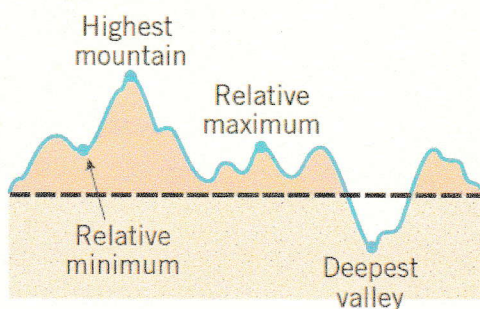


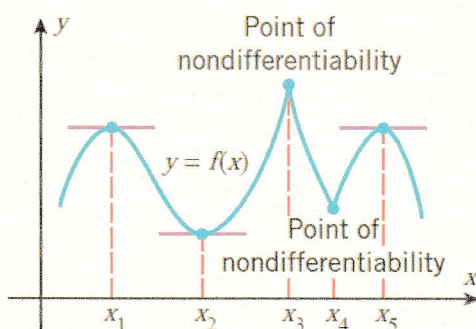
4.3 Relative Maxima and Minima



DEFINITION A function f is said to have a *relative maximum* at x_0 if there is an open interval containing x_0 on which $f(x_0)$ is the largest value, that is, $f(x_0) \geq f(x)$ for all x in the interval.

Similarly, f is said to have a *relative minimum* at x_0 if there is an open interval containing x_0 on which $f(x_0)$ is the smallest value, that is, $f(x_0) \leq f(x)$ for all x in the interval.

If f has either a relative maximum or a relative minimum at x_0 , then f is said to have a *relative extremum* at x_0 .



Suppose that f is a function defined on an open interval containing the point x_0 . If f has a relative extremum at x_0 , then $f'(x_0) = 0$. A point x_0 in the domain of f is said to be a *critical point* of f if either $f'(x_0) = 0$ or f is not differentiable at x_0 .

ทบทวน L'Hôpital Rule : $\frac{0}{0} / \frac{\infty}{\infty}$ แบบนี้

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x \ln 5x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 5x}{\frac{1}{3x}} \\ &\stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{5x} (\frac{1}{5})}{-\frac{1}{3x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -3x \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\infty - \infty \rightarrow \frac{0}{0} / \frac{\infty}{\infty}$$

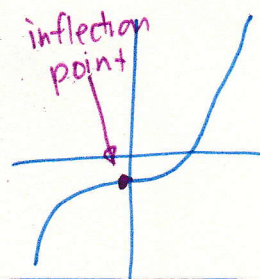
$$0 \cdot \infty \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$A \cdot B = \frac{A}{\frac{1}{B}} / B \cdot \frac{1}{\frac{1}{A}}$$

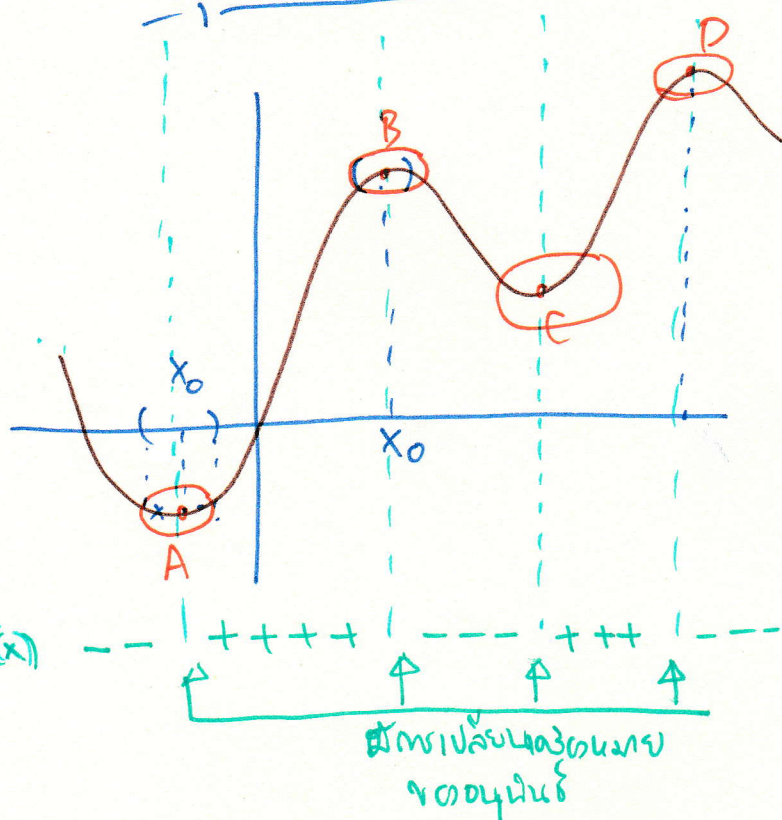
[f] $\rightarrow$ วิเคราะห์ลักษณะกราฟ

① f เพิ่มขึ้น/ลด
 $f'(x) > 0$ $f'(x) < 0$

② f เปลี่ยนจากเพิ่มเป็นลด (หรือกลับ) / เร็ว (หรือช้า)
 $f''(x) > 0$ $f''(x) < 0$



ผลัดขั้วสัมพัทธ์ Relative extrema



• B, D ได้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์
(relative maximum)
(สำหรับทุก x_0 ในช่วงเปิด ซึ่ง $f(x_0) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วงเปิดนี้)

• A, C ไม่ได้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
(relative minimum)
(สำหรับทุก x_0 ในช่วงเปิด ซึ่ง $f(x_0) \leq f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วงเปิด)

Example 4.4 Find all critical points of $f(x) = x^2 - 4x + 5$

Solution. $f'(x) = 2x - 4$

หาจุดวิกฤต Set $f'(x) = 0$ หรือจะหา $f'(x)$ ไม่ก็ได้ทั้งนี้ x
 $2x - 4 = 0$
 $\therefore x = 2$

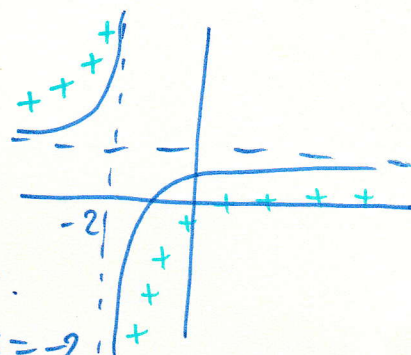
Example 4.5 Find all critical points of $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$

Solution. $f'(x) = \frac{(x+2) - (x-2)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$

① $f'(x) = 0$? หาร x ที่ทำให้ $f'(x) = 0$.

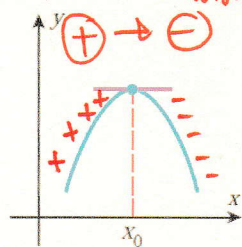
② $f'(x)$ ไม่ได้อะไร : $f'(x)$ ไม่ได้อะไรที่ $x = -2$

$f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ $D_f : \mathbb{R} - \{-2\}$ เมื่อ $x = -2$ ไม่อยู่ในโดเมน
 $\therefore f$ ไม่ใช่ว่าจะหาจุดวิกฤต.

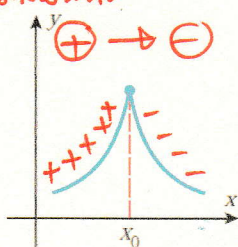


4.4 First derivative test & Second derivative test

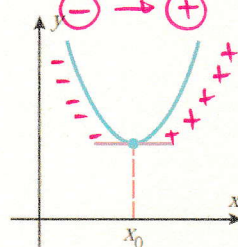
slope เปลี่ยนจากบวกเป็นลบ $\oplus \rightarrow \ominus$
 ในที่นี้ "จุดสูงสุด" หรือ "Relative maximum"



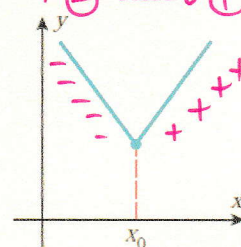
Critical point
 Stationary point
 Relative maximum



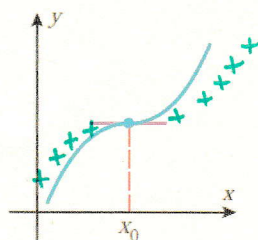
Critical point
 Not a stationary point
 Relative maximum



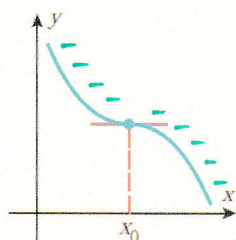
Critical point
 Stationary point
 Relative minimum



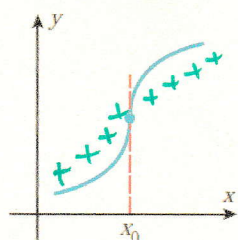
Critical point
 Not a stationary point
 Relative minimum



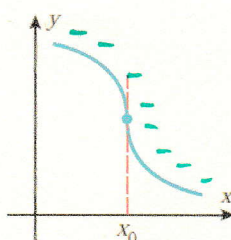
Critical point
 Stationary point
 Inflection point
 Not a relative extremum



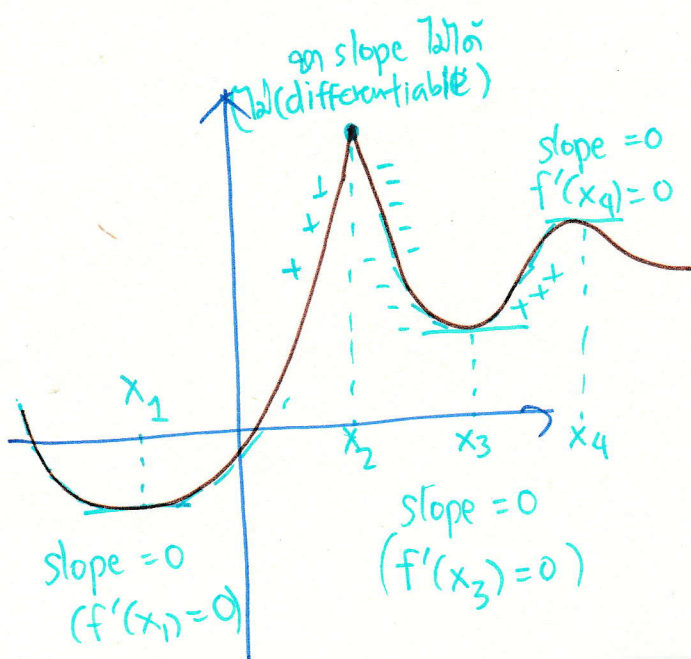
Critical point
 Stationary point
 Inflection point
 Not a relative extremum



Critical point
 Not a stationary point
 Inflection point
 Not a relative extremum



Critical point
 Not a stationary point
 Inflection point
 Not a relative extremum



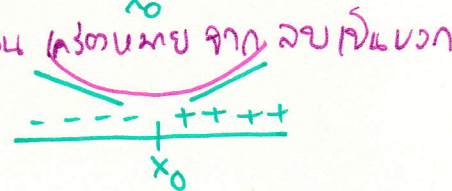
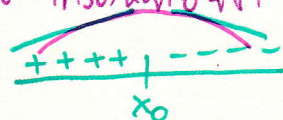
จุด x_0 ในโดเมนของ f จะเรียกว่า
จุดวิกฤต (critical point)
ถ้า $f'(x_0)=0$ หรือ $f'(x_0)$
หาไม่ได้ (หาไม่ได้เช่นนี้)

Thm 4.3 f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ ทั้งรูป x_0 . ถ้า f อนุพันธ์ได้ (หา) ที่ x_0 .
แล้ว $f(x_0)$ สามารถแปลได้เป็นกรณีต่างๆ

① x_0 ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจาก บวกเป็นลบ
และให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $f(x_0)$

② x_0 ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจาก ลบเป็นบวก
และให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $f(x_0)$

③ x_0 อาจจะไม่เกิดค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์



Thm 4.4

สมมติว่า f อนุพันธ์ได้ 2 ครั้ง ที่ x_0 , $f'(x_0)=0$

① $f''(x_0) > 0$ แล้ว f จะมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ x_0

② $f''(x_0) < 0$ แล้ว f จะมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ x_0

③ $f''(x_0) = 0$ สรุปไม่ได้

แบบทดสอบย่อย

เพื่อเช็คชื่อเข้าชั้นเรียน ประจำวันศุกร์ที่ 22 กุมภาพันธ์ พ.ศ.2562

ชื่อ-สกุล..... รหัสนักศึกษา..... ลำดับที่.....

กำหนดฟังก์ชันและอนุพันธ์ของฟังก์ชันดังนี้

$$f(x) = (x^2 - 1)x^3, \quad f'(x) = (5x^2 - 3)x^2, \quad f''(x) = 2x(10x^2 - 3)$$

$$\bullet f(x) = (x-1)(x+1)x^3$$

$$\bullet f'(x) = (x - \sqrt{\frac{3}{5}})(x + \sqrt{\frac{3}{5}})x^2$$

$$\bullet f''(x) = (x - \sqrt{\frac{3}{10}})(x + \sqrt{\frac{3}{10}})(2x)$$

1. Find the critical point(s) of f .

จงหาจุดวิกฤติทั้งหมดของ f

$$x = -\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \sqrt{\frac{3}{5}}$$

2. Find the interval(s) of x where f is increasing.

จงหาช่วงของ x ที่ทำให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

$$(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{5}}), (\sqrt{\frac{3}{5}}, \infty)$$

3. Find the interval(s) of x where f is decreasing.

จงหาช่วงของ x ที่ทำให้ $f(x)$ ที่เป็นฟังก์ชันลด

$$[-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0], [0, \sqrt{\frac{3}{5}}]$$

4. Find x at the inflection point(s) of f .

จงหาค่า x ณ จุดเปลี่ยนเว้าของ f

$$x = -\sqrt{\frac{3}{10}}, 0, \sqrt{\frac{3}{10}}$$

5. Find the interval(s) of x where f is concave up.

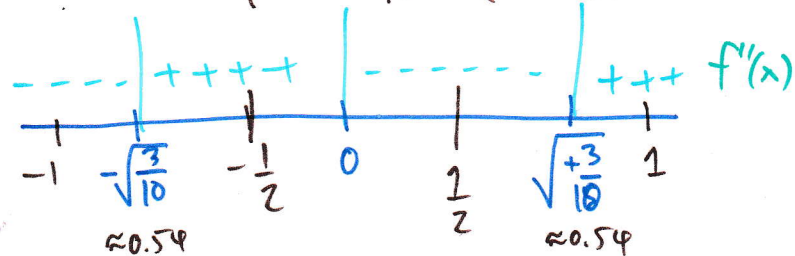
จงหาช่วงของ x ที่ทำให้ $f(x)$ เว้าขึ้น (โค้งหงาย)

$$(-\sqrt{\frac{3}{10}}, 0), (\sqrt{\frac{3}{10}}, \infty)$$

6. Find the interval(s) of x where f is concave down.

จงหาช่วงของ x ที่ทำให้ $f(x)$ เว้าลง (โค้งคว่ำ)

$$(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{10}}), (0, \sqrt{\frac{3}{10}})$$



THEOREM 4.3 Let x_0 be a critical point of the function f that is continuous on the open interval $[a, b]$ containing x_0 . If f is differentiable on the interval, except possibly at x_0 , then $f(x_0)$ can be classified as:

1. A relative minimum, if $f'(x)$ changes from negative to positive at x_0 .
2. A relative maximum, if $f'(x)$ changes from positive to negative at x_0 .
3. Neither a max nor a min if $f'(x)$ is positive on both sides of x_0 or negative on both sides of x_0 .

THEOREM 4.4 Suppose that f is twice differentiable at the point x_0 and $f'(x_0) = 0$.

1. If $f''(x_0) > 0$, then f has a relative minimum at x_0 .
2. If $f''(x_0) < 0$, then f has a relative maximum at x_0 .
3. If $f''(x_0) = 0$, then the test is inconclusive; that is f may have a relative maximum, a relative minimum or neither at x_0 .

Example 4.6 Find the relative extrema of $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

วิธี 1
Solution. ① หาจุดวิกฤต $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$
 ใช้กฎผลต่าง
 คูณลบด้วยเครื่องหมายลบ
 Set $f'(x) = 0$; $15x^4 - 15x^2 = 0$
 $x^4 - x^2 = 0$
 $x^2(x^2 - 1) = 0$
 $x^2(x-1)(x+1) = 0$
 $\therefore$ จุดวิกฤต 3 จุด
 $x = 0, -1, 1$

② ตรวจสอบเครื่องหมายกับ $f'(x) = 15x^2(x-1)(x+1)$
 sign of $f'(x)$

 $\therefore f$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$
 ในค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$
 $f(1) = \frac{2}{-2}$

วิธี 2
 $f''(x) = 60x^3 - 30x = 30x(2x^2 - 1)$
 ใช้ $f''(x)$
 $f''(0) = 0$ สรุปไม่ได้
 $f''(1) \geq 0 \rightarrow$ ในค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$
 $f''(-1) < 0 \rightarrow$ ในค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$

4.5 Analysis of Functions

	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
$f''(x) > 0$		
$f''(x) < 0$		

PROCEDURE GRAPHING STRATEGY

Step 1 : Find the domain, the x -intercepts, and the y -intercept.

Step 2 : Find the vertical asymptotes.

Step 3 : Find the end behaviour.

Step 4 : Find $f'(x)$ and $f''(x)$.

Step 5 : Sketch the graph of f .

Example 4.7 Sketch a graph of the equation $y = x^4 - 4x^3 + 10$

① $D_f = \mathbb{R}$; y -intercept ; $x=0 \Rightarrow y=10$
 x -intercept ; $y=0 \Rightarrow x^4 - 4x^3 + 10 = 0$ (เอก)

② หา vertical asymptote. ดูว่าจุดไหน $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$ 7227

③ ดูพฤติกรรมปลายหาง $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 - 4x^3 + 10 = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 - 4x^3 + 10 = +\infty$

④ $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \rightarrow$ หาจุดวิกฤต Set $f'(x) = 0$
 $4x^3 - 12x^2 = 0$
 $x^3 - 3x^2 = 0$
 $x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0, 3$ (x)

$f''(x) = 12x^2 - 24x \rightarrow$ หาจุดที่อาจเกิดจุดเปลี่ยนเว้า : $f''(x) = 0$
 $12x^2 - 24x = 0$
 $x^2 - 2x = 0$
 $x(x-2) = 0$
 $x = 0, 2$ (x)

⑤ สรุปรวเลืกจำนวน พิจารณาเครื่องหมายของ $f'(x), f''(x)$ วาดกราฟ

