

Example 4.8 Sketch a graph of the equation $y = \frac{2x}{x-1}$

STEP 1

หาโดเมนของฟังก์ชัน โดเมนคือ $\mathbb{R} - \{1\}$

• จุดตัดแกน $\boxed{x}$ ให้ $y=0$ ได้ว่า $x=0$
 $\boxed{y}$ ให้ $x=0$ ได้ว่า $y=0$ } จุดตัดคือ (0,0)

$$\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = \pm \infty$$

STEP 2

พิจารณาเส้นกำกับแนวตั้ง (vertical asymptote: VA)

จะเห็นว่า ที่ $x=1$ ตัวส่วนเป็นศูนย์ จึงตกเกิด VA ที่นี้

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x-1} = +\infty \\ \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty \end{array} \right\} \therefore \boxed{x=1} \text{ เป็นเส้นกำกับแนวตั้ง}$$

STEP 3

พิจารณาจุดกึ่งกลาง

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-1} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 \\ \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x-1} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2 \end{array} \right\} \therefore \boxed{y=2} \text{ เป็นเส้นกำกับแนวนอน (Horizontal asymptote)}$$

STEP 4

$$\textcircled{1} \text{ หา } f'(x) = \frac{(x-1)(2) - (2x)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

จะเห็นว่า ลัพจุด $x=1$ ที่ทำให้ $f'(x)$ ไม่ได้

แต่ $x=1$ ไม่อยู่ในโดเมน! (ถ้าให้ $x > 1$ จะไม่อยู่ในโดเมน เราถือว่าตกเป็นจุดกึ่งกลางในโดเมน)

แล้ว ไม่สามารถหา x ที่ทำให้ $f'(x)=0$ ได้
 ลัพจุดไม่มีอยู่ $\rightarrow$ ไม่มีส่วนสูง/ต่ำสุดแน่นอน

$$\textcircled{2} \text{ หา } f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$$

พิจารณาเครื่องหมาย

		1	
$f'(x)$	- - - - -		- - - - -
$f''(x)$	- - - - -		+ + + + +

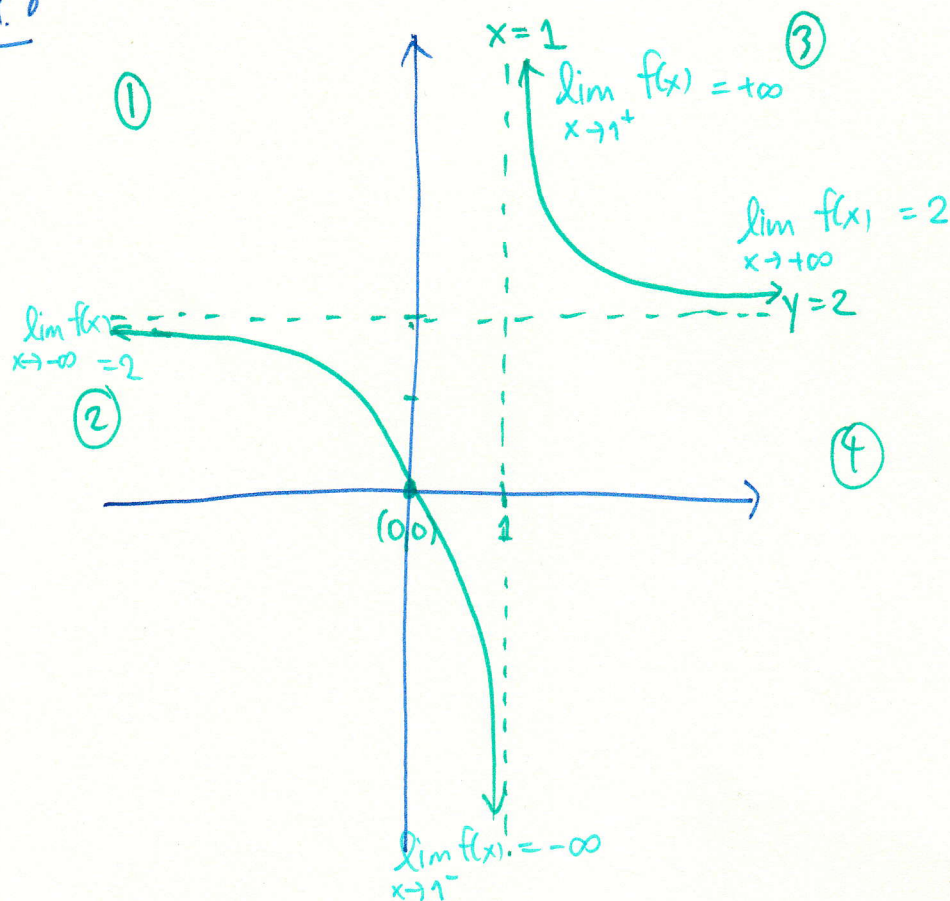
Shape of graph

ลดแล้วลง

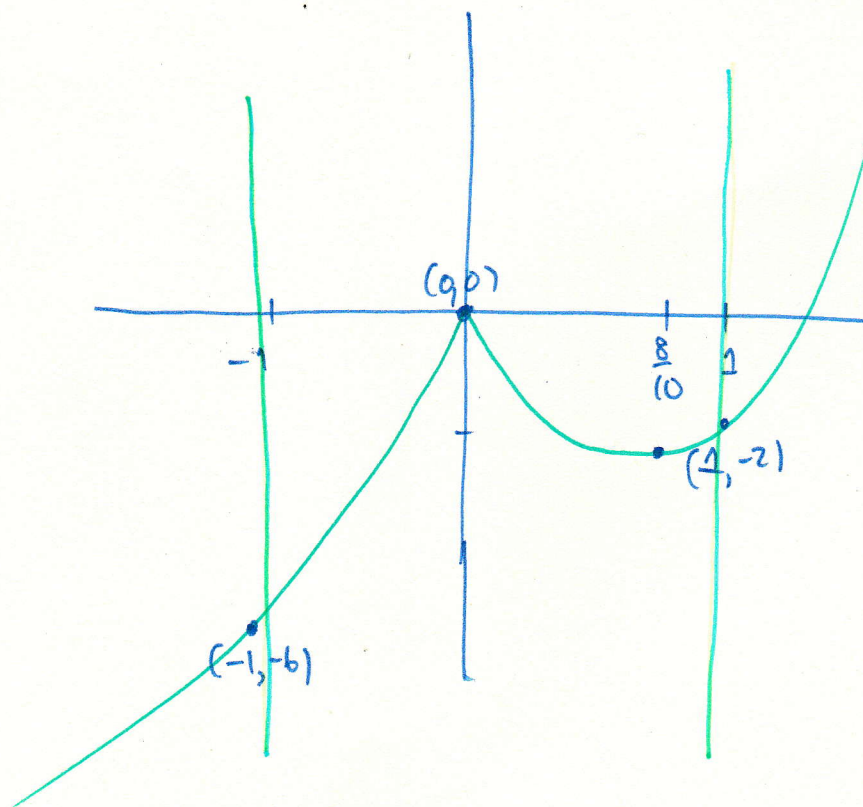
ลดแล้วเพิ่ม

ลองวาดดู
 ๑
 ลอง D
 (เขียนวันศุกร์)

Ex 4.8



Graph Ex 4.9



แบบทดสอบย่อย

เพื่อเช็คชื่อเข้าชั้นเรียน ประจำวันอังคารที่ 25 กุมภาพันธ์ พ.ศ.2562

ชื่อ-สกุล..... รหัสนักศึกษา..... ลำดับที่.....

จงวาดกราฟของ $f(x)$ ที่มีสมบัติต่อไปนี้

1. f มีความต่อเนื่องใน $\mathbb{R}$ ยกเว้นที่ $x = -5, 5$ ✓

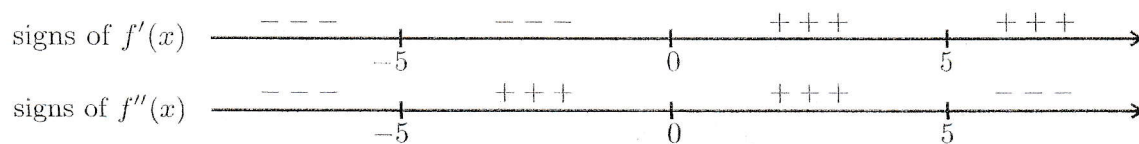
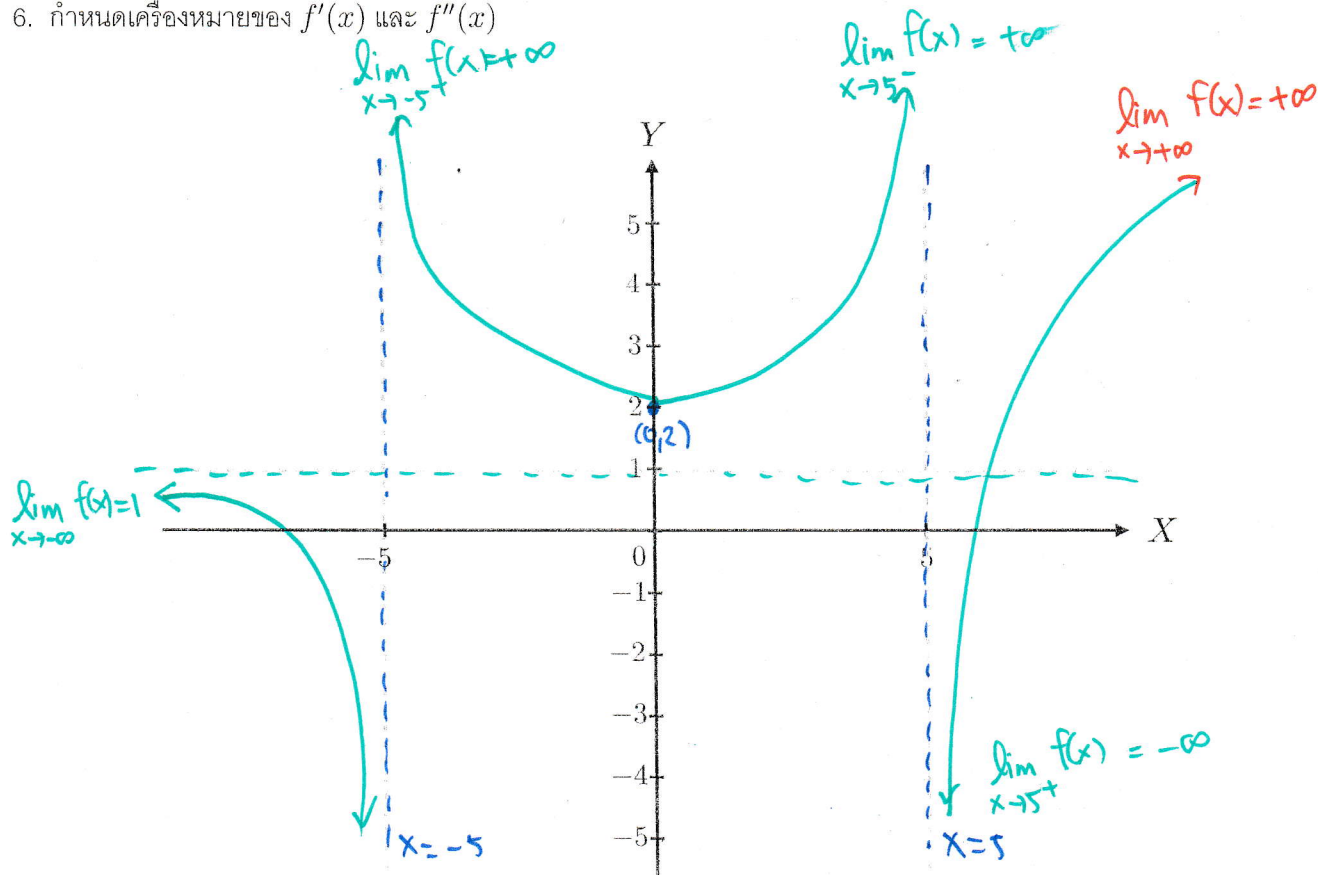
2. เส้นกำกับแนวตั้งของ f คือ $x = -5$ และ $x = 5$ ✓

3. $f(0) = 2$ ✓

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ✓

5. $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = +\infty$ ✓ $\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = -\infty$ ✓ $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty$ ✓ $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty$ ✓ } $x = 5, -5$ เป็น V.A.

6. กำหนดเครื่องหมายของ $f'(x)$ และ $f''(x)$



ค่าสุดขีด และค่าสุดขีดสัมบูรณ์ → ใครก็หาค่าได้ในขอบเขตนั้น

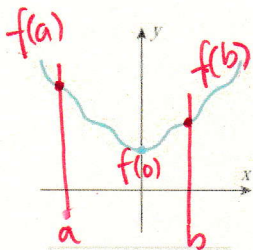
4.6 Absolute Maxima and Minima

→ ขอบช่วงปิด $[a, b]$ ① ค่าสุดขีดสัมบูรณ์/ค่าสุดขีด
หาค่าได้ในช่วง $[a, b]$

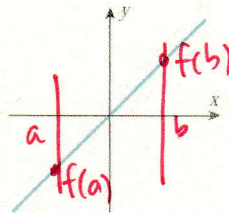
② ค่าสุดขีดสัมบูรณ์

DEFINITION Consider an interval in the domain of a function f and a point x_0 in that interval. We say that f has an **absolute maximum** at x_0 if $f(x) \leq f(x_0)$ for all x in the interval, and we say that f has an **absolute minimum** at x_0 if $f(x_0) \leq f(x)$ for all x in the interval. We say that f has an **absolute extremum** at x_0 if it has either an absolute maximum or an absolute minimum at that point.

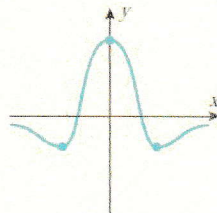
สังเกตว่า
ใครก็หาค่าสุดขีด/ค่าสุดขีด



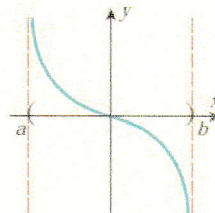
f has an absolute minimum but no absolute maximum on $(-\infty, +\infty)$.



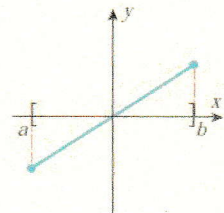
f has no absolute extrema on $(-\infty, +\infty)$.



f has an absolute maximum and minimum on $(-\infty, +\infty)$.



f has no absolute extrema on (a, b) .



f has an absolute maximum and minimum on $[a, b]$.

PROCEDURE FOR FINDING THE ABSOLUTE EXTREMUM ON $[a, b]$

Step 1 : Find the critical points of f in (a, b) .

Step 2 : Evaluate f at all the critical points and at the end points. หาค่าสุดขีดสัมบูรณ์

Step 3 : The largest of the values in step 2 is the absolute maximum and the smallest value is the absolute minimum.

Example 4.9 Find the absolute extremum of $f(x) = 2x^{5/3} - 4x^{2/3}$ on the interval $[-1, 1]$ ค่าสุดขีดสัมบูรณ์

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{2/3} - \frac{8}{3}x^{-1/3} = \frac{10}{3}x^{2/3} - \frac{8}{3x^{1/3}}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{10x - 8}{3x^{1/3}}$$

หาค่าวิกฤต $f'(x)$ หาค่าไม่ได้ / $f'(x) = 0$

① ถ้า $x=0$ แล้ว $f'(x)$ หาค่าไม่ได้
 $x=0$ อยู่ในโดเมน $\Rightarrow 0 \notin \rightarrow x=0$ ไม่
เป็นจุดวิกฤต

$$\textcircled{2} \text{ Set } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{10x - 8}{3x^{1/3}} = 0$$

$$10x - 8 = 0$$

$$x = \frac{8}{10}$$

$\therefore$ จุดวิกฤตมี 2 ค่าคือ
 $x = 0, \frac{8}{10}$ ✓

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{8}{10}\right) = 2\left(\frac{8}{10}\right)^{5/3} - 4\left(\frac{8}{10}\right)^{2/3} \approx -2.06$$

$$f(-1) = 2(-1)^{5/3} - 4(-1)^{2/3} = -6$$

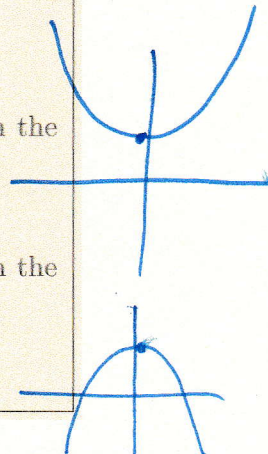
$$f(1) = 2(1)^{5/3} - 4(1)^{2/3} = -2$$

$\therefore$ ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ คือ 0
ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ คือ -6

f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์เพียงค่าเดียว

THEOREM 4.5 Suppose that f is continuous and has exactly one relative extremum on an interval, say at x_0 .

1. If f has a relative minimum at x_0 , then $f(x_0)$ is the absolute minimum of f on the interval.
2. If f has a relative maximum at x_0 , then $f(x_0)$ is the absolute maximum of f on the interval.



Example 4.10 Find the absolute extremum, if any, of the function $f(x) = e^{2x^2-x}$ on the interval $(0, +\infty)$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x^2-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(2x-1)} = \infty \right)$$

$$f'(x) = e^{2x^2-x} (4x-1)$$

$$f'(x) = (4x-1)e^{2x^2-x}$$

หาค่า x ที่ทำให้ $f'(x)$ เท่ากับ 0

$$\text{Set } f'(x) = 0 ; 0 = (4x-1)e^{2x^2-x} \quad e^{2x^2-x} \neq 0 \text{ สำหรับทุก } x.$$

$$4x-1 = 0$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$\therefore x = \frac{1}{4}$ เป็นจุดวิกฤตเพียงจุดเดียว $\rightarrow$ เกิดค่าสุดขีดสัมพัทธ์
แต่ไม่ใช่ค่าสุดขีดสัมพัทธ์

ทดสอบว่า $x = \frac{1}{4}$ เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์หรือไม่

$$f''(x) = e^{2x^2-x} (4) + (4x-1)e^{2x^2-x} (4x-1)$$

$$= (4x+3)e^{2x^2-x}$$

$$f''\left(\frac{1}{4}\right) = \left(4\left(\frac{1}{4}\right)+3\right)e^{2\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}} > 0$$

$\therefore$ ที่ $x = \frac{1}{4}$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

โดย Thm 4.5 เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เพียงค่าเดียว

จึงได้ว่า ที่ $x = \frac{1}{4}$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

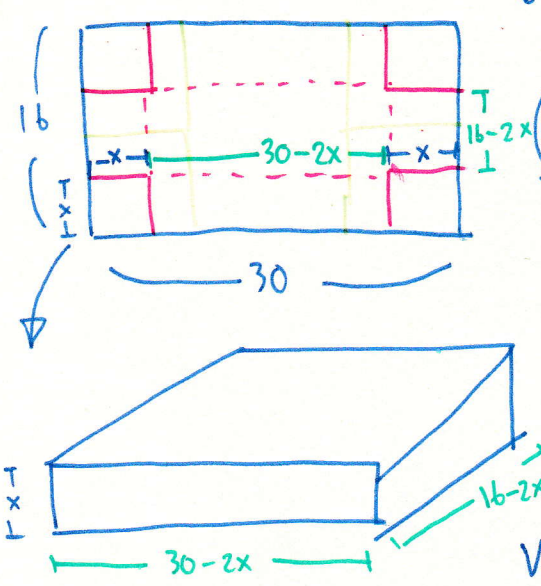
$$\text{ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ } f\left(\frac{1}{4}\right) = e^{2\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{8}} \neq$$

บนช่วง $[0, 2]$ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เกิดที่ $x = \frac{1}{4}$

4.7 Applied Maximum and Minimum Problem

Example 4.11 An open box is to be made from a 16-inch by 30-inch piece of cardboard by cutting out squares of equal size from the four corners and bending up the sides. what size should the squares be to obtain a box with the largest volume? □ จิตใจแล้วหาขนาดเท่าใด ตัวจริงแล้วปรับขนาดจริงแล้วมาหาคำตอบ

ตั้งสมมติว่าขนาดของ □ ข้าง x นิ้ว



$$V(x) = x(30-2x)(16-2x); \quad 0 \leq x \leq 8$$

หา $\max V$. ภายใต้อำนาจ $0 \leq x \leq 8 \rightarrow$ หาค่าสูงสุดที่ขอบเขตบน $[0, 8]$

$$V(x) = 4x^3 - 92x^2 + 480x$$

$$\therefore V'(x) = 12x^2 - 184x + 480 \quad \text{Set } V'(x) = 0$$

$$12x^2 - 184x + 480 = 0$$

$$3x^2 - 46x + 120 = 0$$

$$(3x-10)(x-12) = 0$$

$$\therefore x = \frac{10}{3}, 12$$

↓ ไม่ติด 16 นิ้ว
↓ ไม่ติด 30 นิ้ว

$$V\left(\frac{10}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}\right)\left(30-2\left(\frac{10}{3}\right)\right)\left(16-2\left(\frac{10}{3}\right)\right) = \left(\frac{10}{3}\right)\left(\frac{48-20}{3}\right)\left(\frac{90-20}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{10}{3}\right)\left(\frac{28}{3}\right)\left(\frac{70}{3}\right) \text{ นิ้ว}$$

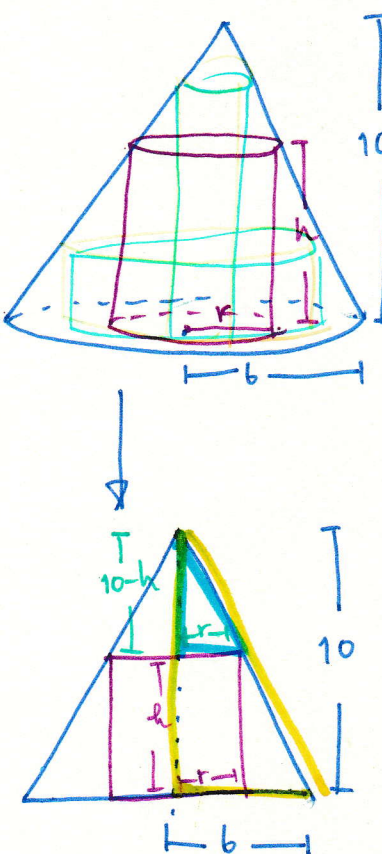
$$V''(x) = 24x - 184 \rightarrow V''\left(\frac{10}{3}\right) < 0$$

$\therefore$ ที่ $x = \frac{10}{3}$ ให้อำนาจสูงสุด

$V(0) = 0, V(8) = 0$

Example 4.12 Find the radius and height of the right circular cylinder of largest volume that can be inscribed in a right circular cone with radius 6 inches and height 10 inches.

ตั้งสมมติว่าทรงกระบอกมีรัศมี r , ความสูง h



$$V = \pi r^2 h \quad \leftarrow \text{หา } \max V.$$

ภายใต้อำนาจ $0 \leq r \leq 6$

$$\therefore V(r) = \pi r^2 \left(10 - \frac{10}{6}r\right); \quad 0 \leq r \leq 6$$

$$V(r) = \frac{\pi}{6} [60r^2 - 10r^3] \rightarrow V'(r) = \frac{\pi}{6} [120r - 30r^2]$$

$$\therefore V'(r) = \pi [20r - 5r^2]$$

$$\text{Set } V'(r) = 0 \Rightarrow \pi (20r - 5r^2) = 0$$

$$4r - r^2 = 0$$

$$r^2 - 4r = 0$$

$$r(r-4) = 0 \Rightarrow r = 0, 4$$

ใน Δ คล้าย $\frac{10}{10-h} = \frac{6}{r}$

$$10r = 6(10-h)$$

$$10r = 60 - 6h$$

$$6h = 60 - 10r$$

$$\therefore h = 10 - \frac{10}{6}r$$

$$V''(r) = 20\pi - 10\pi r \rightarrow V''(4) = 20\pi - 40\pi = -20\pi < 0$$

ถ้า $r = 0; V(0) = 0$
 $r = 4; V(4) = 320\frac{\pi}{6}$
 $r = 6; V(6) = 0$

$\therefore V$ สูงสุดคือ 320π ลบ. นิ้ว ให้ค่าแล้วหาคำตอบ

ดังนั้นรัศมีทรงกระบอก = 4 นิ้ว $\rightarrow$ ความสูง = $\frac{20}{6}$ นิ้ว