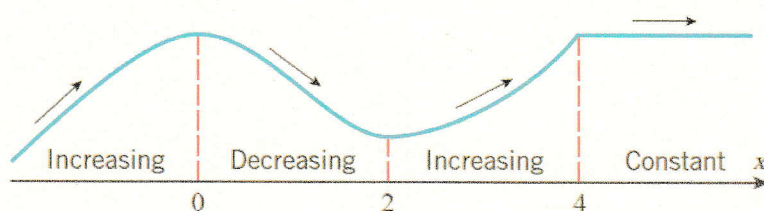


The Derivative in Graphing and Applications

4.1 Increasing and Decreasing Functions



DEFINITION Let f be defined on an interval, and let x_1 and x_2 denote points in that interval.

1. f is **increasing** on the interval if $f(x_1) < f(x_2)$ whenever $x_1 < x_2$.
2. f is **decreasing** on the interval if $f(x_1) > f(x_2)$ whenever $x_1 < x_2$.
3. f is constant on the interval if $f(x_1) = f(x_2)$ for all point x_1 and x_2 .

บทนำ

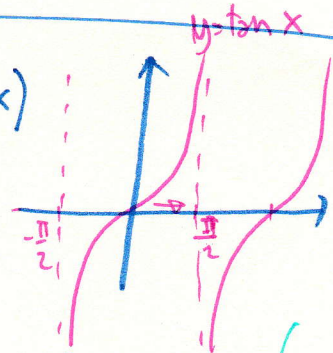
L'Hôpital ($\frac{0}{0}$ / $\frac{\infty}{\infty}$)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{0}{0}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{Then } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ex $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x}{\tan x}$

($\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sec x = \infty = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$)



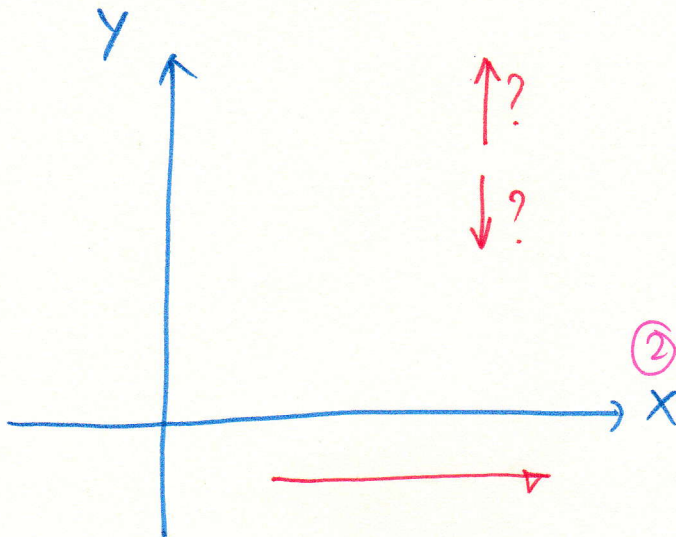
or L'Hôpital

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x}{\tan x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{\sec x}$$

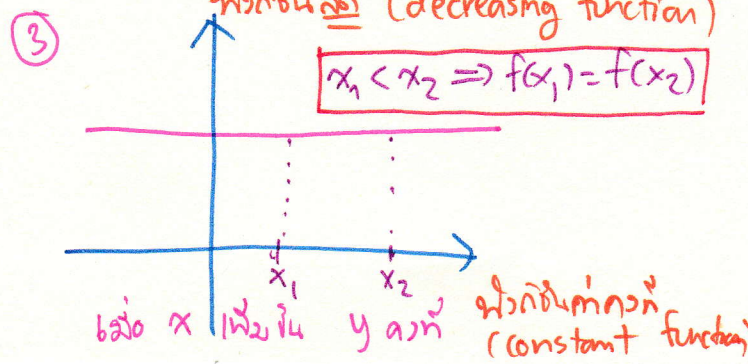
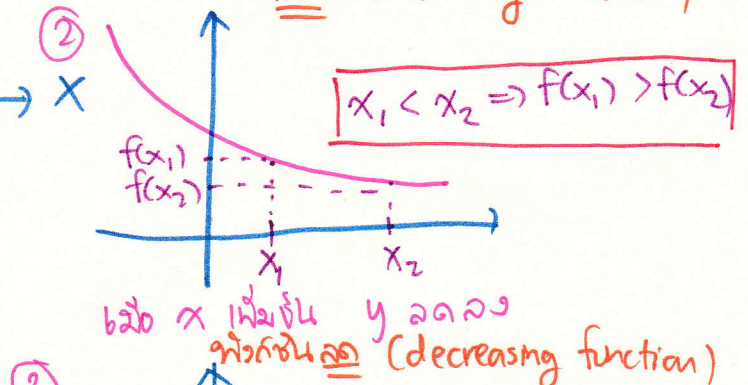
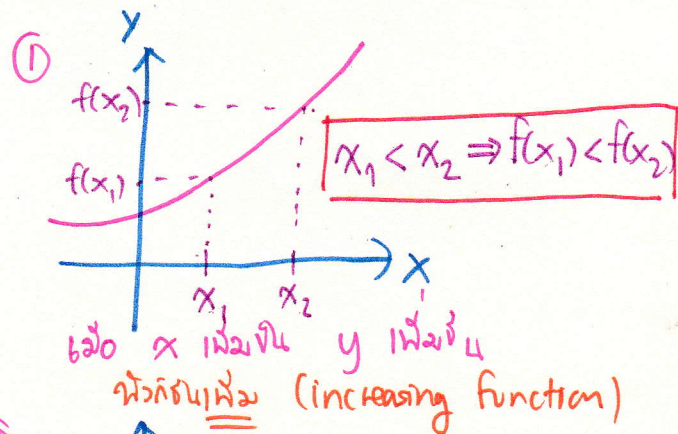
$$\left(\frac{\sec^2 x}{\sec x \tan x} \right)$$

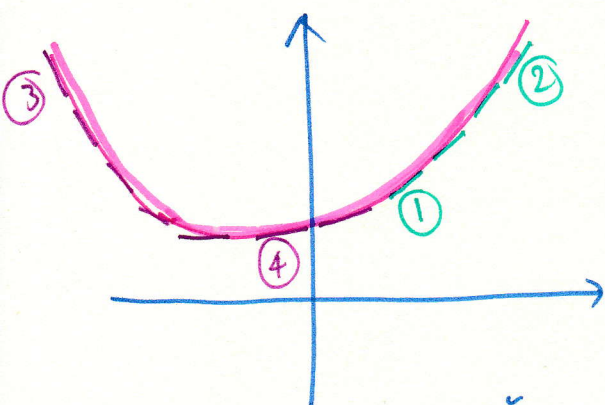
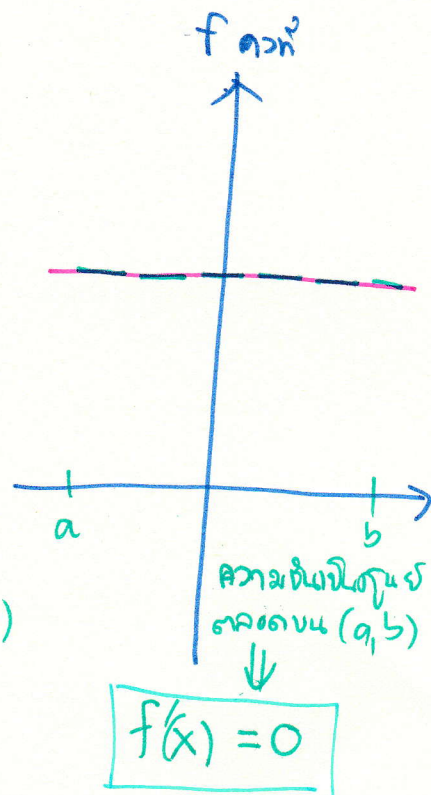
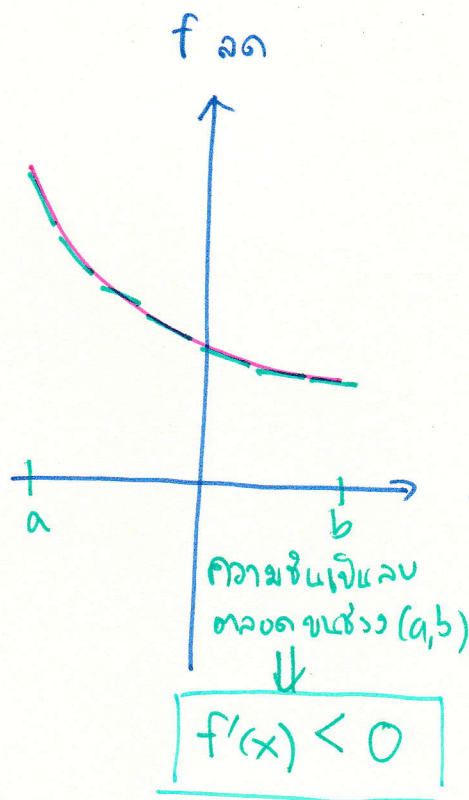
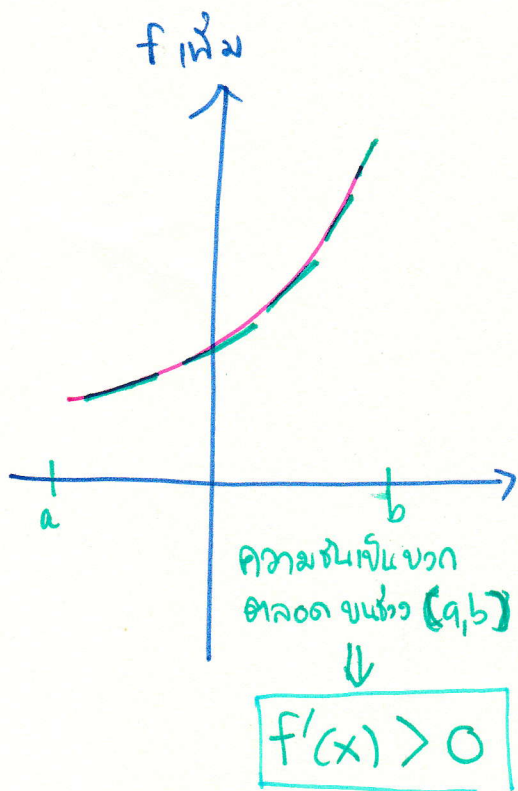
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1/\cos x}{\sin x / \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sin x} = 1$$

Graphing using derivative



ถ้า x เพิ่มขึ้น
ค่า y เพิ่มขึ้นหรือลดลง.



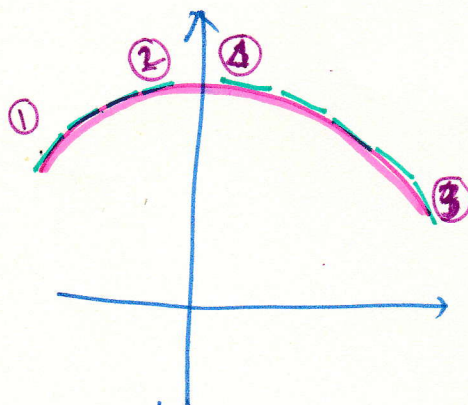


โค้งนูน / บ้างขึ้น
concave up

$\Downarrow$ $f'(x)$
มีแนวโน้มไปว่า ความชัน
จากน้อยไปมาก

$\Downarrow$

$f''(x) > 0$

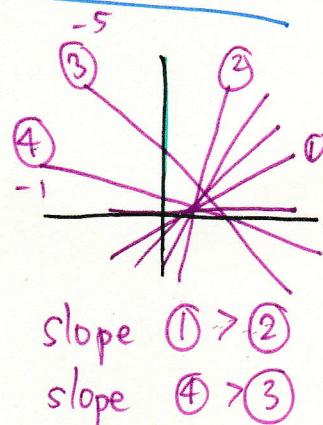


โค้งคว่ำ / บ้างลง
concave down.

$\Downarrow$ $f'(x)$
มีแนวโน้มไปว่า ความชัน
จากมากไปน้อย

$\Downarrow$

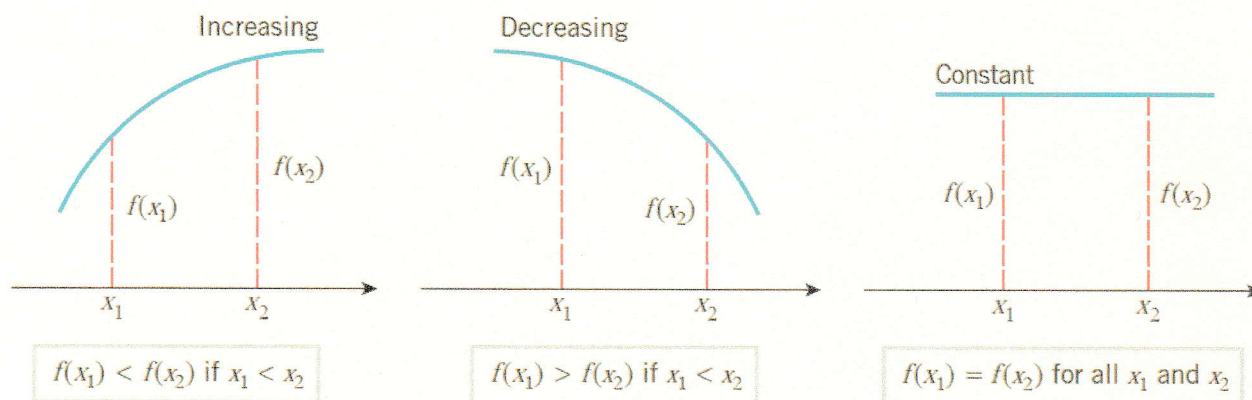
$f''(x) < 0$



สรุป

ถ้า $f''(x) > 0$ บน (a, b) แล้ว f ๑: Concave up

ถ้า $f''(x) < 0$ บน (a, b) แล้ว f ๑: concave down

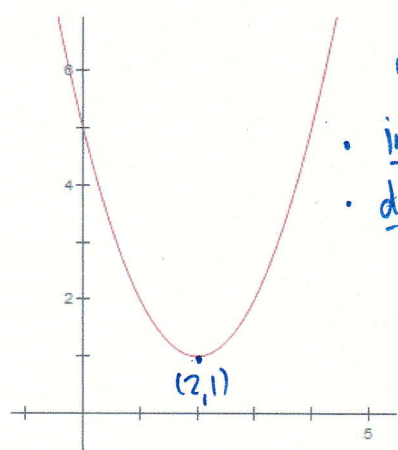


THEOREM 4.1 Let f be a function that is continuous on a closed interval $[a, b]$ and differentiable on the open interval (a, b) .

1. If $f'(x) > 0$ for every value of x in (a, b) , then f is increasing on $[a, b]$.
2. If $f'(x) < 0$ for every value of x in (a, b) , then f is decreasing on $[a, b]$.
3. If $f'(x) = 0$ for every value of x in (a, b) , then f is constant on $[a, b]$.

$$y = a(x-h)^2 + k$$

Example 4.1 Find the intervals on which $f(x) = x^2 - 4x + 5$ is increasing and the intervals on which it is decreasing.



$$f(x) = (x^2 - 4x + 4) + 1$$

$$= (x-2)^2 + 1$$

ดูจากกราฟ

- increasing: $[2, \infty)$
- decreasing: $(-\infty, 2]$

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$\therefore f'(x) = 2x - 4$$

เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ถ้า $f'(x) > 0$

$$2x - 4 > 0$$

$$2x > 4 \Rightarrow x > 2$$

$\therefore f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบน $[2, \infty)$

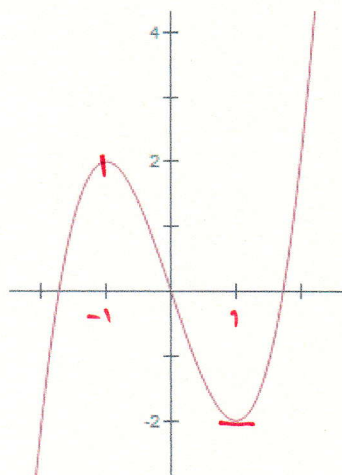
เป็นฟังก์ชันลด ถ้า $f'(x) < 0$

$$2x - 4 < 0$$

$$2x < 4 \Rightarrow x < 2$$

$\therefore f$ เป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty, 2]$

Example 4.2 Find the intervals on which $f(x) = x^3 - 3x$ is increasing and the intervals on which it is decreasing.



4.2 Concavity

ดูจากกราฟ

- increasing $(-\infty, -1], [1, \infty)$
- decreasing $[-1, 1]$

$$f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ถ้า $f'(x) > 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 > 0$$

$$x^2 - 1 > 0$$

$$(x-1)(x+1) > 0$$

$$\leftarrow \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -1 \quad 1 \end{array}$$

$$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

$$\therefore f'(x) > 0$$

เมื่อ x อยู่ในช่วง

$$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

$\therefore f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

บนช่วง

$$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

เป็นฟังก์ชันลด ถ้า $f'(x) < 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$$

$$x^2 - 1 < 0$$

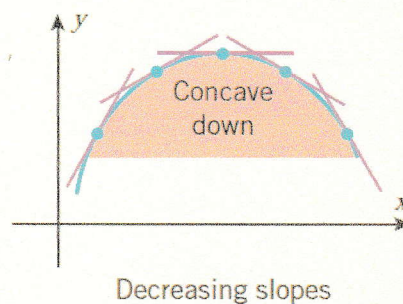
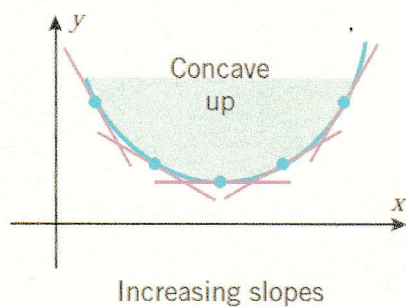
$\therefore f'(x) < 0$ เมื่อ x

อยู่ในช่วง $(-1, 1)$

$\therefore f$ เป็นฟังก์ชันลด

บนช่วง $[-1, 1]$

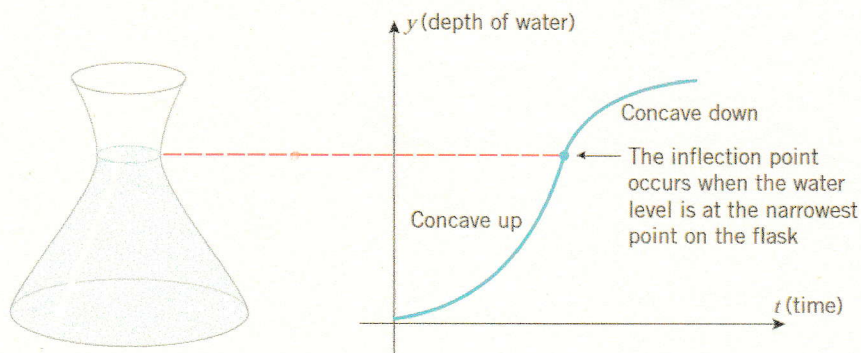
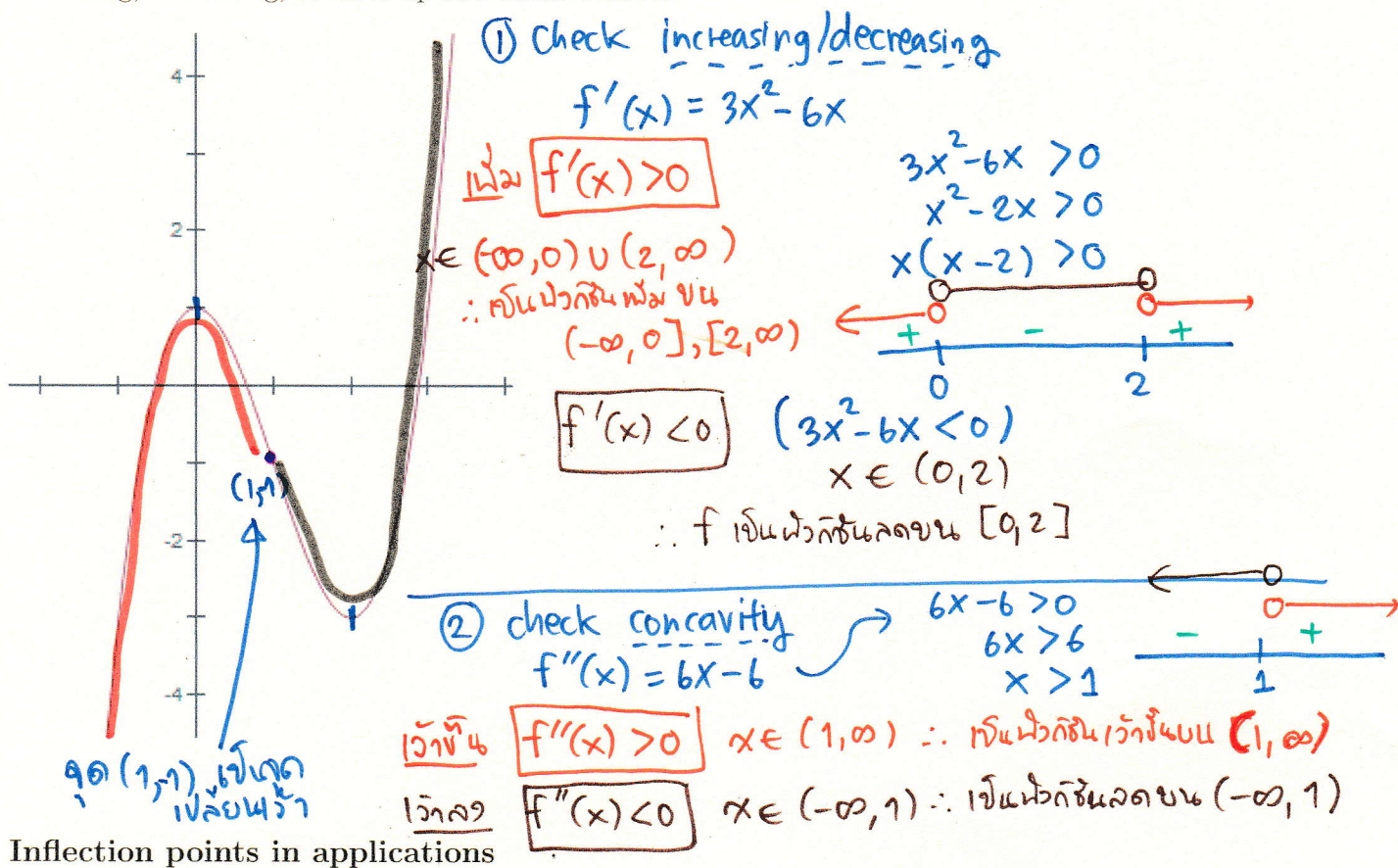
DEFINITION If f is differentiable on an open interval, then f is said to be **concave up** on the open interval if $f'(x)$ is increasing on that interval, and f is said to be **concave down** on the open interval if $f'(x)$ is decreasing on that interval.



THEOREM 4.2 Let f be twice differentiable on an open interval

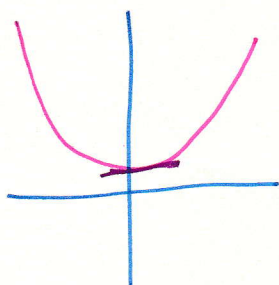
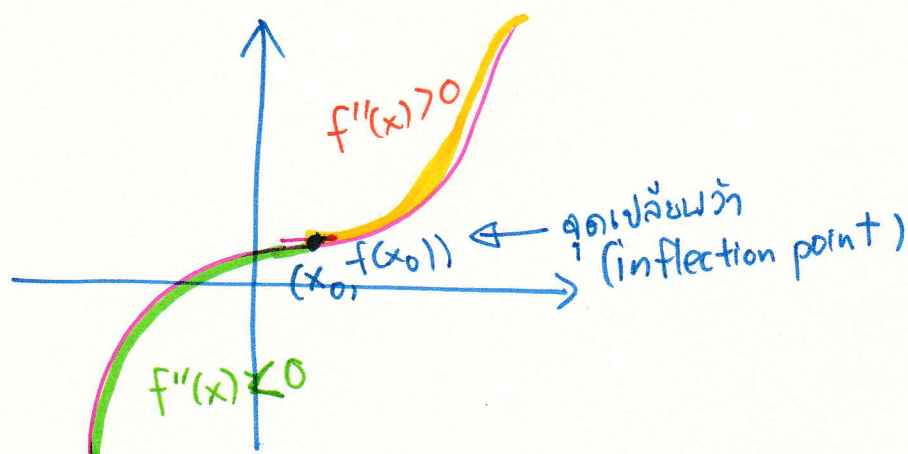
1. If $f''(x) > 0$ for every value of x in the open interval, then f is concave up on that interval.
2. If $f''(x) < 0$ for every value of x in the open interval, then f is concave down on that interval.

Example 4.3 Use the first and second derivatives of $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ to determine where f is increasing, decreasing, concave up and concave down.



f	f เพิ่ม $f'(x) > 0$	f ลด $f'(x) < 0$
f เว้าขึ้น $f''(x) > 0$		
f เว้าลง $f''(x) < 0$		

DEFINITION If f is continuous on an open interval containing a value x_0 , and if f changes the direction of its concavity at the point $(x_0, f(x_0))$, then we say that f has an **inflection point** at x_0 . and we call the point $(x_0, f(x_0))$ on the graph of f an inflection point of f .



Thm ถ้า $(x_0, f(x_0))$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า แล้ว $f'(x_0) = 0$
 หรือ $f''(x_0)$ ไม่นับ

f) จุดวิกฤตของ f คือ x ที่ทำให้ $f'(x) = 0$

แบบทดสอบย่อย

เพื่อเช็คชื่อเข้าชั้นเรียน ประจำวันศุกร์ที่ 22 กุมภาพันธ์ พ.ศ.2562

ชื่อ-สกุล..... รหัสนักศึกษา..... ลำดับที่.....

กำหนดฟังก์ชันและอนุพันธ์ของฟังก์ชันดังนี้

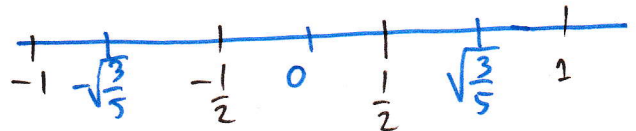
$$\frac{1.732}{2.236}$$

$$f(x) = (x^2 - 1)x^3, \quad f'(x) = (5x^2 - 3)x^2, \quad f''(x) = 2x(10x^2 - 3)$$

$$\bullet f(x) = (x-1)(x+1)x^3$$

$$\bullet f'(x) = (x - \sqrt{\frac{3}{5}})(x + \sqrt{\frac{3}{5}})x^2$$

$$\bullet f''(x) = (x - \sqrt{\frac{3}{10}})(x + \sqrt{\frac{3}{10}})(2x)$$



1. Find the critical point(s) of f .

จงหาจุดวิกฤติทั้งหมดของ f

$x =$ _____

2. Find the interval(s) of x where f is increasing.

จงหาช่วงของ x ที่ทำให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

3. Find the interval(s) of x where f is decreasing.

จงหาช่วงของ x ที่ทำให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลด

4. Find x at the inflection point(s) of f .

จงหาค่า x ณ จุดเปลี่ยนเว้าของ f

$x =$ _____

5. Find the interval(s) of x where f is concave up.

จงหาช่วงของ x ที่ทำให้ $f(x)$ เว้าขึ้น (โค้งหงาย)

6. Find the interval(s) of x where f is concave down.

จงหาช่วงของ x ที่ทำให้ $f(x)$ เว้าลง (โค้งคว่ำ)

