

order (อันดับ)

① $ye^x = 1$ อันดับ 0

② $\frac{dy}{dx} = \cos x$ อันดับ 1

③ $y - y' = (\ln x + \tan 2x) y'' + \sqrt{x+y}$ อันดับ 2

solution (คำตอบ / ผลเฉลย)

general solution
(ผลเฉลยทั่วไป)

Ex $y' = 2x$
 $y = x^2 + C$
constant
ค่าคงที่

particular solution

(ผลเฉลยเฉพาะ)

Ex $y' = 2x$, $y(0) = 2$ (ปัญหาค่าเริ่มต้น)

general solution : $y = x^2 + C$

initial value problem

แทน $y(0) = 2$;

$2 = 0 + C$

$2 = C$

particular solution : $y = x^2 + 2$

การตรวจสอบผลเฉลย

Ex 8.2 ①

$\frac{dy}{dx} = 0$

check $y = 1$ เป็นคำตอบ?

$\frac{d1}{dx} = 0$ เป็นจริง

$\therefore y = 1$ เป็นคำตอบของ $\frac{dy}{dx} = 0$

② $y = e^x$ เป็นคำตอบของ $\boxed{\frac{dy}{dx} = y}$??

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} e^x = e^x = y$$

$\therefore y = e^x$ เป็นคำตอบของ $\frac{dy}{dx} = y$

③ $y = x + \frac{1}{x}$; $\boxed{x \frac{dy}{dx} + y = 2x}$

$$x \frac{dy}{dx} + y = x \frac{d}{dx} \left(x + \frac{1}{x} \right) + \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

$$= x \left[1 - \frac{1}{x^2} \right] + \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

$$= x - \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x}$$

$$= 2x$$

$\therefore y = x + \frac{1}{x}$ เป็นคำตอบของ $x \frac{dy}{dx} + y = 2x$

$$x \frac{dy}{dx} + y = 2x \quad (\text{อันดับ 1})$$

$$\frac{d}{dx}(xy) = 2x$$

$$xy = x^2 + C$$

คำตอบทั่วไป :

$$y = x + \frac{C}{x} \quad \leftarrow \text{constant}$$

Problem 8.1 ① $y_1 = e^x$ $y_2 = e^{-x}$ เป็นคำตอบของ $y'' = y$??

กน $y_1 = e^x$
 $y_1' = e^x$
 $y_1'' = e^x = y_1$

} $\Rightarrow y_1$ เป็นคำตอบ
ของ $y'' = y$

กน $y_2 = e^{-x}$
 $y_2' = -e^{-x}$
 $y_2'' = e^{-x} = y_2$

} $\Rightarrow y_2 = e^{-x}$
เป็นคำตอบ $y'' = y$

② $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ เป็นคำตอบของ $y'' = y$???

linear combination
ผลรวมเชิงเส้นของ y_1, y_2

$$y'(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$$

$$y''(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} = y(x)$$

$$\therefore y(x) \text{ เป็นคำตอบของ } y'' = y$$

Ex 8.3

$$y'' = -y \quad (\text{อันดับ 2})$$

$$\text{คำตอบทั่วไป: } y = \underline{C_1} \cos x + \underline{C_2} \sin x$$

กำหนดเงื่อนไข
เริ่มต้น

$$y(0) = 1, \quad y(\pi/2) = 2$$

แทนค่า $y(0) = 1$; $1 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0$
 $1 = C_1$

แทนค่า $y(\pi/2) = 2$; $2 = C_1 \cos \pi/2 + C_2 \sin \pi/2$
 $2 = C_2$

$$\therefore \text{คำตอบเฉพาะ: } y = \cos x + 2 \sin x$$

Problem 8.2 จงหาคำตอบเฉพาะของ

$$2y \frac{dy}{dx} = 3x^2, \quad y(0) = -3$$

คำตอบทั่วไป: $y^2 = x^3 + C$

แทน $y(0) = -3$; $(-3)^2 = 0 + C$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $x \quad y$
 $9 = C$

$\therefore$ คำตอบเฉพาะ: $y^2 = x^3 + 9$

Separable Equation

(แยกกันได้)

รูปแบบทั่วไป: $h(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$

Ex

Eq.	Separable form	$h(y)$	$g(x)$
$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$	$y \frac{dy}{dx} = x$	y	x
$x \frac{dy}{dx} = -y^3$	$\frac{1}{y^3} \frac{dy}{dx} = -x$	$\frac{1}{y^3}$	$-x$
$\frac{dy}{dx} = y - \frac{y}{x}$ $\frac{dy}{dx} = y(1 - \frac{1}{x})$	$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$	$1 - \frac{1}{x}$
$\frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = x\sqrt{1+y}$	$\frac{y}{\sqrt{1+y}} \frac{dy}{dx} = x^2$	$\frac{y}{\sqrt{1+y}}$	x^2
$\frac{x^2}{1+y^2} - \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{x}{1+y^2} = \frac{dy}{dx}$	$(1+y^2) \frac{dy}{dx} = x$	$1+y^2$	x

กรณีคำตอบ

$$h(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$$

$$\int h(y) dy = \int g(x) dx$$

Ex 8.5

$$\frac{dy}{dx} = -4xy^2$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int -4x dx$$

$$\text{คำตอบทั่วไป: } -\frac{1}{y} = -2x^2 + C \quad \#$$

โจทย์

ค่าเริ่มต้น:

$$\frac{dy}{dx} = -4xy^2, \quad y(0) = 1$$

$$\text{คำตอบทั่วไป } -\frac{1}{y} = -2x^2 + C$$

$$\text{แทน } y(0) = 1; \quad -1 = 0 + C$$

$$-1 = C$$

$$\therefore \text{คำตอบเฉพาะคือ } -\frac{1}{y} = -2x^2 - 1 \quad \#$$

Problem 8.3

$$(4y - \cos y) \frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0, \quad y(0) = 0$$

$$(4y - \cos y) \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\int (4y - \cos y) dy = \int 3x^2 dx$$

$$\text{คำตอบทั่วไป: } 2y^2 - \sin y = x^3 + C$$

$$\text{แทน } y(0) = 0; \quad 0 - \sin 0 = 0 + C$$

$$0 = C$$

$$\text{คำตอบเฉพาะคือ } 2y^2 - \sin y = x^3 \quad \#$$

Problem 8.4

จงหาสมการเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(0, 3)$

มีความชันที่จุด (x, y) คือ $\frac{2x}{y^2}$

→ จงหา $y(x)$ เมื่อ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2}$, $y(0) = 3$

วิธีทำ

จาก $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2}$

$$\int y^2 dy = \int 2x dx$$

$$\frac{y^3}{3} = x^2 + C$$

แทน $y(0) = 3$; $9 = 0 + C$

$$9 = C$$

สมการเส้นโค้งคือ $\frac{y^3}{3} = x^2 + 9$

#
