

$$[1] \frac{dC}{dx} = 0$$

$$[2] \frac{du^n}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$[3] \frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$[4] \frac{d(u \cdot v)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$[5] \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$[6] \frac{d(\sqrt{u})}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx}$$

$$[7] \frac{d(\sin u)}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$[8] \frac{d(\cos u)}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$[9] \frac{d(\tan u)}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$[10] \frac{d(\cot u)}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$[11] \frac{d(\sec u)}{dx} = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$[12] \frac{d(\operatorname{cosec} u)}{dx} = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$$

$$[13] \frac{d(a^u)}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

$$[14] \frac{d(e^u)}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

$$[15] \frac{d(\log_a u)}{dx} = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx}$$

$$[16] \frac{d(\ln u)}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

u, v independent of x

$$\sin^{-1} u = \arcsin u$$

$$y = \cos(x)$$

$$[17] \frac{d(\arcsin u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$[18] \frac{d(\arccos u)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$[19] \frac{d(\arctan u)}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$[20] \frac{d(\operatorname{arccot} u)}{dx} = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$[21] \frac{d(\operatorname{arcsec} u)}{dx} = \frac{1}{|u|\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$[22] \frac{d(\operatorname{arccosec} u)}{dx} = -\frac{1}{|u|\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

Ex $y = \cos(e^{1/x})$ given $\frac{dy}{dx}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\sin(e^{1/x}) \frac{d(e^{1/x})}{dx}$$

$$= -\sin(e^{1/x}) e^{1/x} \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}$$

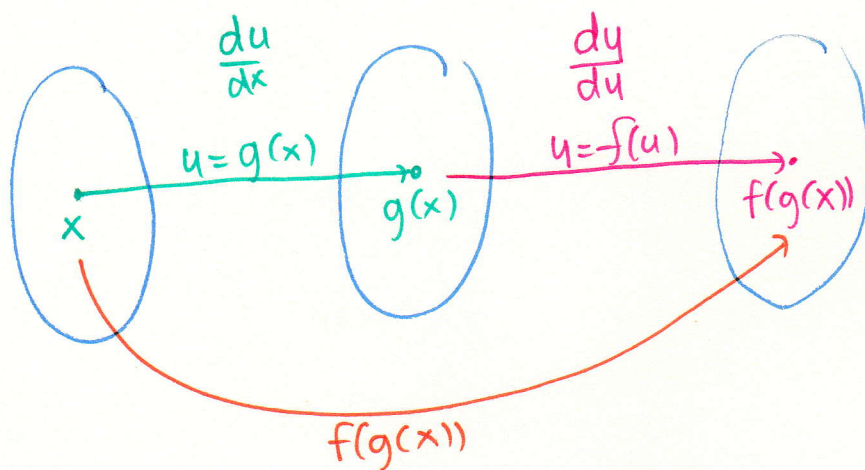
$$= -\sin(e^{1/x}) e^{1/x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \#$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sin(e^{1/x}) e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = \frac{d(x^{-1})}{dx} = -1 \cdot x^{-2} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Related Rates (ဆက်သွယ်နှုန်း)

$$y = f(u), \quad u = g(x)$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ex ၊ ။ $u(v) = e^v$, $v(s) = \ln(s)$, $s(t) = t^2$, $t(w) = -|w|$

① ရှာ $\frac{du}{dt}$

② $\left. \frac{du}{dt} \right|_{w=1}$

① $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$ $u \xrightarrow{\frac{du}{dv}} v \xrightarrow{\frac{dv}{ds}} s \xrightarrow{\frac{ds}{dt}} t \xrightarrow{\frac{dt}{dw}} w$

$$\frac{du}{dt} = e^v \cdot \frac{1}{s} \cdot 2t$$

$$= e^{\ln(s)} \cdot \frac{1}{t^2} \cdot 2t$$

$$= s \cdot \frac{1}{t^2} \cdot 2t$$

$$= t^2 \cdot \frac{1}{t^2} \cdot 2t = 2t$$

$$\begin{aligned} a^{\log_a u} &= u \\ e^{\ln u} &= u \end{aligned}$$

② $\left. \frac{du}{dt} \right|_{w=1}$ ။ $w=1$ ။ ။ $t(1) = -|1| = -1$

$$\therefore \left. \frac{du}{dt} \right|_{w=1} = \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=-1} = 2(-1) = -2.$$

3.4 Related rates

In this section, one tries to find the rate at which some quantity is changing by relating itself to other quantities, whose rates of change are known.

$$y \xrightarrow{\frac{dy}{dx}} x \xrightarrow{\frac{dx}{dt}} t$$

Example 3.13 Suppose that x, y are differentiable functions of t and are related by $y = x^4 + 5$. Find

$\frac{dy}{dt}|_{t=2}$ if $x(2) = 1$ and $\frac{dx}{dt}|_{t=2} = -2$.

ann $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

$y = x^4 + 5 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4x^3$

$\frac{dy}{dt}|_{t=2} = \frac{dy}{dx}|_{t=2} \cdot \frac{dx}{dt}|_{t=2}$

เมื่อ x เปลี่ยนกับ t . เมื่อ $t=2$ แล้ว $x(2) = 1$

$\therefore \frac{dy}{dx}|_{t=2} = \frac{dy}{dx}|_{x=1} = 4(1)^3 = 4$

$\therefore \frac{dy}{dt}|_{t=2} = (4)(-2) = -8$

Example 3.14 Air is being pumped into a spherical balloon at the rate of 6 cubic centimetres per second. What is the rate of change of the radius at the instant the volume equals 36π ? The volume

of a sphere of radius r is $\frac{4\pi r^3}{3}$.

ให้ปริมาตรของลูกบอลคือ V .

$V = \frac{4\pi r^3}{3}$

* อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของลูกบอลเทียบกับเวลา: $\frac{dV}{dt}$

$\therefore \frac{dV}{dt} = +6 \text{ cm}^3/\text{s}$

หาอนุพันธ์เทียบกับ t ทั้งสองข้าง.

$\therefore \frac{dV}{dt} = \left(\frac{4\pi}{3}\right) (3 \cdot r^2 \frac{dr}{dt})$

$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \rightarrow$ แล้ว $\frac{dr}{dt}$ เมื่อ $r=3$.

ถ้าปริมาตรเท่ากับ 36π , ให้อ่านค่า r คือ ?

$36\pi = \frac{4\pi}{3} (r^3)$

$27 = r^3$

$r = 3$

$\frac{dr}{dt}|_{r=3} = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \frac{dV}{dt}$

$= \frac{1}{4\pi (3^2)} \cdot 6 = \frac{1}{6\pi} \text{ cm/s}$

ถ้าปริมาตรของลูกบอลเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา $6 \text{ cm}^3/\text{s}$ ให้อ่านค่าปริมาตรของลูกบอลเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา $\frac{1}{6\pi} \text{ cm/s}$

THE STEPS IN SOLVING A RELATED RATES PROBLEM:

- Decide what the two variables are. ✓
- Find an equation relating them. ✓
- Take $\frac{d}{dt}$ of both sides.
- Plug in all known values at the instant in question.
- Solve for the unknown rate.

Example 3.15 A ladder 20 feet long is placed against a wall. The foot of the ladder begins to slide away from the wall at the rate of 1 ft/sec. How fast is the top of the ladder sliding down the wall when the foot of the ladder is 12 feet from the wall?

สมมติให้ ระยะระหว่าง ต้นบันได กับกำแพง แทนด้วย x
 ระยะระหว่าง พื้น กับ หัวบันได แทนด้วย y

∴ ความสัมพันธ์คือ

$$x^2 + y^2 = (20)^2$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ t ทั้งสองข้าง.

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dt}(20^2)$$

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{2x}{2y} \frac{dx}{dt}$$

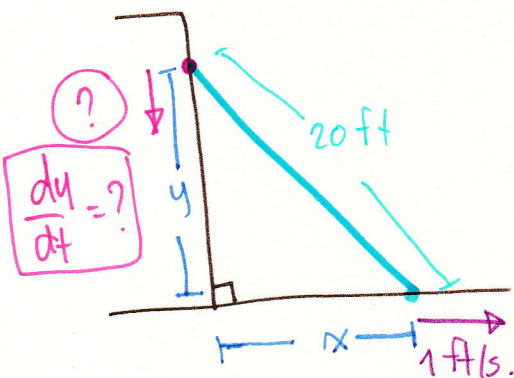
$$\therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt}$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{\substack{x=12 \\ y=16}} = -\frac{12}{16} \cdot 1 = -\frac{3}{4} \text{ ft/s.}$$

ความหมาย เมื่อระยะจาก ต้นบันได ถึง กำแพง เพิ่มขึ้น
 ด้วยอัตรา 1 ft/s.

ได้ว่า ระยะจาก หัวบันได ถึงพื้น จะ ลดลง ด้วยอัตรา

$$\frac{3}{4} \text{ ft/s.}$$



$$\frac{dx}{dt} = +1 \text{ ft/s}$$

อัตราที่หัวบันไดเคลื่อนที่ห่างจากกำแพง
 12 ฟุต จ्ञะหาว่า $y = ?$

$$\therefore (12)^2 + y^2 = 20^2$$

$$y^2 = 20^2 - 12^2$$

$$y^2 = 400 - 144$$

$$\therefore y^2 = 256$$

$$y = \pm 16$$