5.6 The Fundamental Theorem of Calculus

5.6.1 The Fundamental Theorem of Calculus

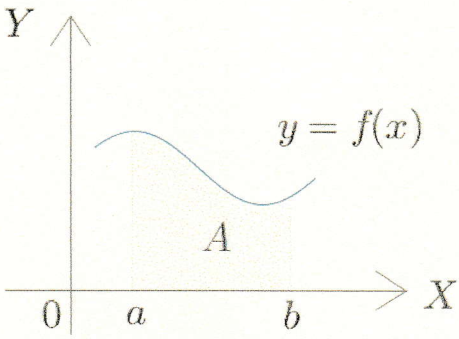


Figure 5.9: area under the graph

As in earlier sections, let us begin by assuming that f is nonnegative and continuous on an interval $[a, b]$, in which case the area A under the graph of f over the interval $[a, b]$ is represented by the definite integral

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

(Figure 5.9). Recall that our discussion of the antiderivative method in Section 5.1 suggested that if

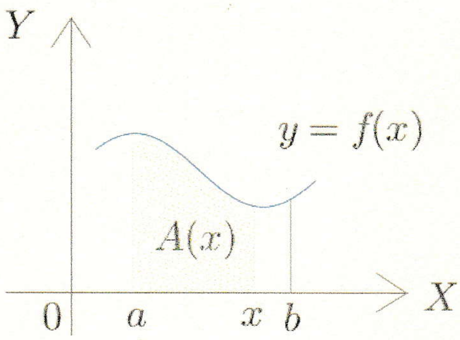


Figure 5.10: area under the graph from a to x

$A(x)$ is the area under the graph of f from a to x (Figure 5.10), then

- $A'(x) = f(x)$
- $A(a) = 0$ (The area under the curve from a to a is the area above the single point a, and hence is zero.)
- $A(b) = A$ (The area under the curve from a to b is A.)

The formula $A'(x) = f(x)$ states that $A(x)$ is an antiderivative of $f(x)$, which implies that every other

5.6.2 The Relationship Between Definite and Indefinite Integrals

Let F be any antiderivative of the integrand on $[a, b]$, and let C be any constant, then

$$\int_a^b f(x)dx = [F(b) + C] - [F(a) - C] = F(b) - F(a)$$

Thus, for purposes of evaluating a definite integral we can omit the constant of integration in

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x) + C]_a^b = \left[\int f(x)dx\right]_a^b$$

which relates the definite and indefinite integrals.

Example 5.17

(a) $\int_4^9 x^2\sqrt{x}dx =$ $\int_4^9 x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \int_4^9 x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{2x^{7/2}}{7}\Big|_4^9 = \frac{2}{7}(9)^{7/2} - \frac{2}{7}(4)^{7/2} = \frac{2}{7}[3^7 - 2^7]$ #

(b) $\int_0^{\ln 3} 5e^x dx =$ $\int_0^{\ln 3} 5e^x dx = 5e^x\Big|_0^{\ln 3} = 5e^{\ln 3} - 5e^0 = 5 \cdot 3 - 5 = 10$

(c) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$ $\arcsin x \Big|_{-1/2}^{1/2} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$

5.6.3 Part 2 of The Fundamental Theorem of Calculus

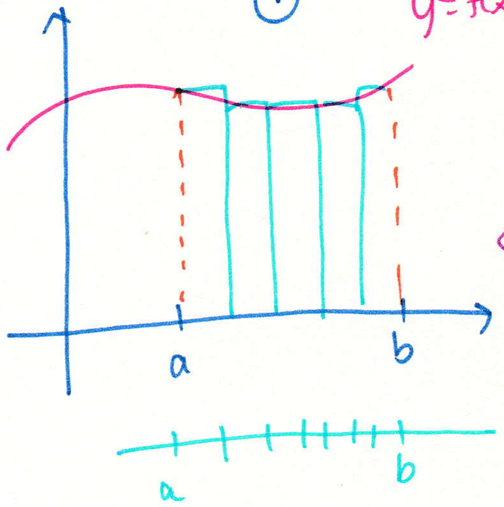
Theorem 5.10 If f is continuous on an interval, then f has an antiderivative on that interval. In particular, if a is any point in the interval, then the function F defined by

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

is an antiderivative of f ; that is, $F'(x) = f(x)$ for each x in the interval, or in an alternative notation

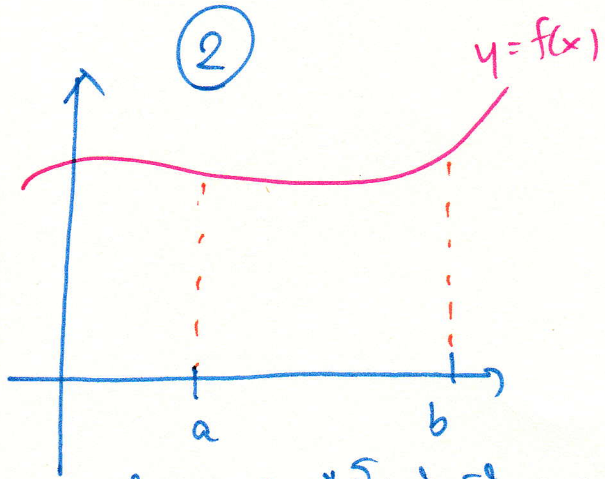
$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$

ทบทวน

① 

หา $A = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot f(x_k^*)$

(Riemann's Sum)

② 

สร้าง $A(x)$ ที่เป็นฟังก์ชัน พ.ท. จาก a ถึง x

พ.ท.ใต้กราฟ จาก $[a,b]$ $\Rightarrow$ หา $A(b)$

$\therefore$ หา $A(x)$ ที่สอดคล้อง

$$\boxed{A'(x) = f(x)}$$

สองส่วนนี้เป็นเรื่องเดียวกัน

"Fundamental Theorem of Calculus"

ส่วนที่① ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$, F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f แล้ว

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Ex 5.15 $\int_1^2 x\,dx$

ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x$ คือ $\boxed{\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C} = F(x)$

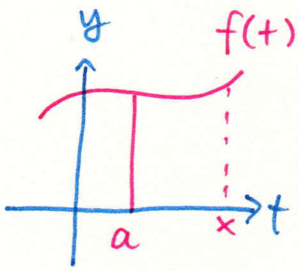
FTC ① $\int_1^2 x\,dx = F(2) - F(1)$

$= \left[\frac{(2)^2}{2} + C\right] - \left[\frac{(1)^2}{2} + C\right]$

$= \frac{4}{2} + \cancel{C} - \frac{1}{2} - \cancel{C} = \frac{3}{2}$

ส่วนที่② ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$, ถ้า

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



จากปฏิยานุพันธ์: $F'(x) = f(x)$

$\therefore \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

dummy variable

Ex 5.18 $$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3\,dt\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{t^4}{4}\Big|_1^x\right]$$
$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{x^4}{4} - 1\right]$$
$$= \frac{4x^3}{4} = x^3$$

$\boxed{\text{ใช้ FTC}}$ $f(t) = t^3$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[1, x]$

โดย FTC ได้ว่า $\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3\,dx\right] = x^3$

Ex $\frac{d}{dx}\left[\int_0^x e^{t^2}\,dt\right]$ จาก $f(t) = e^{t^2}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0, x]$

โดย FTC ได้ว่า $\frac{d}{dx}\left[\int_0^x e^{t^2}\,dt\right] = x^2$

Ex $\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt\right]$ จาก $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(0, \infty)$

โดย FTC ได้ว่า $\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt\right] = \frac{\sin x}{x}$

Example 5.18 Find $\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3 dt\right]$

5.6.4 Evaluating Definite Integrals by Substitution

5.6.5 Two Methods for Making Substitutions in Definite Integrals

A definite integral of the form

$$\int_a^b [f(u(x))u'(x)]dx,$$

we need to account for the effect that the substitution has on the x-limits of integration. There are two ways of doing this.

Method 1. First evaluate the indefinite integral

$$\int [f(u(x))u'(x)]dx$$

by substitution, and then use the relationship

$$\int_a^b [f(u(x))u'(x)]dx = \left[\int [f(u(x))u'(x)]dx\right]_a^b,$$

Method 2. Make the substitution directly in the definite integral, and then replace the x-limits, $x = a$ and $x = b$, by corresponding u-limits, $u(a)$ and $u(b)$. This produces a new definite integral

$$\int_a^b [f(u(x))u'(x)]dx = \int_{u(a)}^{u(b)} [f(u)]du$$

that is expressed entirely in terms of u.

antiderivative of $f(x)$ on $[a, b]$ can be obtained by adding a constant to $A(x)$. Accordingly, let

$$F(x) = A(x) + C$$

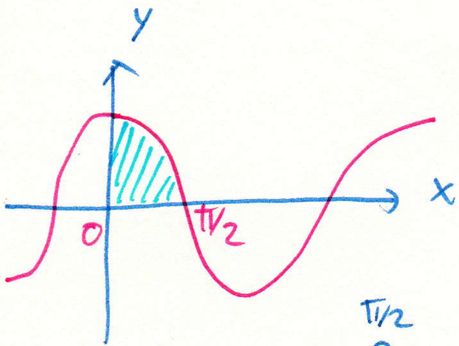
be any antiderivative of $f(x)$, and consider what happens when we subtract $F(a)$ from $F(b)$:

$$F(b) - F(a) = [A(b) + C] - [A(a) + C] = A(b) - A(a) = A - 0 = A = \int_a^b f(x)dx$$

Theorem 5.9 (The Fundamental Theorem of Calculus, Part 1) If f is continuous on $[a, b]$ and F is any antiderivative of f on $[a, b]$, then

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Example 5.15 Evaluate $\int_1^2 xdx$.



Example 5.16

(a) Find the area under the curve $y = cosx$ over the interval $[0, \pi/2]$.

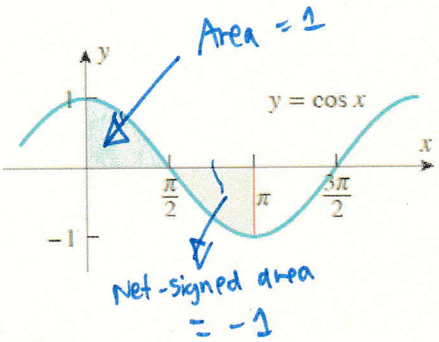
$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$$
$$= \sin x \Big|_0^{\pi/2}$$
$$= [\sin \tfrac{\pi}{2} - \sin 0]$$
$$= 1 - 0 = 1$$

(b) Make a conjecture about the value of the integral

$$\int_0^{\pi} \cos x dx$$

and confirm your conjecture using the Fundamental Theorem of Calculus.

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx = 1 + (-1) = 0 \quad ✓$$



$\boxed{\text{FTC}}$

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0$$
$$= 0 - 0 = 0 \quad ✓$$

Ex $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} (\overbrace{2x+1}^{u})^{100}\,dx$

$\boxed{\text{เดิม}}$ $\displaystyle\int (2x+1)^{100}\,dx$

ให้ $u = 2x+1$

$du = 2\,dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{2}$

$\displaystyle\int (\overbrace{2x+1}^{u})^{100}\,dx = \frac{1}{2}\int u^{100}\,du$

(*) ถ้าอินทิเกรตแบบเปลี่ยนตัวแปร u และเราทำอินทิกรัลจำกัดเขต

[ขอบเขตการอินทิเกรตหลังจากเปลี่ยนตัวแปร ต้องเปลี่ยนตามการเปลี่ยนตัวแปรเสมอ!!!]

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{b \text{ ของ } u=u(x)} f(\underbrace{u(x)}_{u})\,\overbrace{\boxed{u'(x)\,dx}}^{du} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

วิธี ① อินทิเกรตให้เสร็จ (อินทิเกรตแบบไม่จำกัดเขต) ให้เสร็จ แล้วค่อยแทนค่า

วิธี ② เปลี่ยนขอบเขตไปพร้อมๆ กัน.

แบบทดสอบย่อย

เพื่อเช็คชื่อเข้าชั้นเรียน ประจำวันอังคารที่ 26 มีนาคม พ.ศ.2562

ชื่อ-สกุล.. รหัสนักศึกษา............................ ลำดับที่...........

1. จงอินทิเกรต $\displaystyle\int \frac{4s+2}{\sqrt{s^2+s+6}}ds$

2. กำหนดให้ $f(0)=1, f(1)=3, f(2)=2$ และ $f(3)=5$ ถ้า

$$\int_{x=1}^{x=3} (\overset{y}{f(x)})^3 \overset{dy}{f'(x)dx} = \int_s^t y^3 dy$$

แล้ว จะได้ว่า $s=$ ....3......... และ $t=$ ....5.........

ให้ y = f(x) ⇒ dy = f'(x)dx

ถ้าขอบเขตเดิม x = 1 →

ขอบเขตใหม่คือ g = f(1)

ขอบเขต x = 3

ขอบเขตใหม่ คือ t = f(3)

3. ให้ y เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย

$$y(x)=\int_0^x e^{t^2}dt, \quad x\geq 0$$

(a) จงอธิบายว่า สามารถใช้**ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่** 2 (Fundamental Theorem of Calculus Part 2) หาอนุพันธ์ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

(b) จงหา y'

Example 5.19 Use the two methods above to evaluate $\int_2^0 x(x^2+5)^3dx$ $= -\int_0^2 x(x^2+5)^3 dx$

Solution by Method 1. ทำอินทิกรัลไม่จำกัดเขตให้เสร็จแล้วแทนค่า

$u = x^2+5$; $du = 2x\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

พิจารณา $\int x(x^2+5)^3 dx = \int \cancel{x}\cdot u^3 \frac{du}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{8}(x^2+5)^4 + C$

$\therefore -\int_0^2 x(x^2+5)^3 dx = \left(-\frac{1}{8}(2^2+5)^4\right) - \left(-\frac{1}{8}(0^2+5)^4\right) = -\frac{9^4}{8} + \frac{1}{8}(5)^4 = -\frac{5936}{8}$ #

Solution by Method 2. เปลี่ยนขอบเขตไปพร้อมๆ กับการเปลี่ยนตัวแปร

$u = x^2+5$; $du = 2x\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

พิจารณา $-\int_{x=0}^{x=2} x(x^2+5)^3 dx = -\frac{1}{2}\int_{u=5}^{u=9} u^3 du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4}\Big|_{u=5}^{9} = -\frac{1}{2}\left[\frac{9^4}{4} - \frac{5^4}{4}\right]$

$= -\frac{9^4}{8} + \frac{5^4}{8} = -\frac{5936}{8}$ #

ถ้า $x=0$ ได้ว่า $u = (0)^2+5 = 5$

ถ้า $x=2$ ได้ว่า $u = (2)^2+5 = 9$

Example 5.20 Evaluate

(a) $\displaystyle\int_0^{3/4} \frac{1}{1-x}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} e^x(1+e^x)^{1/2}dx$