

Ex $\int_{x=0}^{x=\ln 3} e^x (1+e^x)^{1/2} dx$

วิธีทำ $u = 1+e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$

พิจารณา $\int e^x (1+e^x)^{1/2} dx = \int \frac{e^x \cdot u^{1/2} \cdot du}{e^x} = \int u^{1/2} du$

ถ้า $x=0$ แล้ว $u=2$

$x=\ln 3$ แล้ว $u = 1+e^{\ln 3} = 1+3=4$

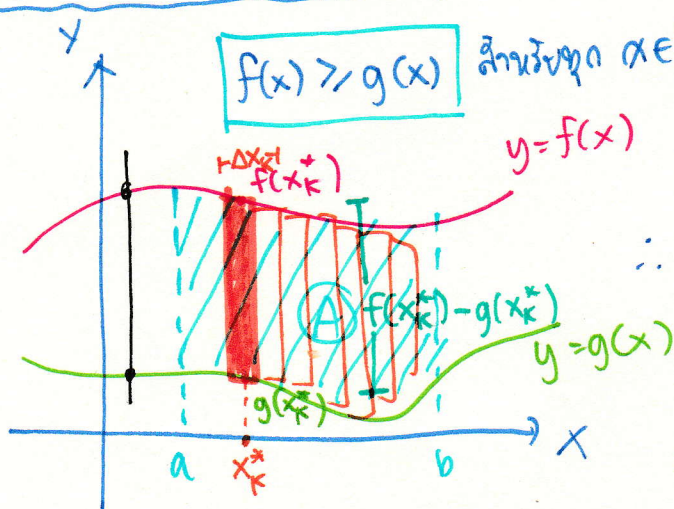
$$\therefore \int_0^{\ln 3} e^x (1+e^x)^{1/2} dx = \int_2^4 u^{1/2} du = \frac{2u^{3/2}}{3} \Big|_{u=2}^4 = \frac{2(4)^{3/2}}{3} - \frac{2(2)^{3/2}}{3} = \frac{16 - 4\sqrt{2}}{3} \quad \#$$

Ex $\int_0^{3/4} \frac{1}{1-x} dx$ (ตอบ $\ln 4$)

CHAPTER 6 Applications of Definite Integral in Geometry.

① Area

Area between two curves



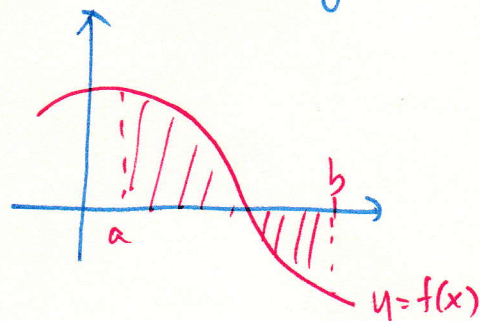
สำหรับ $x \in [a, b]$

ความสูงของ Δx_k $\Delta x_k [f(x_k^*) - g(x_k^*)]$

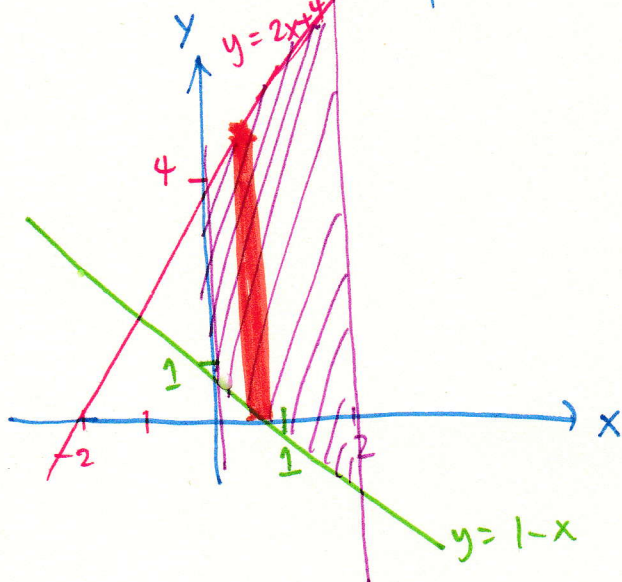
$$\therefore A \approx \sum_{k=1}^n [f(x_k^*) - g(x_k^*)] \Delta x_k$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [f(x_k^*) - g(x_k^*)] \Delta x_k$$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

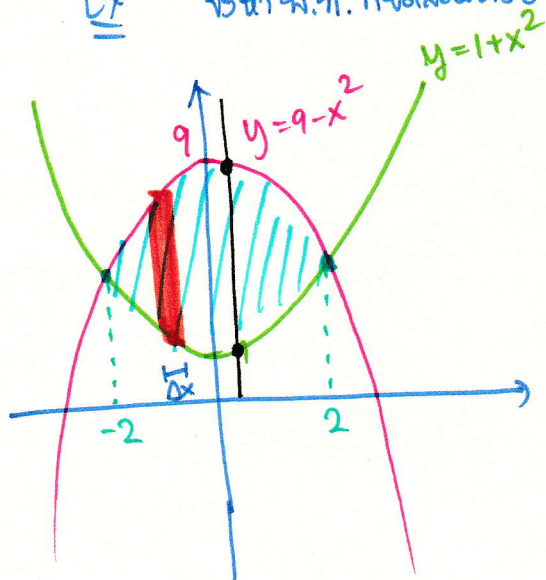


Ex 6.1 จงหาพ.ท.ที่ปิดล้อมด้วย $y=2x+4$, $y=1-x$
 ปิดล้อมด้วย $x=0$ และ $x=2$



$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^2 [(2x+4) - (1-x)] dx \\
 &= \int_0^2 (3x+3) dx \\
 &= \left[\frac{3x^2}{2} + 3x \right]_0^2 \\
 &= \left[\frac{3 \cdot 4}{2} + 3 \cdot 2 - 0 - 0 \right] = 12 \quad \#
 \end{aligned}$$

Ex จงหาพ.ท.ที่ปิดล้อมด้วย



$y=9-x^2$ และ $y=1+x^2$

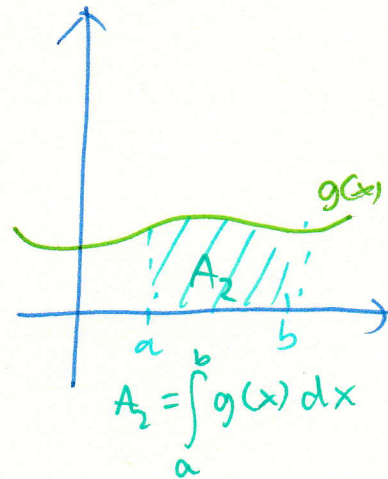
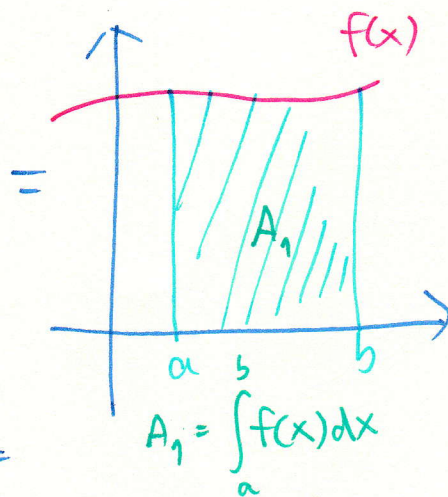
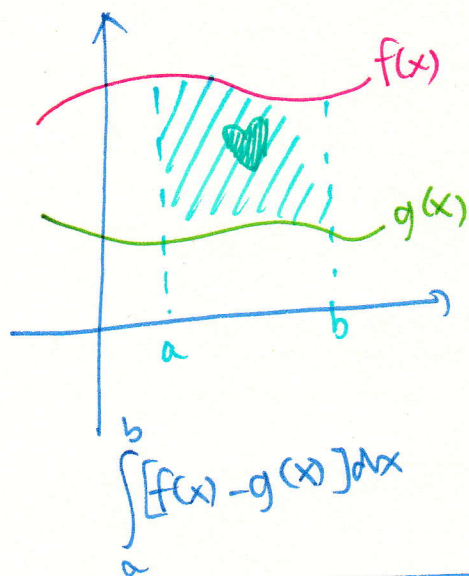
$y-9=-x^2$ จุดยอด $(0,9)$
 $y-1=x^2$ จุดยอด $(0,1)$

$y=k=a(x-h)^2$

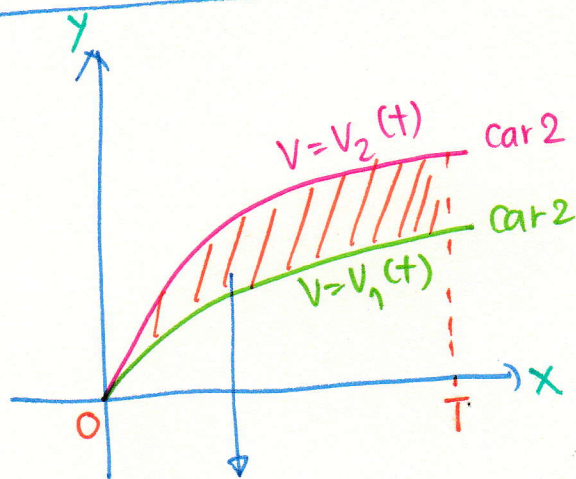
$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-2}^2 [(9-x^2) - (1+x^2)] dx \\
 &= \int_{-2}^2 (8-2x^2) dx \\
 &= \left[8x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-2}^2 \\
 &= \left[8 \cdot 2 - \frac{2 \cdot 2^3}{3} \right] - \left[8(-2) - \frac{2(-2)^3}{3} \right] \\
 &= 16 - \frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3} \\
 &= 32 - \frac{32}{3} = \frac{96-32}{3} = \frac{64}{3} \quad \#
 \end{aligned}$$

หาจุดตัดของพาราโบลา
 $y=9-x^2$; $y=1+x^2$
 $\therefore 9-x^2=1+x^2$
 $2x^2-8=0$
 $x^2-4=0$
 $x=\pm 2$

ถ้า $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$



Ex



$S(t)$
diff $\downarrow$ $\uparrow$ integrate
 $v(t)$

$$S(t) = \int_0^T v(t) dt$$

$\therefore$ หา.ก. ได้ก.ร.ร.ของ $v(t)$ ถ้า $s: v = m \cdot S(T)$

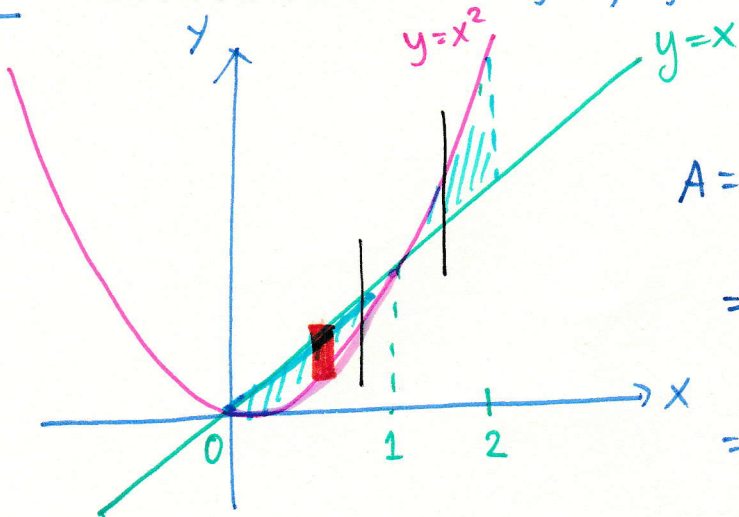
$$A = \int_0^T [v_2(t) - v_1(t)] dt$$

$$= \int_0^T v_2(t) dt - \int_0^T v_1(t) dt \quad (\because v_2(t), v_1(t) \geq 0)$$

$= S_2(t) - S_1(t) \rightarrow$ หา.ก. ได้ก.ร.ร.ของ $v_2(t)$ กับ $v_1(t)$
เพื่อหา $s: v = m \cdot s$ 2 อันจะออกมา
คือ $1227 T$.

Ex 6.4

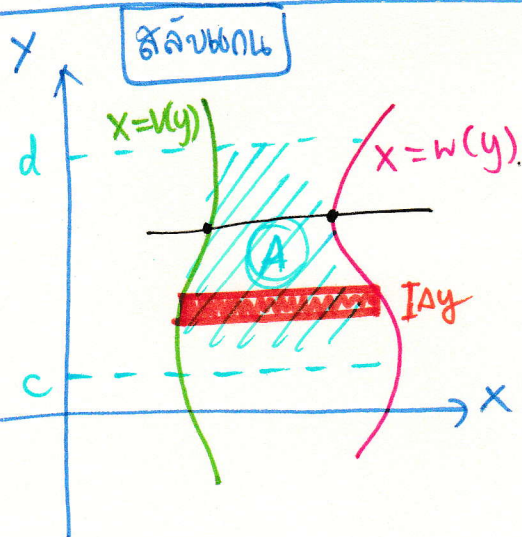
จงหา พ.ท. ที่ปิดล้อมด้วย $y=x$, $y=x^2$, $x=0$, $x=2$



$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 [x - x^2] dx + \int_1^2 [x^2 - x] dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 \\
 &= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0 + 0 \right] + \left[\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right] \\
 &= 1 - \frac{2}{3} + \frac{8}{3} - 2 \\
 &= 1 + \frac{6}{3} - 2 = 1 + 2 - 2 = 1 \quad \#
 \end{aligned}$$

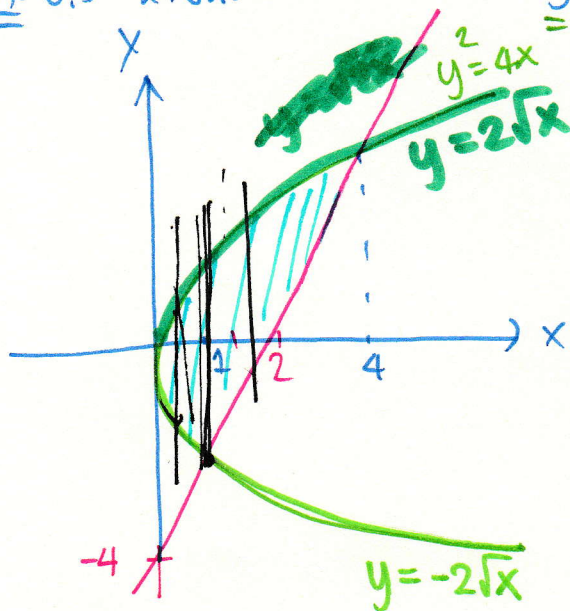
จุดตัด ของ $y=x^2$ กับ $y=x$

$$\begin{aligned}
 \therefore x^2 &= x \rightarrow x^2 - x = 0 \\
 x(x-1) &= 0 \\
 x &= 0, 1
 \end{aligned}$$



$$A = \int_c^d [w(y) - v(y)] dy$$

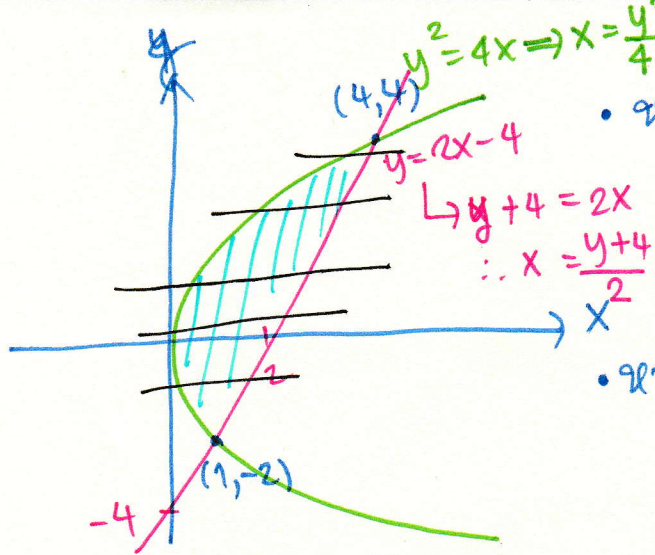
Ex 6.5 หาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y^2=4x$ และ $y=2x-4$



จงหา พ.ท. ที่ปิดล้อมด้วย x

$$A = \int_0^1 [2\sqrt{x} - (-2\sqrt{x})] dx + \int_1^4 [2\sqrt{x} - (2x-4)] dx$$

$$\begin{aligned}
 \text{หาจุดตัด} \quad (2x-4)^2 &= 4x \\
 4x^2 - 16x + 16 &= 4x \\
 4x^2 - 20x + 16 &= 0 \\
 x^2 - 5x + 4 &= 0 \\
 (x-1)(x-4) &= 0
 \end{aligned}$$



• หาจุดตัดของ y .

(อินทิเกรตเทียบกับ $y \rightarrow dy$
 $\downarrow$
 $x = \mathcal{W}(y)$)

• หาขอบเขตของ y .

ถ้า $x=1$ แทน $y=2x-4$ ได้ $(y=-2)$

ถ้า $x=4$ แทน $y=2x-4$ ได้ $y=4$

$$\therefore A = \int_{-2}^4 \left[\left(\frac{y+4}{2} \right) - \frac{y^2}{4} \right] dy$$

$$= \int_{-2}^4 \left[\frac{y}{2} + 2 - \frac{y^2}{4} \right] dy$$

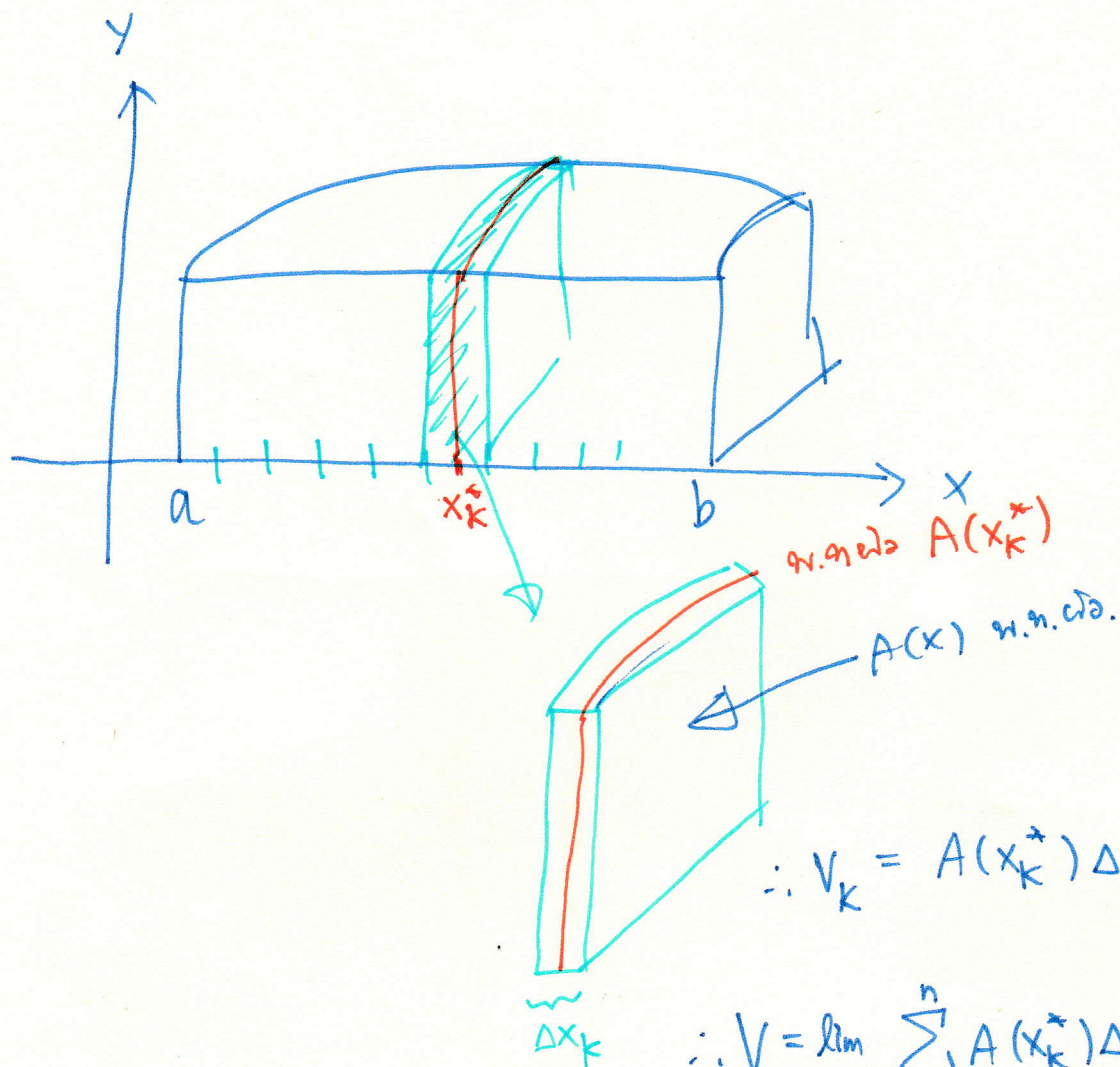
$$= \left[\frac{y^2}{4} + 2y - \frac{y^3}{12} \right]_{-2}^4$$

$$= \left[\left(\frac{16}{4} + 8 - \frac{64}{12} \right) - \left(\frac{4}{4} - 4 + \frac{8}{12} \right) \right]$$

$$= \left[\underline{4} + \underline{8} - \frac{\underline{16}}{\underline{12}} - \underline{1} + \underline{4} - \frac{\underline{8}}{\underline{12}} \right]$$

$$= \left[\underline{15} - \frac{\underline{24}}{\underline{12}} \right] = [15 - 2] = 13 \quad \#$$

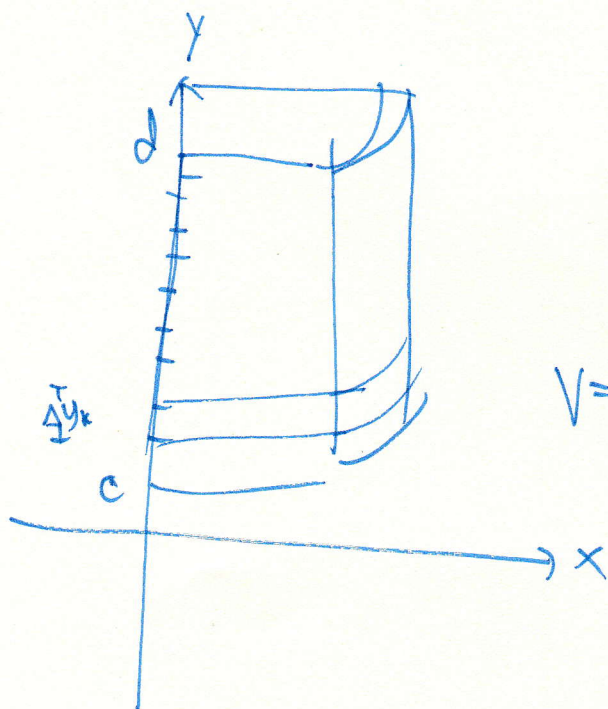
การหาปริมาตรของทรงตัน 4



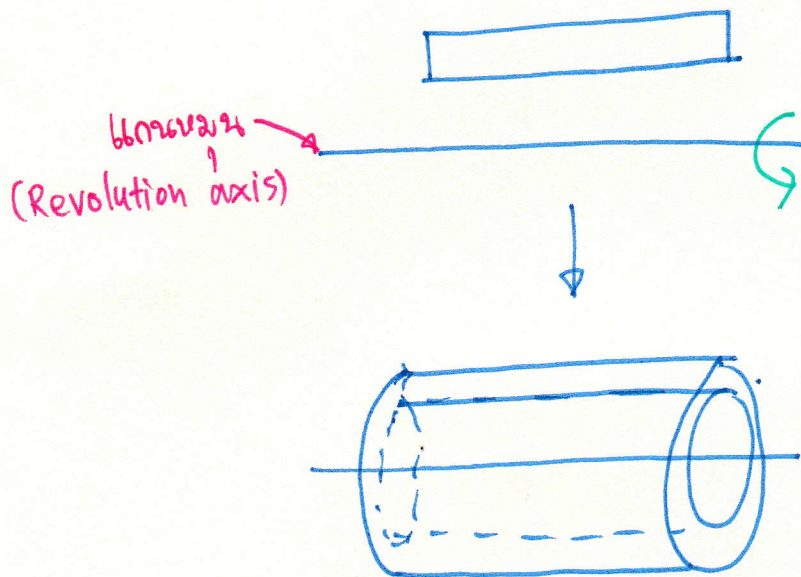
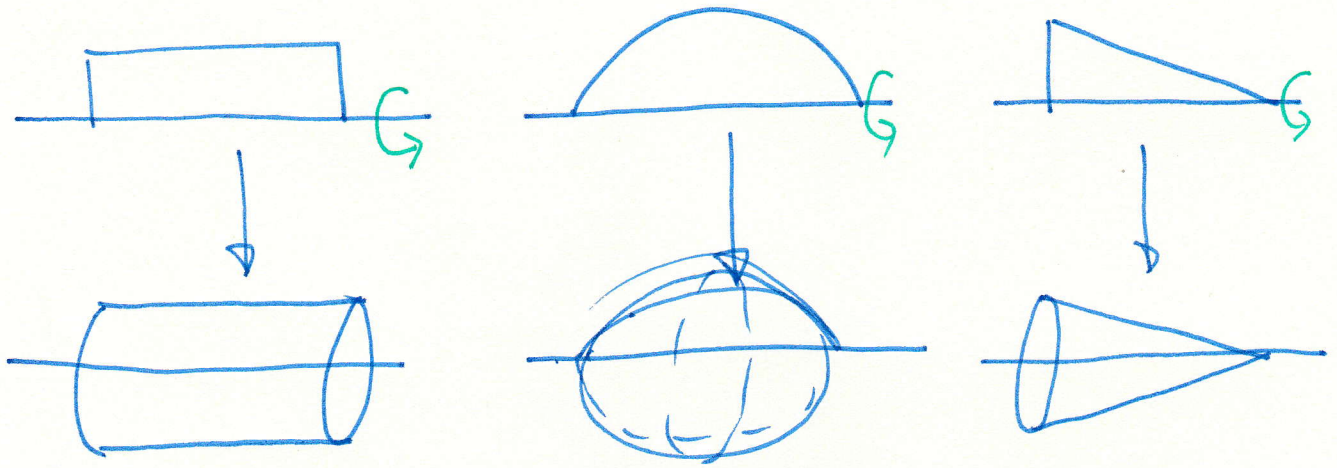
$$\therefore V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A(x_k^*) \Delta x_k$$

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

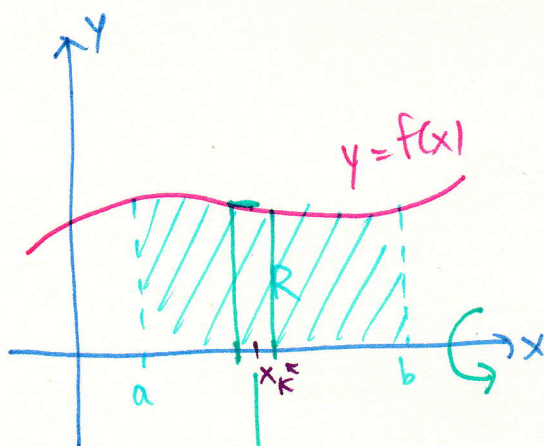
Diagram illustrating the volume element V_k in a coordinate system. The volume is bounded by $x=a$ and $x=b$. A small rectangular slice of width Δx_k is shown at position x_k^* . The height of the slice is $A(x_k^*)$. The volume of the slice is $V_k = A(x_k^*) \Delta x_k$.



$$V = \int_c^d A(y) dy$$

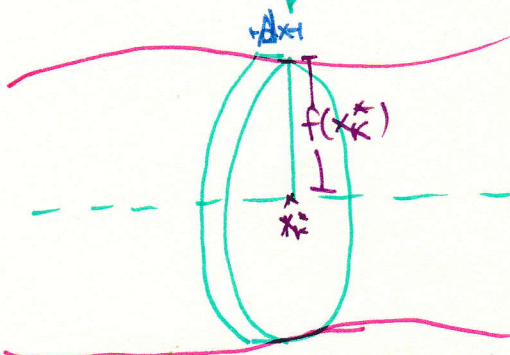


วิธีการหาคำนวณที่เกิตจากแผ่นกลม (disk method)



$$V = \int_a^b \underbrace{A(x)}_{\text{พื้นที่หน้าตัด}} dx$$

$$V = \int_a^b \underbrace{\pi [f(x)]^2}_{\text{พื้นที่หน้าตัด}} \underbrace{dx}_{\text{ความหนาแน่น volume}}$$

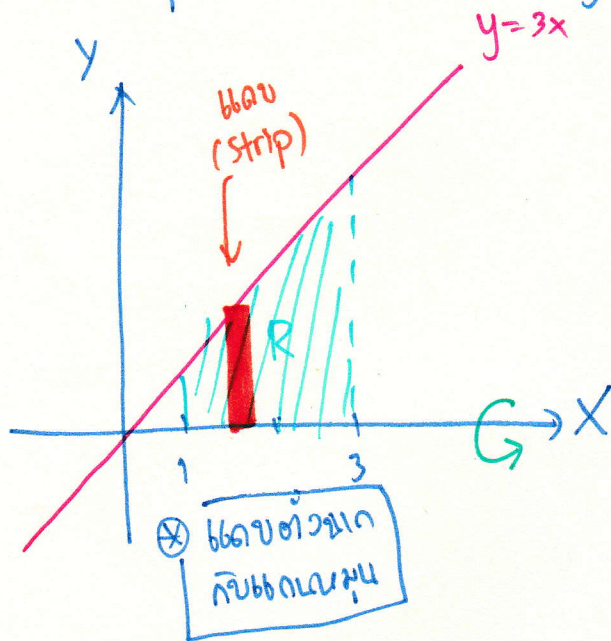


$$A(x_k^*) = \pi (f(x_k^*))^2 \rightarrow A(x) = \pi f(x)^2$$

$$\therefore V(x_k^*) = \pi (f(x_k^*))^2 \Delta x$$

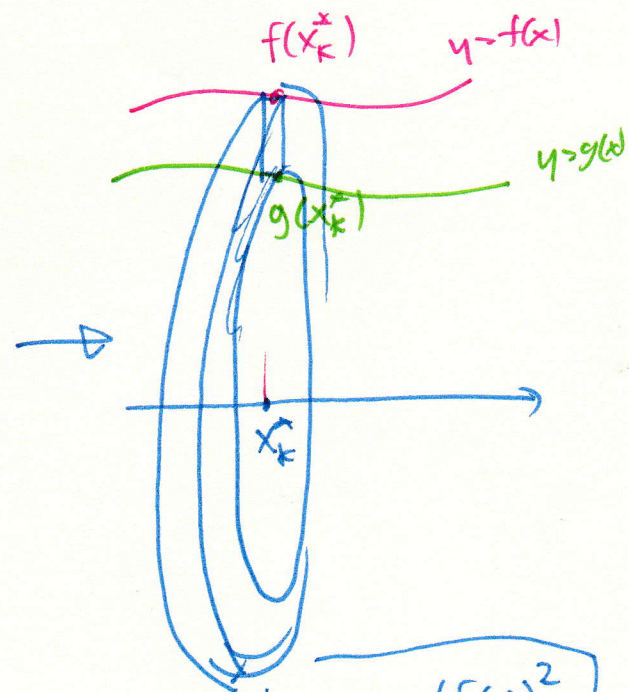
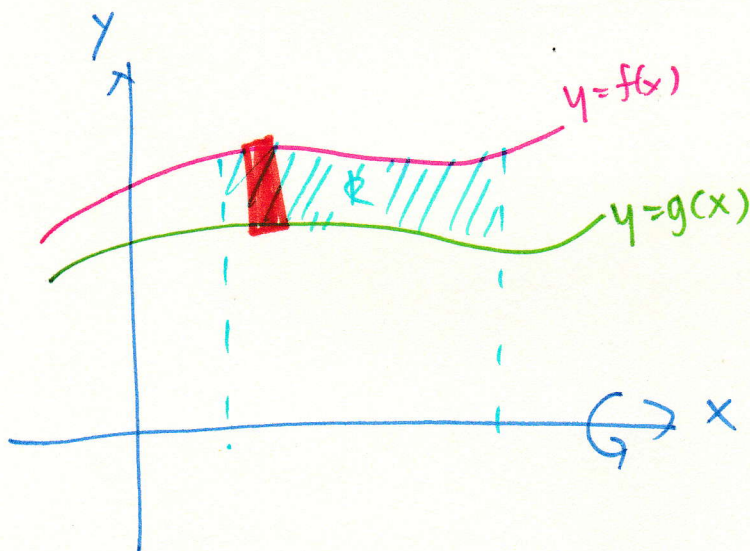
Ex 6.6 จงหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดขึ้นจากหมุนรอบแกน X.

หาพื้นที่บริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = 3x$, บน $[1, 3]$.



$$\begin{aligned}
 V &= \int_1^3 \pi (3x)^2 dx \\
 &= \pi \int_1^3 9x^2 dx \\
 &= \pi \left[\frac{9x^3}{3} \right]_1^3 \\
 &= 3\pi [3^3 - 1^3] \\
 &= 3\pi [27 - 1] = (3 \cdot 26)\pi = 78\pi
 \end{aligned}$$

การหาค่าปริมาตรที่ห่อหุ้มโดยรอบของวัตถุ

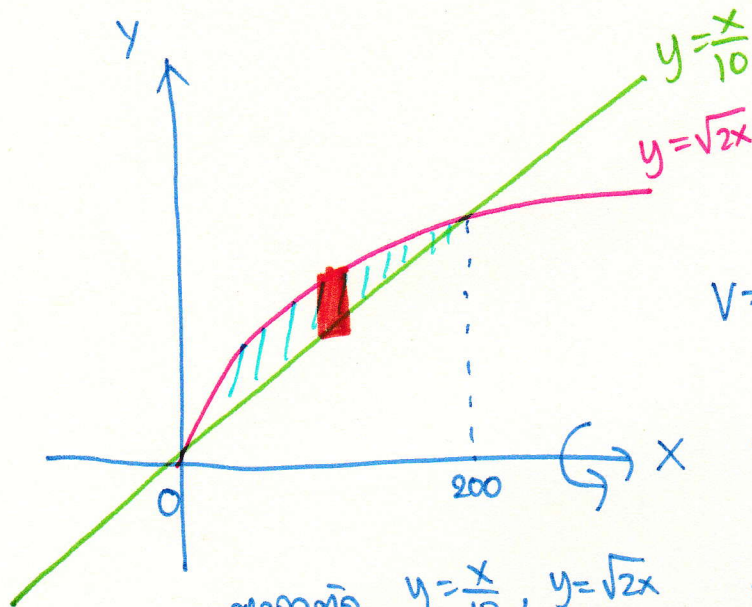


น.ก. หาปริมาตร $\Rightarrow A(x) = \pi (f(x))^2 - \pi (g(x))^2$

$$V = \int_a^b \pi [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$$

washer method / ring method.

Ex 6.7. จงหาปริมาตรทรงตันที่เกิดขึ้นจากหมุนบริเวณที่ปิดล้อมด้วย
 $y = \sqrt{2x}$, $y = \frac{x}{10}$ บน $[0, 200]$ รอบแกน x .



หาจุดตัด $y = \frac{x}{10}$, $y = \sqrt{2x}$

$$\frac{x}{10} = \sqrt{2x}$$

$$\frac{x^2}{100} = 2x$$

$$\therefore x^2 - 200x = 0$$

$$x(x - 200) = 0$$

$$V = \int_0^{200} \pi \left[(\sqrt{2x})^2 - \left(\frac{x}{10} \right)^2 \right] dx$$

$$= \int_0^{200} \pi \left[2x - \frac{x^2}{100} \right] dx$$

$$= \pi \left[2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} \right) - \frac{x^3}{300} \right]_0^{200}$$

$$= \frac{40,000\pi}{3}$$