3.4.1 Local Linear Approximation; Differentials

Local Linear Approximation

Many functions are computable only for specific values. For other values, we need to estimate them from what is known. The line that best approximates the graph of $y = f(x)$ at $x = x_0$ is

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

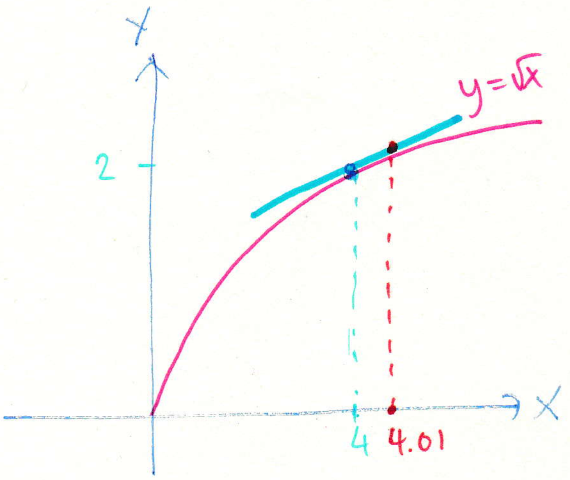
Thus, for values of x near x_0 we can approximate values of $f(x)$ by

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

This is called the ***local linear approximation*** of f at x_0. This formula can also be expressed in terms of the increment $\Delta x = (x - x_0)$ as

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Example 3.16 Use the local linear approximation to approximate $\sqrt{4.01}$.



สร้าง สมการเส้นตรง

$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

$\therefore L(4.01) = \sqrt{4} + (\frac{1}{4})(0.01)$

$= 2 + \frac{0.01}{4}$

$= 2 + 0.0025$

$L(4.01) = 2.0025$ #

① f คือ $f(x) = \sqrt{x}$

② $x_0 = 4$ (เลือกค่าที่คำนวณง่ายๆ)

③ $\Delta x = 0.01$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}$

ทบทวน Related rate

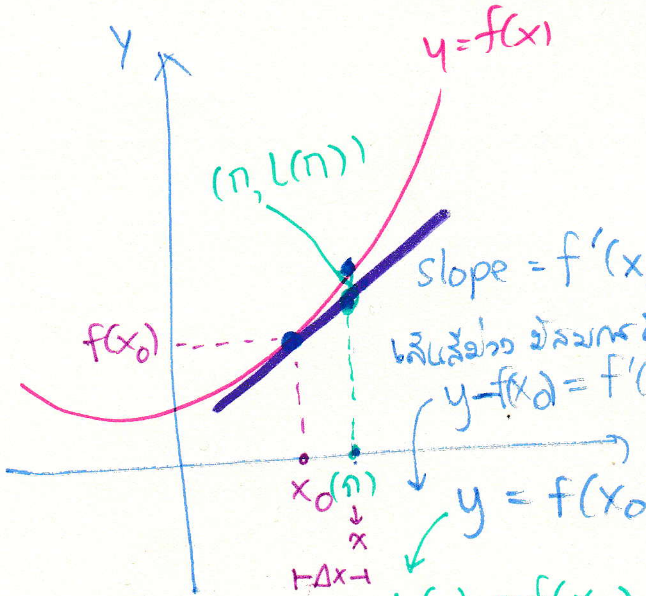
(1) สร้างความสัมพันธ์

(2) หาอนุพันธ์เทียบ t

(3) ดูข้อมูลที่โจทย์ให้

(4) สรุปคำตอบ $\longrightarrow$ เครื่องหมายจะบอกทิศทางการเปลี่ยนแปลง

Local Linear Approximation



slope $= f'(x_0)$

เส้นสัมผัส มีสมการคือ

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$L(n) = f(x_0) + f'(x_0)(n - x_0)$$

ต้องการคำนวณ $f(n)$

ถ้าเส้นตรง $L(x)$ ใกล้ๆ กับ $f(x)$ ที่จุด x_0 เราก็จะประมาณค่า $f(n)$ ได้ด้วย $L(n)$

$\longrightarrow$ หาค่าประมาณของ $f(n)$ ด้วย $L(n)$

ถ้า n อยู่ใกล้ x_0 มากๆ $\Rightarrow f(n) \approx L(n)$

$\downarrow$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = L(x)$$

ให้ $x - x_0 = \Delta x \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$

$$\therefore f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

① จุด x_0 คืออะไร

② f คืออะไร

③ Δx คืออะไร

Ex จงประมาณ $(2.01)^{11}$

① $f(x) = x^{11}$

② $x_0 = 2$

③ $\Delta x = 0.01$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

$f'(x) = 11x^{10}$

$$\therefore L(x) = (2)^{11} + (11)(2^{10})(0.01)$$
$$= 2048 + (11{,}264)(0.01)$$
$$= 2048 + 112.64$$
$$\approx 2{,}160.64$$

Ex จงประมาณ $\ln(1.001)$

① $f(x) = \ln(x)$

② $x_0 = 1$

③ $\Delta x = 0.001$

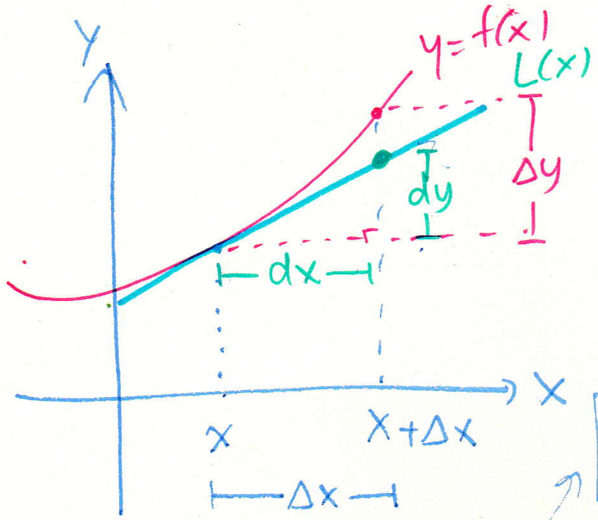
Ex จงประมาณ $(1.98)^{100}$

① $f(x) = x^{100}$

② $x_0 = \boxed{1}$, 2

③ $\Delta x = \boxed{0.98}$, -0.02

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$L(1.98) = f(2) + f'(2)(\underbrace{1.98 - 2}_{\Delta x})$$



อัตราส่วนของ
ความแตกต่างของ y กับ x
เมื่อ dx เล็ก ๆ

$$\boxed{\frac{dy}{dx}} = f'(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx}$$

differential form

Ex $f(x) = x^{10}$

$$\therefore dy = f'(x)\,dx$$

$$\rightarrow dy = (10x^9)\,dx$$

Ex $dy = ?$ เมื่อ กำหนด ฟังก์ชัน $y = \sin \pi x + 7\cos x$

$$\therefore dy = F'(x)\,dx$$

$$dy = (\pi \cos \pi x - 7\sin x)\,dx.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{——} (*)$$

ถ้า $(*)$ ไม่ take limit แต่ให้ Δx เล็กๆ $(\Delta x \neq 0)$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore \boxed{f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x}$$

$$dy \approx \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x \approx f'(x)\,dx$$

ประมาณค่าโดยใช้ differential : $\Delta y \approx \boxed{f'(x)\,dx = dy}$

$$\therefore \Delta y \approx dy$$

Differentials

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x)}$$

Let $y = f(x)$ be a differentiable function. The differential of y with respect to x, denoted dy, is $f'(x)dx$, i.e.,

$$\boxed{dy = f'(x)dx.}$$

Example 3.17 Find dy when $y = sin(2\pi x)$ and discuss the relationship between dy and dx at $\boxed{x = 1.}$

$dy = (y')dx$

$\therefore dy = 2\pi\cos(2\pi x)\,dx$

set $x = 1$

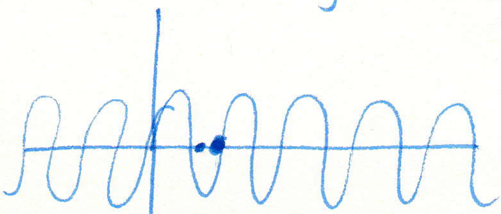
$\therefore dy = 2\pi\cos 2\pi\, dx$

$dy = (2\pi)dx$

ที่ $x = 2$

$dy = 4\pi dx$

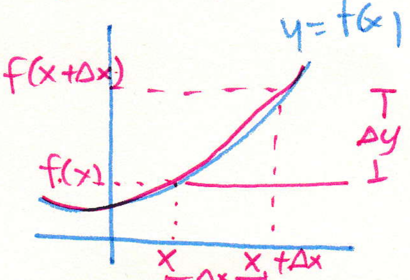
* ที่ $x = 1$ ได้ว่า dy เปลี่ยนแปลงไป 2π เท่าของ dx.



Estimation with Differential

Recall that

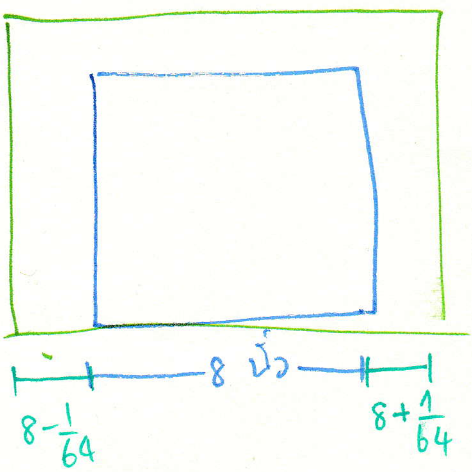
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$



So when Δx is small,

$$\boxed{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)} \approx f'(x)\Delta x \approx f'(x)dx.$$

Example 3.18 Suppose that the side of a square is measured with a ruler to be 8 inches with a measurement of at most $\pm\frac{1}{64}$ inches. Estimate the error in the computed area of the square.



① สมมติว่า □ มีความกว้าง = x นิ้ว

พ.ท. $y = x^2 \longrightarrow f(x) = x^2$

② $\Delta y \approx dy = f'(x)dx$ $\quad \therefore f'(x) = 2x$

$\therefore dy = 2x\,dx$

③ หาว่า dy มีความคลาดเคลื่อนอย่างไร.

$$-\frac{1}{64} \le dx \le \frac{1}{64} \quad \text{—— } (*)$$

คูณ (*) ด้วย $2x$ $\quad (x \ge 0)$

$$-\frac{2x}{64} \le 2x\,dx \le \frac{2x}{64}$$

อยากหา ขอบเขตของ $\boxed{dy}$

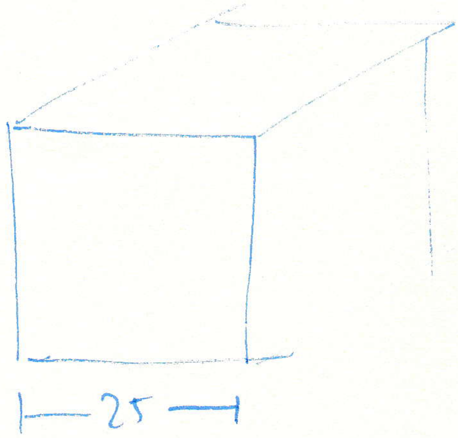
$\bigcirc \le dy \le \bigcirc$.

$\therefore$ ที่ $x = 8$

$$-\frac{1}{4} \le \underbrace{16dx}_{dy} \le \frac{1}{4}$$

ความหมาย เมื่อวัดความยาวมี error $\pm\frac{1}{64}$ จะได้ว่า พ.ท. มี error $\pm\frac{1}{4}$

Ex ความยาวด้านของลูกบาศก์จริงๆ คือ 25 cm
แต่ถ้าเราใช้บรรทัดไปวัด จะมี error ± 1 cm
จงประมาณว่า ปริมาตรที่วัดได้ มีความคลาดเคลื่อนเท่าใด.



① ให้ x เป็นความยาวด้านลูกบาศก์

$$V = x^3$$

② Differential

$$dV = (3x^2)\,dx$$

$\therefore$ ที่ $\boxed{x = 25}$

$$dV = 3(25)^2\,dx$$

ขอบเขตความคลาดเคลื่อน

$$-1 \le dx \le 1$$

อยากหาว่า ? $\le dV \le$?

$$-3(25)^2 \le \underbrace{3\cdot(25)^2\,dx}_{dV} \le 3\cdot(25)^2$$

$$-3(25)^2 \le dV \le 3(25)^2$$