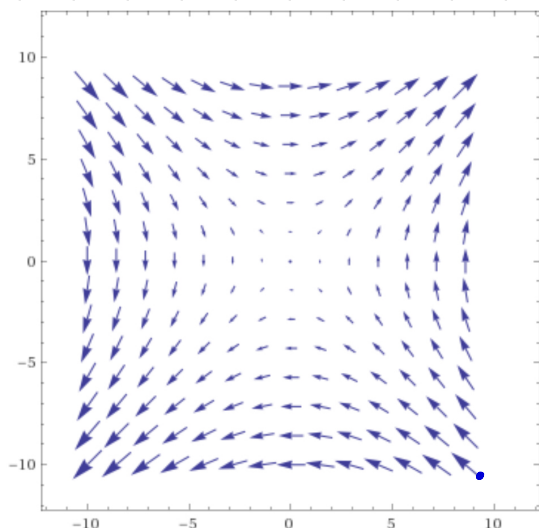


แบบฝึกหัดทบทวนชุดที่ 1

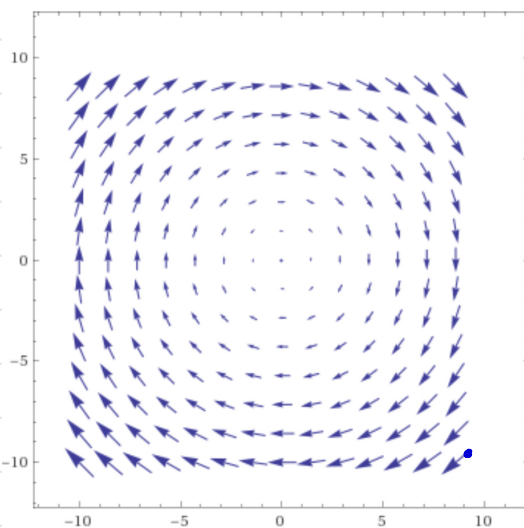
11

- ① a: $\vec{f}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ b: $\vec{f}(x,y) = y\vec{i} + x\vec{j}$ c: $\vec{f}(x,y) = x\vec{i} - y\vec{j}$ d: $\vec{f}(x,y) = y\vec{i} - x\vec{j}$



รูปที่ 1
พิจารณาที่จุด $(10, -10)$

จากรูป ควรได้เวกเตอร์ในทิศประมาณ $-10\vec{i} + 10\vec{j}$
ดังนั้น $\vec{f}(10, -10) = -10\vec{i} + 10\vec{j}$ เมื่อเลือก (b)



รูปที่ 2
พิจารณาที่จุด $(10, -10)$

จากรูป ควรได้เวกเตอร์ในทิศประมาณ $-10\vec{i} - 10\vec{j}$
ดังนั้น $\vec{f}(10, -10) = -10\vec{i} - 10\vec{j}$ เมื่อเลือก (d) #

- ② $\vec{r}(t) = e^t \vec{i} + 2\sqrt{2}e^{t/2} \vec{j} + t\vec{k}$; $t \geq 0$
พิจารณา $\vec{r}'(t) = e^t \vec{i} + \sqrt{2}e^{t/2} \vec{j} + \vec{k}$
 $\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t) = e^{2t} + 2e^t + 1$

ดังนั้น ได้ระยะทางเคลื่อนที่ได้ $\int_0^1 \sqrt{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)} dt = \int_0^1 \sqrt{e^{2t} + 2e^t + 1} dt = \int_0^1 \sqrt{(e^t + 1)^2} dt$
 $= \int_0^1 (e^t + 1) dt = [e^t + t]_0^1$
 $= [e^1 + 1 - e^0 - 0] = e$ #

- ③ $\vec{r}(t) = t\vec{i} + (4t - t^2)\vec{j}$ เมื่อ $t \geq 0$

(3.1) หาเวกเตอร์ความเร็ว $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \vec{i} + (4 - 2t)\vec{j}$

พิจารณาจากสมการ $\vec{r}(t)$ ได้ว่า $x = t$, $y = 4t - t^2$

ค่าจุด (3,3) ได้ว่า $3 = t$

$\therefore \vec{r}'(t) = \vec{i} + (4 - 2(3))\vec{j} = \vec{i} - 2\vec{j}$

(3.2) หาเวกเตอร์ความเร่ง $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = -2\vec{j}$

ความเร่งในแนวสัมผัส : $\vec{a}_T = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \right) \vec{v}$

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{v} = -8 + 2t$, $\vec{v} \cdot \vec{v} = 1 + (4 - 2t)^2$

ที่จุด $t=3 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{v} = -2$, $\vec{v} \cdot \vec{v} = 2$ ดังนั้น $\vec{a}_T = \frac{-2}{2}(\vec{i} - 2\vec{j}) = -\vec{i} + 2\vec{j}$

ความเร่งในแนวตั้งฉาก : $\vec{a}_N = \vec{a} - \vec{a}_T = (-2\vec{j}) - (-\vec{i} + 2\vec{j}) = \vec{i} - 4\vec{j}$

ที่ $t=3$

(3.3) t ที่ทำให้เวกเตอร์ $\vec{v}(t)$, $\vec{r}(t)$ ตั้งฉากกัน : Set $\vec{v}(t) \cdot \vec{r}(t) = 0$

$\therefore (\vec{i} + (4 - 2t)\vec{j}) \cdot (-2\vec{j}) = 0 \Leftrightarrow -2(4 - 2t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ #

④ $\vec{r}(t) = \cos(2t)\vec{i} + \sin(2t)\vec{j} + \frac{1}{\pi}t^2\vec{k} ; t \geq 0$

(4.1) เวกเตอร์สัมผัส: $\vec{r}'(t) = -2\sin(2t)\vec{i} + 2\cos(2t)\vec{j} + \frac{2}{\pi}t\vec{k}$
 ที่ $t=\pi$: $\vec{r}'(\pi) = -2\sin(2\pi)\vec{i} + 2\cos(2\pi)\vec{j} + \frac{2}{\pi}\pi\vec{k}$
 $= 2\vec{j} + 2\vec{k}$

(4.2) เวกเตอร์ $\vec{q}(w) = \vec{r}(t) + w\vec{r}'(t)$

ที่ $t=\pi$; $\vec{r}(\pi) = \cos(2\pi)\vec{i} + \sin(2\pi)\vec{j} + \frac{1}{\pi}(\pi^2)\vec{k} = \vec{i} + \pi\vec{k}$

$\vec{q}(w) = \vec{r}(\pi) + w\vec{r}'(\pi)$
 $= (\vec{i} + \pi\vec{k}) + w(2\vec{j} + 2\vec{k})$
 $= \vec{i} + 2w\vec{j} + (\pi + 2w)\vec{k}$

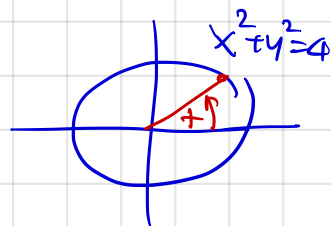
#

⑤ (5.1) ตรวจสอบ $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ และระนาบ $z=1$

แทน $z=1$ ได้ว่า $x^2 + y^2 + 1 = 5$ คือ $x^2 + y^2 = 4$

ให้ $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ โดยที่ $0 \leq t \leq 2\pi$

$\therefore \vec{r}(t) = (2\cos t)\vec{i} + (2\sin t)\vec{j} + \vec{k} ; 0 \leq t \leq 2\pi$

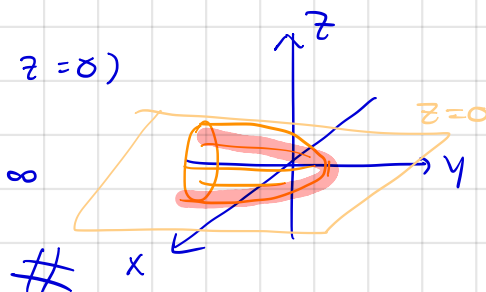


(5.2) พาราโบลอยด์ $y = 1 - x^2 - z^2$ และระนาบ xy (นั่นคือ $z=0$)

แทน $z=0$ ได้ว่า $y = 1 - x^2$

ให้ $x = t$, $y = 1 - t^2$ โดยที่ $-\infty < t < \infty$

$\therefore \vec{r}(t) = t\vec{i} + (1 - t^2)\vec{j} ; -\infty < t < \infty$



⑥ $T(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$

(6.1) เวกเตอร์ทังเจนต์ จากที่ $T(x, y, z) = 0$ ที่จุด $P(3, 4, 5)$

เรา $\nabla T(x, y, z) = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}$

$= (10x - 3y + yz)\vec{i} + (-3x + xz)\vec{j} + (xy)\vec{k}$

$\therefore \nabla T(3, 4, 5) = (30 - 12 + 20)\vec{i} + (-9 + 15)\vec{j} + (12)\vec{k}$

$= 38\vec{i} + 6\vec{j} + 12\vec{k}$ ดังนั้นได้เวกเตอร์สัมผัส คือ $\pm \nabla f = \pm (38\vec{i} + 6\vec{j} + 12\vec{k})$

(6.2) เวกเตอร์ $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{a}$

$\therefore D_{\vec{u}}T = \nabla f(3, 4, 5) \cdot \vec{u}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}(38\vec{i} + 6\vec{j} + 12\vec{k}) \cdot (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}(38 + 6 - 12) = \frac{32}{\sqrt{3}}$

อัตราการเปลี่ยนแปลงที่จุด $P(3, 4, 5)$ เมื่อขยับ ดึงขั้วอัตรา $32^\circ \text{C}/\text{m}^3$

(6.3) ทิศที่ลดลงมากที่สุด คือทิศ $-\nabla f$ คือทิศ $-38\vec{i} - 6\vec{j} - 12\vec{k}$

⑦ $\nabla f = (2xy + 3z^2)\vec{i} + (x^2 + 6y^2z)\vec{j} + (2y^3e^z + 6xz)\vec{k}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3z^2 \Rightarrow \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int (2xy + 3z^2) dx = x^2y + 3xz^2 + h(y, z)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 6y^2z \Rightarrow \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int (x^2 + 6y^2z) dy = x^2y + 2y^3z + g(x, z)$

$\frac{\partial f}{\partial z} = 2y^3e^z + 6xz \Rightarrow \int \frac{\partial f}{\partial z} dz = \int (2y^3e^z + 6xz) dz = 2y^3e^z + 3xz^2 + k(x, y)$

$\therefore h(y, z) = 2y^3e^z + C_1, g(x, z) = 3xz^2 + C_2, k(x, y) = x^2y + C_3$

$\therefore f(x, y, z) = 2y^3e^z + 3xz^2 + x^2y + C ; (C = C_1 + C_2 + C_3)$

#

⑧ $g = xy^2z$, $\vec{F} = -y^2\vec{i} - z^2\vec{j} - x^3\vec{k}$

(8.1) $\nabla \cdot (\nabla g)$ จินตนาการ $\nabla g = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2z)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(xy^2z)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z)\vec{k}$

$= y^2z\vec{i} + 2xy^2z\vec{j} + xy^2\vec{k}$
 $\therefore \nabla \cdot (\nabla g) = \frac{\partial}{\partial x}(y^2z) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(xy^2) = 2xz$

(8.2) $\text{div}(\nabla \times \vec{F})$ จินตนาการ $\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & -z & -x^3 \end{vmatrix}$
 $= 2z\vec{i} - (-3x^2)\vec{j} + (-1)\vec{k} = 2z\vec{i} + 3x^2\vec{j} - \vec{k}$

$\therefore \text{div}(\nabla \times \vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F})$
 $= \frac{\partial}{\partial x}(2z) + \frac{\partial}{\partial y}(3x^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-1) = 0$ #

⑨ $\vec{F}(x,y) = \cos x\vec{i} + y^3\vec{j}$ เมื่อ $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + t^3\vec{j}$; $0 \leq t \leq \pi$
 $\otimes \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} + 3t^2\vec{j}$

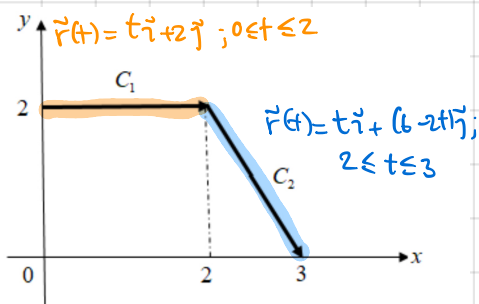
ดังนั้น $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^\pi (\cos(2t)\vec{i} + t^3\vec{j}) \cdot (2\vec{i} + 3t^2\vec{j}) dt$
 $= \int_0^\pi (2\cos 2t + 3t^5) dt$
 $= 2 \left[\frac{\sin 2t}{2} + \frac{t^6}{6} \right]_0^\pi = \frac{2\pi^6}{6}$ #

⑩ $\int_C e^{2x} dx + xy dy + \frac{1}{z} dz$ เมื่อ $\vec{r}(t) = t\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{1}{t^2}\vec{k}$ จากระดับ $(1, 3, 1)$ ถึง $(4, 3, \frac{1}{16})$

จินตนาการ $x=t, y=3, z=\frac{1}{t^2}$ } 7601 จุด $(1, 3, 1)$ คือที่ $t=1$
 ดังนั้น $dx=dt, dy=0, dz=-\frac{2}{t^3}dt$ } จุด $(4, 3, \frac{1}{16})$ คือที่ $t=4$

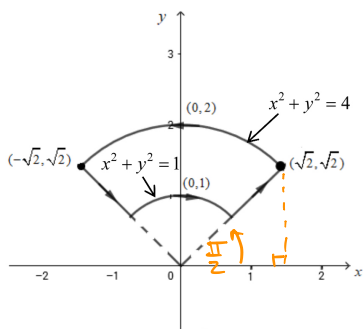
$\therefore \int_C e^{2x} dx + xy dy + \frac{1}{z} dz = \int_1^4 (e^{2t} dt + (t^2)(-\frac{2}{t^3}) dt)$
 $= \int_1^4 (e^{2t} - \frac{2}{t}) dt = \left[\frac{e^{2t}}{2} - 2\ln|t| \right]_1^4$
 $= \frac{e^8}{2} - 2\ln 4 - \frac{e^2}{2} + 0 = \frac{e^8}{2} - \ln 16 - \frac{e^2}{2}$ #

⑪ $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{i} + (2x+y)\vec{j}$



เรา $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$
 $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 (t^2\vec{i} + (2t+2)\vec{j}) \cdot (t\vec{i}) dt = \int_0^2 t^3 dt = \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$
 $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_2^3 (t^2\vec{i} + (6-2t)\vec{j}) \cdot (t\vec{i} - 2\vec{j}) dt = \int_2^3 (t^3 - 12t) dt = \left[\frac{t^4}{4} - 6t^2 \right]_2^3$
 $= (9 - 36) - \left(\frac{8}{3} - 24 \right) = -\frac{17}{3}$
 $\therefore \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{8}{3} - \frac{17}{3} = -\frac{9}{3} = -3$ #

12



พิกัดเชิงขั้ว $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

$\therefore$ วงกลม $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow r = 2$

วงกลม $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow r = 1$

จากภาพ $\sqrt{2} = 2 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

ทำนองเดียวกัน $-\sqrt{2} = 2 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}$

หา $\oint (-2y^2) dx + 5dy$

นิยามว่า $\vec{F} = (-2y^2)\vec{i} + 5\vec{j}$

$\therefore \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 + 4y = 4y$

$\therefore \oint (-2y^2) dx + 5dy = \iint 4y dA$

$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_1^2 (4r \sin \theta) r dr d\theta = 4 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_1^2 r^2 \sin \theta dr d\theta$

$= 4 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left[\frac{r^3}{3} \sin \theta \right]_1^2 d\theta$

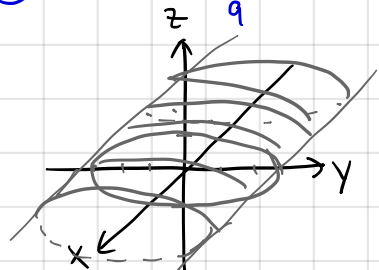
$= \frac{28}{3} \cos \theta \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4}$

$= \frac{28}{3} \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \frac{28\sqrt{2}}{3} \quad \#$

$= 4 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) \sin \theta d\theta$

$= -\frac{28}{3} \left[\cos \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} \right]$

13 (13.1) $\frac{y^2}{9} + z^2 = 1 \quad ; \quad -1 \leq x \leq 3$



ให้ $x = u$ ดังนั้น $-1 \leq u \leq 3$

สมมติ $y = 3 \cos v$

และ $z = \sin v$

$\left. \begin{matrix} y = 3 \cos v \\ z = \sin v \end{matrix} \right\} 0 \leq v \leq 2\pi$

$\therefore \vec{r}(u,v) = u\vec{i} + 3\cos v\vec{j} + \sin v\vec{k} \quad ; \quad -1 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\pi$

(13.2) $x + 2y = z^3 \quad ; \quad -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

ให้ $z = u \quad ; \quad y = v$ นั่นคือ $0 \leq v \leq 1$

$\therefore x = z^3 - 2y = u^3 - 2v$

จาก $-1 \leq x \leq 1$ ได้ว่า $-1 \leq u^3 - 2v \leq 1$

นั่นคือ $-1 \leq -1 + 2v \leq u^3 \leq 1 + 2v \leq 3$

$\therefore -1 \leq u \leq (3)^{1/3}$

ดังนั้น $\vec{r}(u,v) = (u^3 - 2v)\vec{i} + v\vec{j} + u\vec{k} \quad ; \quad -1 \leq u \leq 3^{1/3}, 0 \leq v \leq 1$

14 $\vec{r}(u,v) = e^u v \vec{i} + 12\vec{j} + 2v \sin u \vec{k}$

หา $\vec{n} = \pm \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$: $\vec{r}_u = e^u v \vec{i} + 2v \cos u \vec{k}$
 $\vec{r}_v = e^u \vec{i} + 2 \sin u \vec{k}$

$\therefore \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^u v & 0 & 2v \cos u \\ e^u & 0 & 2 \sin u \end{vmatrix} = -(2e^u v \sin u - 2ve^u \cos u)\vec{j} = -2ve^u (\cos u - \sin u) \vec{j}$

$\therefore \vec{n} = \pm \frac{-2ve^u (\cos u - \sin u) \vec{j}}{2ve^u (\cos u - \sin u)} = \pm \vec{j}$

#

(15) $\vec{F}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (3-u)\vec{k}$; $-1 \leq u \leq 1$, $2 \leq v \leq 3$

พ.น.ของ $A(S) = \iint_S |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$.

$$\therefore \begin{cases} \vec{r}_u = \vec{i} - \vec{k} \\ \vec{r}_v = \vec{j} \end{cases} \quad \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{k}$$

$$\therefore |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{2}$$

$$\therefore A(S) = \iint_S |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv = \int_{-1}^1 \int_2^3 \sqrt{2} du dv$$

$$= \sqrt{2} \int_2^3 2 dv = 2\sqrt{2} \quad \#$$

(16) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} - \tan y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{F}(u,v) = \cos v\vec{i} + u\vec{j} + \sin v\vec{k}$; $-1 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \pi$

พ.น. $\vec{r}_u = v\vec{j}$, $\vec{r}_v = -\sin v\vec{i} + u\vec{j} + \cos v\vec{k}$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & v & 0 \\ -\sin v & u & \cos v \end{vmatrix} = v\cos v\vec{i} + v\sin v\vec{k}$$

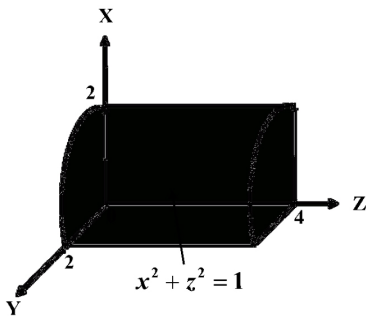
เลือกทิศตรงข้ามคือเลือก $\vec{n} = -v\cos v\vec{i} - v\sin v\vec{j}$

qen flux: $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_0^\pi \int_{-1}^1 (\cos v\vec{i} - \tan(uv)\vec{j} + \sin v\vec{k}) \cdot (-v\cos v\vec{i} - v\sin v\vec{k}) du dv$

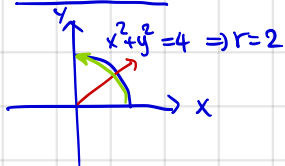
$$= \int_0^\pi \int_{-1}^1 (-v\cos^2 v - v\sin^2 v) du dv$$

$$= \int_0^\pi \int_{-1}^1 (-v) du dv = \int_0^\pi -v(2) dv = -2 \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^\pi = -\pi^2 \quad \#$$

(17)



เลือกทิศตรงข้ามคือเลือก



(17.2)

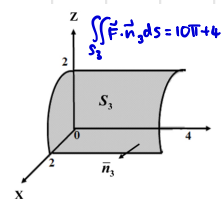
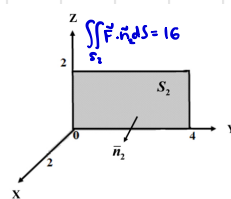
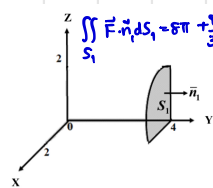
$\vec{F} = (2x+y)\vec{i} + (2y+z)\vec{j} + 3z\vec{k}$

(17.1) $\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_T \text{div } \vec{F} dV$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2x+y) + \frac{\partial}{\partial y}(2y+z) + \frac{\partial}{\partial z}(3z) = 2 + 2 + 3 = 7$$

$$\therefore \iiint_T \text{div } \vec{F} dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^4 7 r dr dz d\theta = 7 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 4r dr d\theta = 28 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 d\theta$$

$$= 28 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{8} = 28\pi$$



1) $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 28\pi - 8\pi - \frac{8}{3} = 20\pi - \frac{8}{3}$

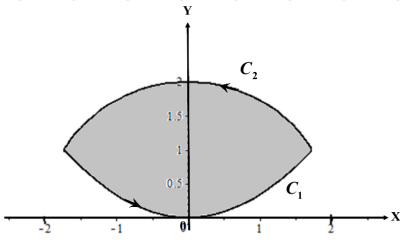
2) $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = -(28\pi - 16) = -28\pi + 16$

3) $\iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 28\pi - 10\pi - 4 = 18\pi - 4$

18

$$C_1: \vec{r}(t) = t\vec{i} + \frac{t^2}{3}\vec{j} \quad ; \quad -\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$$

$$C_2: \vec{r}(t) = 2\cos t\vec{i} + 2\sin t\vec{j} \quad ; \quad \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}$$



$$\text{nn } A = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$$

use path C_1 : $x = t, y = \frac{t^2}{3}$
 $dx = dt, dy = \frac{2}{3}t dt$

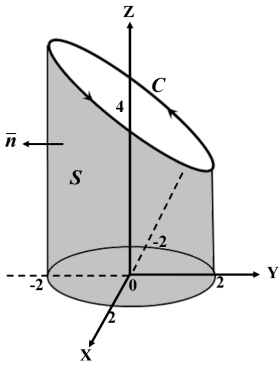
$$\int_{C_1} x dy - y dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} t \cdot \frac{2}{3} dt + \frac{t^2}{3} dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

use path C_2 : $x = 2\cos t, y = 2\sin t$
 $dx = -2\sin t dt, dy = 2\cos t dt$

$$\int_{C_2} x dy - y dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} 4\cos^2 t dt + 4\sin^2 t dt = 4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} dt = 4 \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{16\pi}{6} = \frac{8\pi}{3}$$

$$\therefore \text{w.n. } A = \oint_C x dy - y dx = \int_{C_1} + \int_{C_2} = 2\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3} \quad \#$$

19



- $\vec{F}(u, v) = 2\cos u \vec{i} + 2\sin u \vec{j} + v\vec{k} ; 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 4 - \sin u$
- $\text{curl } \vec{F} = \vec{i} + \vec{k}$
- เวกเตอร์ตั้งฉากกับผิวคือ $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$.

$$\text{nn } \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\text{curl } \vec{F}) \cdot \vec{n} ds.$$

use $\vec{n}$: $\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v / |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$
 ดังนั้น $\vec{r}_u = -2\sin u \vec{i} + 2\cos u \vec{j}$
 $\vec{r}_v = \vec{k}$

$$\therefore \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\sin u & 2\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cos u \vec{i} + 2\sin u \vec{j}$$

$$\therefore \iint_S (\text{curl } \vec{F}) \cdot \vec{n} ds = \int_0^{2\pi} \int_0^{4-\sin u} (\vec{i} + \vec{k}) \cdot (2\cos u \vec{i} + 2\sin u \vec{j}) dv du$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{4-\sin u} (2\cos u) dv du$$

$$= \int_0^{2\pi} 8\cos u - \underbrace{2\cos u \sin u}_{\cos 2u} du$$

$$= 8\sin u - \frac{\sin 2u}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad \#$$