ทบทวน

① $y' = y$ (การตรวจสอบว่าเป็นคำตอบ)

check $y = e^x + 5$ เป็นคำตอบ

$\boxed{y' = e^x}$

$y' = e^x \neq e^x + 5$

$\therefore y = e^x + 5$ ไม่เป็นคำตอบของ $y' = y$

$\boxed{y = 5e^x} \rightarrow y' = 5e^x$

$\therefore y' = 5e^x = y$ เป็นคำตอบของ $y' = y$.

First order equation

② สมการ **separable eq^{n}** (แยกตัวแปรได้)

Ex 8.4 ผ่านจุด $(0,3)$ $\longrightarrow$ (ข้าม)

สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง First order Linear Equation

$$\boxed{\frac{dy}{dx}} + p(x)\,y = q(x)$$

สปส หน้า $\frac{dy}{dx} = 1$.

Separable:

$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$

$\downarrow$

differentiate:

$h(y)\,dy = g(x)\,dx$

$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$

Ex สมการเดิม	Linear Form	$p(x)$	$q(x)$
$\frac{dy}{dx} + x^2 y = e^x$	$\frac{dy}{dx} + x^2 y = e^x$	x^2	e^x
$y' - 3e^x y = e^x$	$y' - 3e^x y = e^x$	$-3e^x$	e^x
$x\frac{dy}{dx} = 1$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$	0	$\frac{1}{x}$
$xy' + 2y = 4x^2$	$y' + \frac{2}{x}y = 4x$	$\frac{2}{x}$	$4x$
$\frac{dy}{dx} + y - \frac{1}{1+e^x} = 0$	$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{1+e^x}$	1	$\frac{1}{1+e^x}$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)} \quad \text{—} (*)$$

พยายามจัดรูป $(*)$ ให้เป็นสมการ separable คือคูณ $(*)$ ด้วย $\mu(x)$

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x)$$

พิจารณา
$$\frac{d}{dx}[\mu(x)\cdot y] = \mu(x)\frac{dy}{dx} + y\frac{d\mu(x)}{dx}$$

อยากได้

Set: $$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \frac{d}{dx}[\mu(x)\cdot y] = \mu(x)\frac{dy}{dx} + y\frac{d\mu(x)}{dx}$$

แก้สมการเพื่อหาว่า $\mu(x)$ คือใครแล้วทำให้ได้ว่า

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)q(x)} \quad \text{—} (**)$$

$$\therefore \quad \mu(x)p(x)y = y\frac{d\mu(x)}{dx}$$

$$\mu(x)p(x) = \frac{d\mu(x)}{dx}$$

$$\therefore \quad p(x)dx = \frac{1}{\mu(x)}d\mu(x)$$

$$\int p(x)dx = \int \frac{1}{\mu(x)}d\mu(x)$$

$$\int p(x)dx = \ln|\mu(x)|$$

$$\therefore \quad \boxed{\mu(x) = e^{\int p(x)dx}}$$

← ตัวประกอบการอินทิเกรต (integrating factor)

สรุป ① เมื่อมี DE แบบเชิงเส้น → จัดรูปมาตรฐาน

$$\boxed{\frac{dy}{dx}} + p(x)\boxed{y} = q(x) \quad \text{—} ♡$$

② หา $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$

③ คูณสมการ ♡ ด้วย $\mu(x)$ ทั้งสมการ แล้ว ♡ เปลี่ยนเป็น

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)q(x)$$

④ แก้แบบ separable.

Ex 8.4 $\frac{dy}{dx} - y = e^{2x} \Rightarrow p(x) = -1$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int -1\,dx} = e^{-x}$$

$$\boxed{\mu(x) = e^{-x}}$$

$$\therefore e^{-x}\left[\frac{dy}{dx} - y\right] = e^{-x} \cdot e^{2x}$$

$$\frac{d}{dx}[e^{-x}y] = e^{x}$$

$$d(e^{-x}y) = e^{x}\,dx$$

$$\int d(e^{-x}y) = \int e^{x}\,dx$$

$$e^{-x}y = e^{x} + C$$

บวก C ทันที!
ไม่เช่นนั้น
คำตอบจะหาย.

$$\therefore y = (e^{x}) \cdot e^{x} + Ce^{x}$$

$$\boxed{y = e^{2x} + Ce^{x}}$$

Ex 8.5 $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 - x + 1$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}} + p(x)y = q(x)$$

1. $\therefore \boxed{\frac{dy}{dx}} + \frac{2}{x}y = x - 1 + \frac{1}{x}$ ☺

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2$$

2. $\therefore \boxed{\mu(x) = x^2}$

3. $x^2\left[\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y\right] = x^2\left[x - 1 + \frac{1}{x}\right]$

$$\boxed{\frac{d}{dx}[x^2y]} = x^3 - x^2 + x$$

$\frac{d}{dx}[\mu(x)y]$

4. $d(x^2y) = (x^3 - x^2 + x)\,dx$

$$\int d(x^2y) = \int (x^3 - x^2 + x)\,dx$$

$$x^2y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}}$$

✳

Ex 8.6

$$x\frac{dy}{dx} - y = x \quad ; \; y(1) = 2 \quad (x > 0)$$

$$\boxed{\boxed{\frac{dy}{dx}} + p(x)\boxed{y} = q(x)}$$

$\boxed{1}$ $$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 1 \qquad p(x) = -\frac{1}{x}$$

$\boxed{2}$ $$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|}$$

$$= e^{\ln|x|^{-1}} = \frac{1}{|x|}$$

$$\boxed{\mu(x) = \frac{1}{x}}$$

$\boxed{3}$ $$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}y\right) = \frac{1}{x}$$

$$d\left(\frac{1}{x}y\right) = \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{x}y = \ln|x| + C$$

$$\therefore \boxed{y = x\ln|x| + Cx}$$

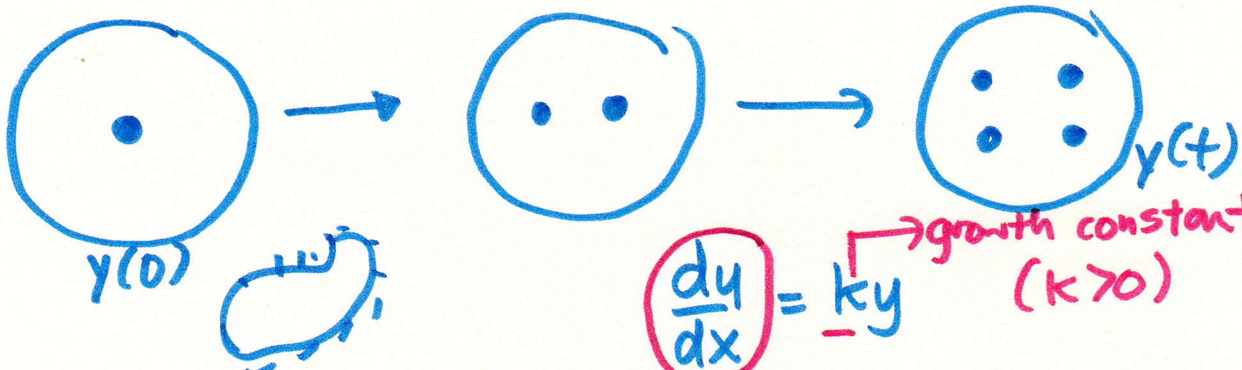
$\boxed{y(1)=2}$ $$2 = 1\cancel{\ln 1}^{0} + C\cdot 1 \implies C = 2$$

$$\therefore \boxed{y = x\ln|x| + 2x}$$

(particular solution)

Applications Exponential Growth & Decay Problem

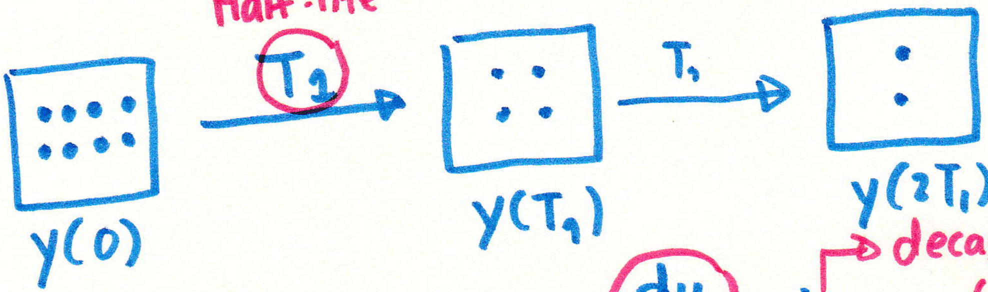
Exponential Growth.



$$\frac{dy}{dx} = ky$$

k → growth constant. $(k>0)$

Half-life



$$\frac{dy}{dx} = -ky$$

k → decay constant $(k>0)$

Ex $k>0$ solve $\frac{dy}{dt} = ky$; $y(0) = y_0$

เป็นสมการ separable eq^{n} :

$$\frac{1}{y}\,dy = k\,dt$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$$

$$\ln|y| = kt + C$$

$$\therefore e^{\ln|y|} = e^{kt+C}$$

$$y = e^{kt} e^{C} \Rightarrow \boxed{y = Ce^{kt}}$$

general solution

จาก $y(0)=y_0 : \Rightarrow y_0 = y(0) = C$

$$\therefore \boxed{y = y_0 e^{kt}}$$

กรณี decay $\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -kt$

$$y = Ce^{-kt}$$

$\boxed{y=y_0} \Rightarrow \boxed{y = y_0 e^{-kt}}$

Ex 8.8 Half-life : เมื่อเวลาผ่านไป T ปริมาณสารจะเหลือครึ่งหนึ่ง
radium-226 มีครึ่งชีวิต 1600 ปี จงหาค่า K.

$$\frac{dy}{dx} = -ky$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{y(t) = y_0 e^{-kt}} \qquad (y(0) = y_0)$$

ค่าเริ่มต้นมีสาร y_0 → เวลาผ่านไป T สารของเราจะลดเหลือ $\frac{y_0}{2}$

$$\therefore \quad \frac{\cancel{y_0}}{2} = y(T) = \cancel{y_0} e^{-kT}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} = e^{-kT}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln e^{-kT}$$

$$-\ln 2 = -kT$$

$$\therefore \quad k = \frac{\ln 2}{T}$$

$$\boxed{T = 1600} : \quad k = \frac{\ln 2}{1600}$$

Review

CH5 Integration
- definite integral
  - riemann sum
- indefinite integral
  - $F' = f$
  - • การเปลี่ยนตัวแปร .

CH6 Geometry
- ① พ.ท. ระหว่างโค้ง
- ② ปริมาตรทรงตันจากการหมุน
  - 1 Disk/washers
  - 2 Cylindrical shell

CH7 เทคนิคการอินทิเกรต
- ① by parts u, dv LIATE
- ② ตรีโกณบางแบบ
- ③ แทนค่าตรีโกณ
  - $\sqrt{a^2-u^2} \Rightarrow u = a\sin\theta$
  - $\sqrt{a^2+u^2} \Rightarrow u = a\tan\theta$
  - $\sqrt{u^2-a^2} \Rightarrow u = a\sec\theta$
- ④ partial fraction
- ⑤ Improper integral

CH8 DEs
- ① ตรวจสอบการเป็นผลเฉลย
- ② Separable
- ③ Linear Eq^n
- ④ Applications