Continuity in Applications

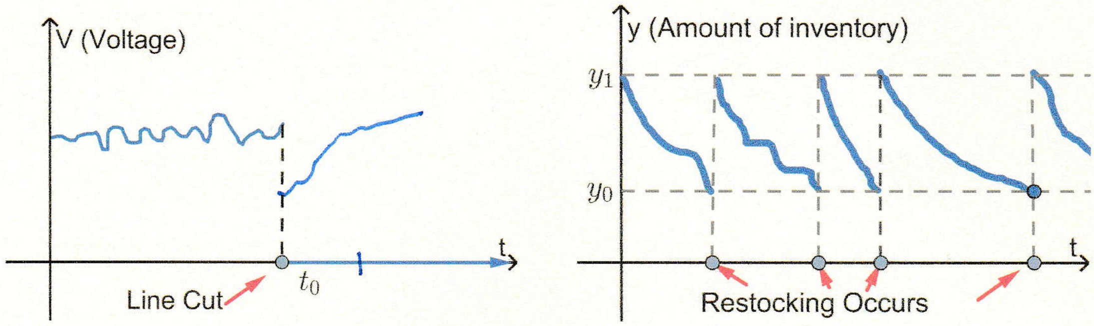
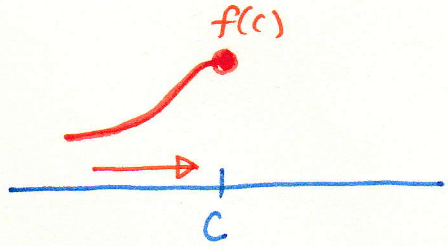


Figure 1.11: Examples of discontinuity

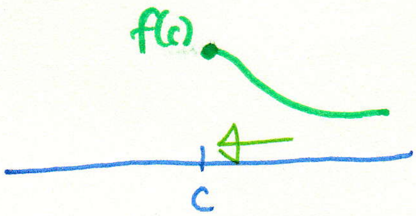
1.3.1 Continuity on an Interval

We say a function f is ***continuous from the left*** (ซ้าย) at c if



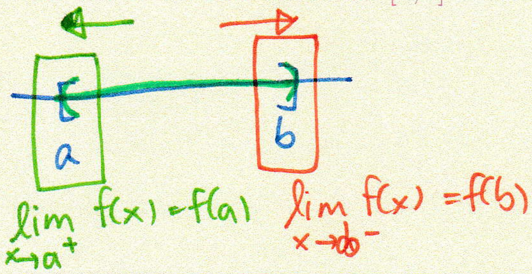
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$$

and is ***continuous from the right*** (ขวา) at c if



$$\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c).$$

> DEFINITION A function f is said to be ***continuous on a closed interval*** $[a, b]$ if the following conditions are satisfied:
>
> 1. f is continuous on (a, b).
> 2. f is continuous from the right at a.
> 3. f is continuous from the left at b.



Example 1.15 Explain the continuity of the function $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ on the interval $[-3, 3]$

Solution.

f มีความต่อเนื่องที่ $x = c$.

① $f(c)$ หาค่าได้

② $\lim_{x\to c} f(x)$ มีค่า $\begin{cases} \lim_{x\to c^+} f(x) \\ = \\ \lim_{x\to c^-} f(x) \end{cases}$

③ $f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$.

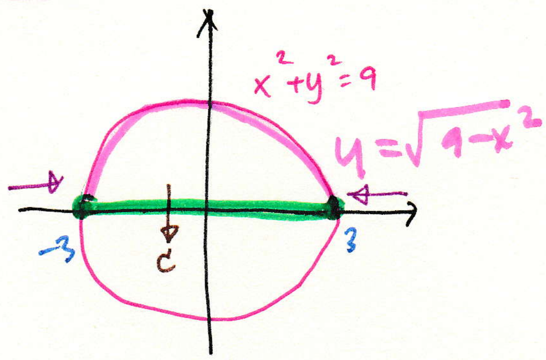
Ex 1.15 function $y = \sqrt{9-x^2}$; $y \geq 0$

$\downarrow$

$y^2 = 9 - x^2$

$x^2 + y^2 = 9$

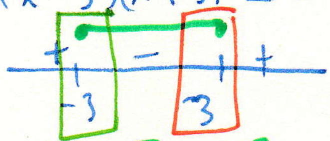
$(x^2 + y^2 = r^2)$



Domain ของ $y = \sqrt{9-x^2}$

$9 - x^2 \geq 0$

$x^2 - 9 \leq 0 \longrightarrow (x-3)(x+3) \leq 0$



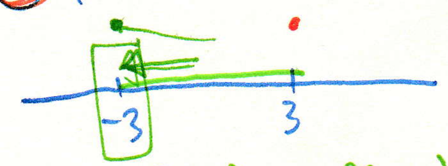
$D_f = [-3,3]$

f ต่อเนื่องบน $[-3,3]$

① f ต่อเนื่องบน $(-3,3)$

② f ต่อเนื่องทางขวาที่ $x = -3$

③ f ต่อเนื่องทางซ้ายที่ $x = 3$.



① จะแสดงว่าทุกจุดใน $(-3,3)$ ต่อเนื่อง

ให้ $c \in (-3,3)$ จะแสดงว่า f ต่อเนื่องที่ c.

1 $f(c) = \sqrt{9-c^2}$

2 $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-c^2}$

3 $f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$

$\therefore$ f ต่อเนื่องทุกจุด ใน $(-3,3)$

② จะแสดงว่า $\lim_{x\to -3^+} f(x) = f(-3)$

1 $f(-3) = 0$

2 $\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \sqrt{9-x^2} = 0$

3 $f(-3) = \lim_{x\to -3^+} f(x)$ $\therefore$ f cont ด้านขวา ที่ $x = -3$

③ จะแสดงว่า $\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$

1 $f(3) = 0$

2 $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{9-x^2} = 0$

3 $f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x)$ $\therefore$ f cont ด้านซ้าย ที่ $x = 3$

$\therefore$ f cont บน $[-3,3]$

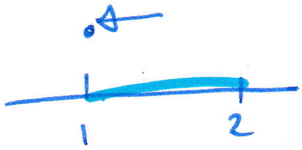
แบบทดสอบย่อย

เพื่อเช็คชื่อเข้าชั้นเรียน ประจำวันอังคารที่ 15 มกราคม พ.ศ.2562

ชื่อ-สกุล.. รหัสนักศึกษา............................. ลำดับที่...........

พิจารณาฟังก์ชัน g ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & , \boxed{x \le 1} \\ 5x - 1 & , \boxed{1 < x < 2} \\ 9 & , \boxed{x \ge 2} \end{cases}$$



1. จงแสดงว่า g มีความต่อเนื่องที่ $x = 2$

2. g ต่อเนื่องบนช่วง $[1, 2]$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

① $\boxed{1}$ $g(2) = 9$

$\boxed{2}$ $\lim_{x \to 2} g(x)$ exists?

↳ $\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} 5x - 1 = 9$

↳ $\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} 9 = 9$

$\therefore \lim_{x \to 2} g(x) = 9$

$\boxed{3}$ $g(2) = \lim_{x \to 2} g(x)$

$\therefore$ g ต่อเนื่องที่ $x = 2$

② จะแสดงว่า g ต่อเนื่องบน $[1,2]$ ไหม?

$\boxed{1}$ g ต่อเนื่องบน $(1,2)$

$\boxed{2}$ g ต่อเนื่องทางขวา ที่ $x = 1$

$\boxed{3}$ g ต่อเนื่องทางซ้าย ที่ $x = 2$

$\boxed{1}$ บน $(1,2)$

ให้ $c \in (1,2)$

(1) $g(c) = 5c - 1$

(2) $\lim_{x \to c} g(x) = 5c - 1$

(3) $\lim_{x \to c} g(x) = f(c)$

$\therefore$ f ต่อเนื่องบน $(1,2$

$\boxed{2}$ แสดง $\lim_{x \to 1^+} g(x) = g(1)$

(1) $g(1) = 1$

(2) $\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} 5x - 1 = 4$

(3) $g(1) \ne \lim_{x \to 1^+} g(x)$

$\therefore$ g ไม่ต่อเนื่องทางขวาที่ $x = 1$

↓

g ไม่ต่อเนื่องบน $[1,2]$

$\boxed{3}$ $\lim_{x \to 2^-} g(x) = g(2)$

(1) $g(2) = 9$

(2) $\lim_{x \to 2^-} g(x) = 5x - 1 = 9$

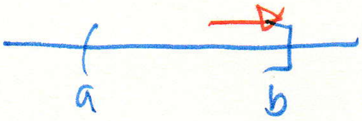
(3) $g(2) = \lim_{x \to 2^-} g(x)$

g ต่อเนื่องทางซ้ายที่ $x = 2$.

f cont บน $[a,b]$

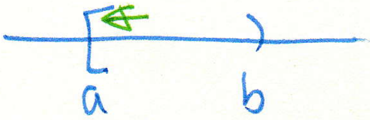
1. f cont (a,b)
2. f cont ทางขวา ที่ $x=a$
3. f cont ทางซ้าย ที่ $x=b$

f cont บน $(a,b]$



1. f cont บน (a,b)
2. f cont ทางซ้ายที่ $x=b$

f cont บน $[a,b)$



1. f cont บน (a,b)
2. f cont ทางขวาที่ $x=a$

Some Properties of Continuous Functions

THEOREM 1.5 If the functions f and g are continuous at c, then

(a) $f + g$ is continuous at c.

(b) $f - g$ is continuous at c.

(c) fg is continuous at c.

(d) f/g is continuous at c if $g(c) \neq 0$ and has a discontinuity at c if $g(c) = 0$.

Continuity of Polynomials and Rational Functions

THEOREM 1.6

(a) A polynomial is continuous everywhere.

(b) A rational function is continuous at every point where the denominator is nonzero, and has discontinuities at the points where the denominator is zero.

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

Example 1.16 For what values of x is there a discontinuity in the graph of

$$y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}?$$

Solution. f ต่อเนื่อง ยกเว้นจุดที่ ทำให้ $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\therefore (x-2)(x-3) = 0$

$\therefore x = 2, 3$

$\therefore$ ได้ว่า f ต่อเนื่องทุกจุดใน $\mathbb{R}$ ยกเว้นที่ $x = 2, 3$

($x = 2$, $x = 3$ เป็น เส้นกำกับแนวดิ่ง)

Example 1.17 Show that $|x|$ is continuous everywhere.

จะแสดง

Solution.

$\boxed{1}$ $|x|$ ต่อเนื่องบน $(0,\infty)$

$\boxed{2}$ $|x|$ ต่อเนื่องที่ $x=0$

$\boxed{3}$ $|x|$ ต่อเนื่องบน $(-\infty,0)$

$$|x| = \begin{cases} x & ; \boxed{x>0} \\ 0 & ; \boxed{x=0} \\ -x & ; \boxed{x<0} \end{cases}$$

$\boxed{1}$ บน $(0,\infty)$ $|x| = x$

เนื่องจาก $f(x)=x$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม

$\therefore f(x)=|x|$ ต่อเนื่องบน $(0,\infty)$

$\boxed{3}$ บน $(-\infty,0)$ $f(x)=|x|=-x$

เนื่องจาก $f(x)=-x$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม

$\therefore f(x)=|x|$ cont บน $(-\infty,0)$

$\boxed{2}$ (1) $f(0)=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$: $\lim\limits_{x\to 0^-} -x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

(3) $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$\therefore f$ cont ที่ $x=0 \Rightarrow f$ cont ทุกที่

1.3.2 Continuity of Compositions

THEOREM 1.7 If $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ and if the function f is continuous at L, then $\lim\limits_{x\to c} f(g(x)) = f(L)$. That is,

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\boxed{\lim_{x\to c} g(x)}\right)$$

ลิมิตของฟังก์ชันจะสามารถเข้าไปในฟังก์ชันที่ต่อเนื่องได้ (ที่จุดลิมิตนั้น)

Example 1.18 Given that $\lim\limits_{x\to 2} x^2 - 9 = -5$ find, $\lim\limits_{x\to 2} |x^2-9|$.

Solution. $\lim\limits_{x\to 2} |x^2-9|$

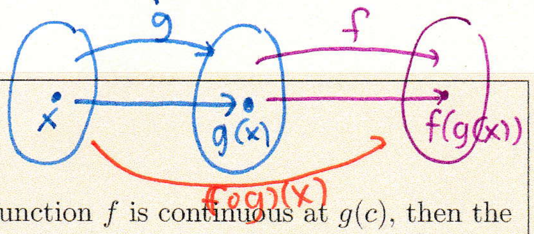
$\boxed{\text{Case}}$

$$|x^2-9| = \begin{cases} x^2-9 ; & x^2-9 \geq 0 \\ -(x^2-9) ; & x^2-9 < 0 \end{cases}$$

$$\therefore |x^2-9| = \begin{cases} x^2-9 ; & x \leq -3 \text{ หรือ } x \geq 3 \\ -(x^2-9) ; & -3 < x < 3 \end{cases}$$

ฟังก์ชัน $f(x)=|x|$ ต่อเนื่องทุกจุด

$$\therefore \lim_{x\to 2} |x^2-9| = \left|\lim_{x\to 2} x^2-9\right| = |-5| = 5 \ \#$$



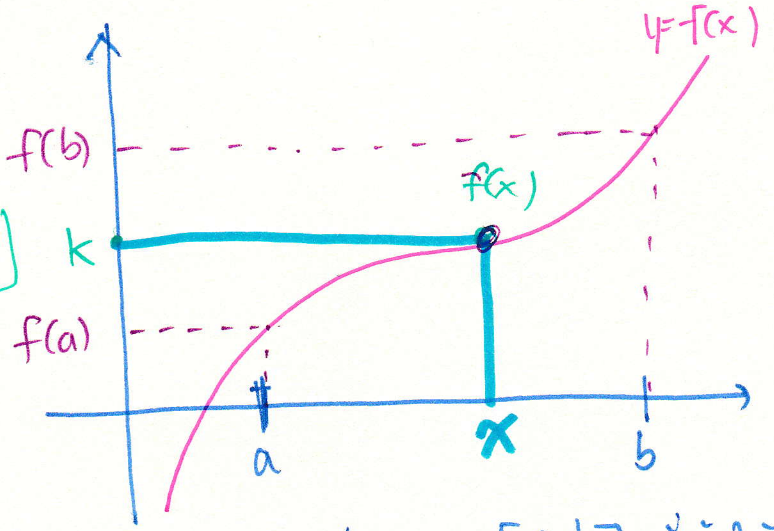
THEOREM 1.8

(a) If the function g is continuous at c, and the function f is continuous at $g(c)$, then the composition $f \circ g$ is continuous at c.

(b) If the function g is continuous everywhere, and the function f is continuous everywhere, then the composition $f \circ g$ is continuous everywhere.

* ฟังก์ชันตรีโกณมิติ, ฟังก์ชันอินเวอร์สตรีโกณ, ฟังก์ชัน expo, log ต่อเนื่องทุกจุดในโดเมนของมัน

IVT



$\boxed{f(a) \le k \le f(b)}$

$\therefore$ มี $x \in [a,b]$ ที่ทำให้
$f(x) = k$

Ex จงแสดงว่า มีรากของสมการ $x^3 - x - 1 = \boxed{0}$ ใน $[1,2]$

① เลือกฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ต่อเนื่อง

② ~~f(a)~~ k อยู่ในช่วง $[1,2] \rightarrow 1 \le k \le 2$

③

$\downarrow$

$\exists$(มี) $x \in \overset{[1,2]}{[a,b]}$ ที่ทำให้ $f(x) = 0$

---

① เลือก $f(x) = x^3 - x - 1$

$f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม $\rightarrow f$ ต่อเนื่องบน $[1,2]$

$+$

$\boxed{k = 0}$ ② $f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1$

$f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$

$\therefore \quad f(1) \le k \le f(2)$

$\downarrow$

โดย IVT ได้ว่า มี $x \in [1,2]$ ซึ่งทำให้
$f(x) = 0$

1.4 The Intermediate-Value Theorem

ทบ. ค่าระหว่างกลาง

THEOREM 1.9 (INTERMEDIATE-VALUE THEOREM) If f is continuous on a closed interval $[a, b]$ and k is any number between $f(a)$ and $f(b)$, inclusive, then there is at least one number x in the interval $[a, b]$ such that $f(x) = k$.

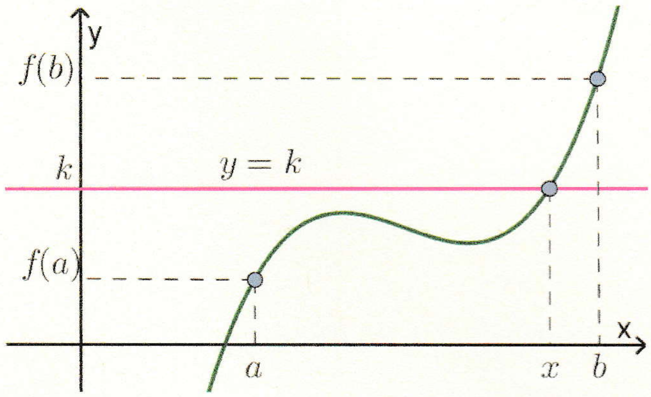


Figure 1.12: The Intermediate-Value Theorem

Example 1.19 Verify that there exists at least one root of the equation $x^3 - x - 1 = 0$ in the closed interval $[1, 2]$. Then, approximate this root to two decimal-place accuracy.

Solution.

Since $f(1) = -1$ and $f(2) = 5$, we have $f(1) \leq 0 \leq f(2)$. Therefore the root is between 1 and 2.

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$f(x)$				-0.1	0.34						

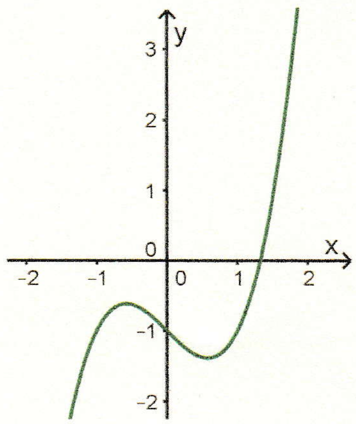


Figure 1.13: Graph of $y = x^3 - x - 1$

Since $f($1.3$) < 0$ and $f($1.4$) > 0$,
the root is between 1.3 and 1.4.

x	1.__0	1.__1	1.32	1.33	1.__4	1.__5
$f(x)$			-0.02	0.023		
x	1.__6	1.__7	1.__8	1.__9	1.__0	
$f(x)$						

Since $f($1.32$) < 0$ and $f($1.33$) > 0$,
the root is between 1.32 and 1.33.

x	1.__0	1.__1	1.__2	1.__3	1.324	1.325
$f(x)$					-0.0031	0.0012
x	1.__6	1.__7	1.__8	1.__9	1.__0	
$f(x)$						

The root of the equation $x^3 - x - 1 = 0$, that is between 1 and 2, is approximately 1.32.