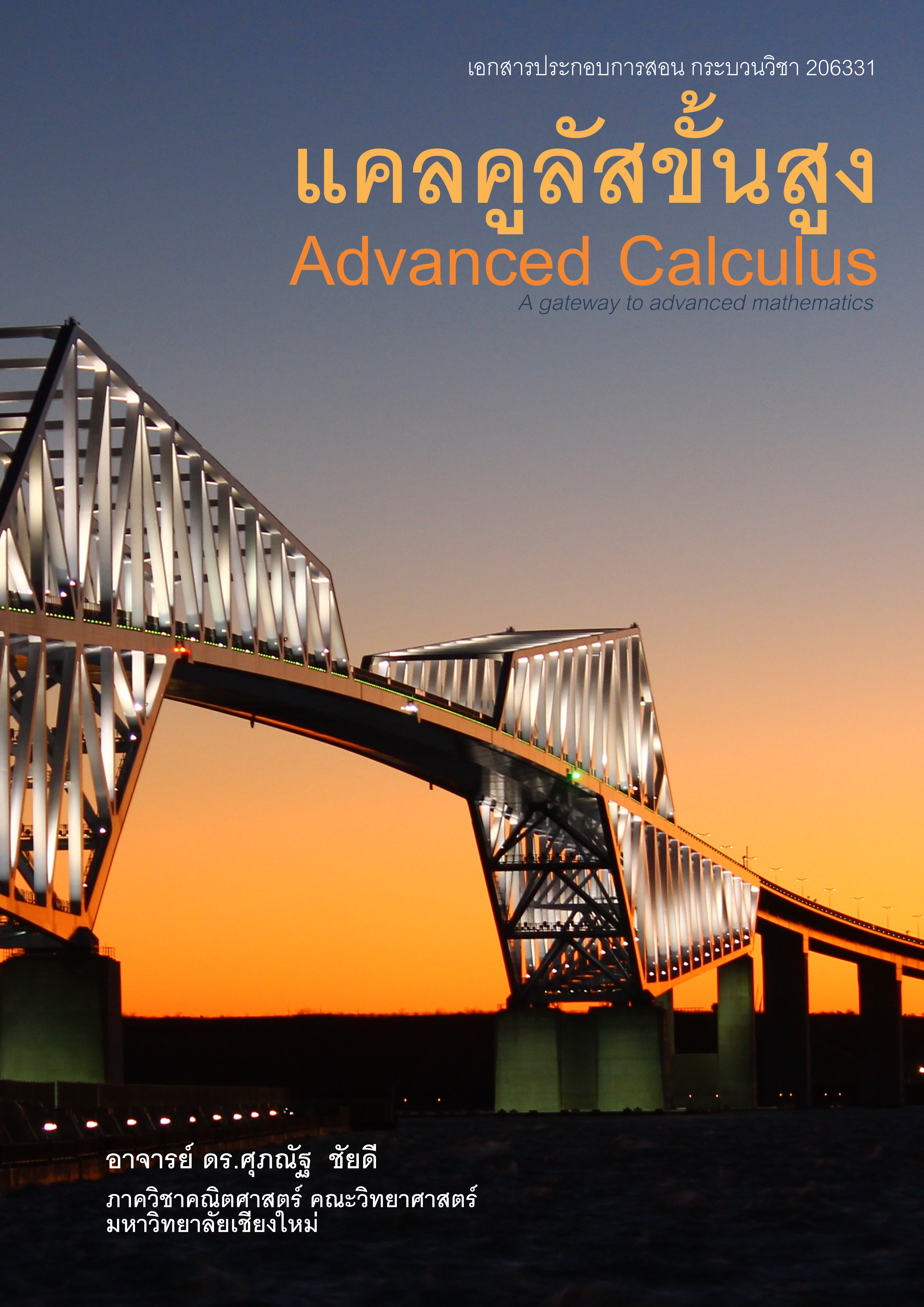
เอกสารประกอบการสอน กระบวนวิชา 206331

แคลคูลัสขั้นสูง
Advanced Calculus

A gateway to advanced mathematics



อาจารย์ ดร.ศุภณัฐ ชัยดี

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

เอกสารประกอบการสอน

กระบวนวิชา 206331

แคลคูลัสขั้นสูง

Advanced Calculus

อาจารย์ ดร. ศุภณัฐ ชัยดี

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

พฤษภาคม 2562

ฉบับออนไลน์ สามารถดาวน์โหลดได้ที่
Website: http://www.schaidee.com/teaching

เอกสารประกอบการสอนกระบวนวิชา 206331
แคลคูลัสขั้นสูง Advanced Calculus

พิมพ์ครั้งที่ 0 จำนวน 12 เล่ม (พฤษภาคม 2562)
(ฉบับต้นร่างเอกสารประกอบการสอน)

จัดทำโดย อาจารย์ ดร. ศุภณัฐ ชัยดี
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
239 ถนนห้วยแก้ว ตำบลสุเทพ อำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่ 50200
E-mail: supanut.c@cmu.ac.th
Website: http://www.schaidee.com

พิมพ์ที่ หน่วยพิมพ์เอกสาร คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
โทร 053 943317, 053 943465
http://www2.science.cmu.ac.th/offset/

ข้อคิดเห็นหรือข้อเสนอแนะ โปรดส่งมาได้ที่อีเมลล์ supanut.c@cmu.ac.th

คำนำ

เอกสารประกอบการสอนฉบับนี้ จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบการสอนในกระบวนวิชา 206331 แคลคูลัสขั้นสูง (Advanced Calculus) ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ซึ่งเป็นกระบวนวิชาบังคับสำหรับนักศึกษาหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ และเป็นกระบวนวิชาเลือกสำหรับนักศึกษาสาขาอื่น ๆ ที่ผ่านการศึกษากระบวนวิชาแคลคูลัสพื้นฐานมาแล้ว

กระบวนวิชาแคลคูลัสขั้นสูง เป็นกระบวนวิชาที่มุ่งเน้นการศึกษาประเด็นต่าง ๆ ที่น่าสนใจและจำเป็นสำหรับการศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้น รวมถึงทำการพิสูจน์ประเด็นต่าง ๆ ที่ได้ศึกษามาแล้วในกระบวนวิชาแคลคูลัสพื้นฐาน กระบวนวิชานี้มีพื้นฐานของการศึกษาด้านคณิตวิเคราะห์ (Mathematical Analysis) แต่ยังคงมีเนื้อหาในภาคคำนวณอยู่บ้าง จึงกล่าวได้ว่า กระบวนวิชานี้เป็นกระบวนวิชาที่เปรียบเสมือนประตูเชื่อมไปสู่การศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูง ซึ่งต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชัน ตลอดจนการวิเคราะห์คุณสมบัติต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชัน เพื่อการนำไปใช้ในระดับที่สูงขึ้นต่อไป

เอกสารประกอบการสอนฉบับนี้ แบ่งเนื้อหาออกเป็น 3 บท ตามคำอธิบายลักษณะกระบวนวิชา ประกอบด้วย **บทที่ 1** แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร **บทที่** 2 ปริพันธ์จำกัดเขต และ**บทที่** 3 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ โดยภาพรวมของกระบวนวิชานี้ ผู้อ่านจะได้เห็นว่า เมื่อเราขยายแนวคิดจากฟังก์ชันตัวแปรเดียวสู่ฟังก์ชันหลายตัวแปร มีหลายแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีของฟังก์ชันหลายตัวแปรซึ่งมีความคล้ายกับทฤษฎีของฟังก์ชันตัวแปรเดียว แต่ก็มีหลาย ๆ แนวคิดก็มีความแตกต่างไปจากทฤษฎีของฟังก์ชันตัวแปรเดียวเช่นกัน

เพื่อให้ผู้อ่านเกิดความซาบซึ้งในการศึกษากระบวนวิชานี้ ผู้เขียนจึงได้จัดทำเอกสารฉบับนี้จึงอย่างพิถีพิถัน โดยพยายามให้ผู้อ่านได้เห็นการเปรียบเทียบทฤษฎีบทที่ทราบในฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรกับทฤษฎีบทของฟังก์ชันหลายตัวแปรเพื่อให้เห็นภาพความเชื่อมโยงจากความรู้เดิมที่เคยมีอยู่ นอกจากนี้ ผู้เขียนได้เลือกตัวอย่างที่เป็นทั้งตัวอย่างที่สนับสนุนทฤษฎีบท และตัวอย่างที่ค้านการคาดการณ์ข้อความทางคณิตศาสตร์ของทฤษฎีบทต่าง ๆ ซึ่งผู้เขียนคาดหวังว่า ผู้อ่านจะได้เข้าใจทฤษฎีบทต่าง ๆ และการใช้ทฤษฎีบทที่กล่าวมา เพื่อได้เข้าใจลักษณะงานทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ เอกสารฉบับนี้ได้บรรจุภาพและกราฟของฟังก์ชันที่นำมาเป็นตัวอย่าง โดยผู้เขียนได้วาดกราฟโดยใช้โปรแกรม Wolfram Mathematica® 11.1 และวาดแผนภาพโดยใช้โปรแกรม Keynote เพื่อให้ผู้อ่านได้เข้าใจตัวอย่าง ตลอดจนสามารถสังเกตและเห็นภาพของทฤษฎีบทและตัวอย่าง เพื่อนำไปสู่การคาดการณ์คุณลักษณะของฟังก์ชัน ทั้งนี้ แบบฝึกหัดประกอบหัวข้อ ผู้เขียนได้เลือกแบบฝึกหัด เพื่อฝึกประสบการณ์การพิสูจน์ และให้ผู้อ่านได้เห็นแง่มุมที่น่าสนใจที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบท รวมถึงตัวอย่างค้านต่าง ๆ ที่น่าสนใจ ที่ใช้ประกอบทฤษฎีบทอีกด้วย

เอกสารนี้จะสำเร็จลงไม่ได้ หากขาดความช่วยเหลือและสนับสนุนจากหลาย ๆ ส่วน ผู้เขียนขอขอบคุณนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ รหัส 59 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ที่ลงทะเบียนกระบวนวิชานี้ในภาคการศึกษา 2/2560 ทำให้เกิดโครงร่างของเอกสารฉบับเขียนด้วยลายมือ ที่ขาดไม่ได้คือ นักศึกษาที่ลงทะเบียนกระบวนวิชานี้

ในภาคการศึกษา 2/2561 ที่เป็นส่วนสำคัญซึ่งทำให้เอกสารฉบับนี้เกิดขึ้นเป็นเล่มจริงสมดังความตั้งใจของผู้เขียน ตลอดจนได้แนะนำข้อบกพร่องเพื่อแก้ไขเอกสารฉบับนี้ให้สมบูรณ์ รวมถึง ธนกร อุดมวรรัตน์ ซึ่งได้ช่วยตรวจทานต้นฉบับอย่างละเอียด นอกจากนี้ ผู้เขียนขอขอบคุณ อาจารย์ ดร.อติชาต เกตตะพันธุ์ ที่ได้ให้คำแนะนำเกี่ยวกับการสอนในกระบวนวิชานี้ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สมลักษณ์ อุตุดี ที่ได้อ่านต้นฉบับ ให้ข้อเสนอแนะต่าง ๆ เพื่อแก้ไขเอกสารนี้ให้สมบูรณ์ในทุก ๆ ด้าน รวมถึงคณาจารย์ในภาควิชาที่เป็นกำลังใจในการจัดทำเอกสารฉบับนี้

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า เอกสารฉบับนี้จะเป็นประโยชน์แก่ผู้อ่าน และก่อให้เกิดความงอกงามทางวิชาการ คุณงามความดีของหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนขอยกให้แก่ครอบครัว ครูบาอาจารย์ที่ได้อบรมสั่งสอนตั้งแต่เด็กจนกระทั่งสำเร็จการศึกษา โดยเฉพาะอย่างยิ่ง Prof. Kokichi Sugihara อาจารย์ที่ปรึกษาระดับปริญญาเอกของผู้เขียน ซึ่งเป็นแรงบันดาลใจให้แก่ผู้เขียนในการทำงานมาโดยตลอด และหากเอกสารฉบับนี้มีข้อผิดพลาดประการใด ผู้เขียนขอน้อมรับไว้ ณ ที่นี้ รวมถึงผู้อ่านสามารถแจ้งให้ผู้เขียนทราบเพื่อที่จะได้นำไปปรับปรุงและแก้ไขในลำดับต่อไป

ศุภณัฐ ชัยดี

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
พฤษภาคม 2562

สารบัญ

แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร

บทที่ 1

ในวิชาแคลคูลัสพื้นฐาน เราได้ศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันหลายตัวแปร และแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปรเพื่อนำไปใช้งานในบริบทต่างๆ สำหรับการศึกษาในกระบวนวิชานี้ เราจะศึกษาแคลคูลัสที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันหลายตัวแปรในมุมมองของการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เคยใช้ในแคลคูลัสพื้นฐาน ตลอดจนการนำทฤษฎีบทไปใช้ในการศึกษาด้านอื่นๆ ต่อไป

1.1 ฟังก์ชันหลายตัวแปร

ต่อไปนี้ จะกำหนดให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง จะเรียก $\mathbb{R}$ ว่าเป็น**ปริภูมิหนึ่งมิติ** (One-dimensional space)

ผลคูณของเซต $A_1, ..., A_n$ เมื่อ $n \geq 2$ เขียนแทนด้วย $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ คือเซตของ n สิ่งอันดับ (n-tuple) $(a_1, ..., a_n)$ เมื่อ $a_i \in A_i$ นั่นคือ

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, ..., a_n) | a_i \in A_i \text{ ทุก } i = 1, ..., n\}$$

สำหรับกรณีที่ A_i คือเซตของจำนวนจริง เราจะเขียน $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n \text{ ตัว}}$ ดังนั้น สมาชิกใน $\mathbb{R}^n$ คือ n สิ่งอันดับ $(x_1, ..., x_n)$ เมื่อ $x_i \in \mathbb{R}$ สำหรับทุก i

> **หมายเหตุ.** เราอาจมองได้ว่า สมาชิกใน $\mathbb{R}^n$ ที่เป็น n สิ่งอันดับ เป็น**เวกเตอร์** (vector) ดังนั้น ในหนังสือหลายๆ เล่ม การเขียนแทน n สิ่งอันดับจะใช้สัญลักษณ์แบบเวกเตอร์ กล่าวคือ อาจเขียนว่า $\mathbf{x} = (\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_n})$ ได้

ในคณิตศาสตร์พื้นฐาน เราได้นิยามฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว กล่าวคือ ความสัมพันธ์ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน (function / mapping) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f$ ถ้า $x_1 = x_2$ แล้ว $y_1 = y_2$

เพื่อวางนัยไปสู่ฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร กำหนด**ตัวแปรอิสระ** (independent variable) $x_1, ..., x_n$ จำนวน n ตัว เขียนในรูป n สิ่งอันดับ $\mathbf{P} = (x_1, ..., x_n)$ สมมติว่าแต่ละ n สิ่งอันดับ $\mathbf{P}$ มี $w \in \mathbb{R}$ เป็น**ตัวแปรตาม** (dependent variable) เซตของคู่ $(\mathbf{P}, w)$ เรียกว่า ฟังก์ชันค่าจริง n ตัวแปร (real-valued function of n variables) เขียนแทนด้วย f

> **บทนิยาม** 1.1.1. ให้ $f \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ เป็นความสัมพันธ์จาก $\mathbb{R}^n$ ไปยัง $\mathbb{R}$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันค่าจริง n ตัวแปร ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละคู่ $(\mathbf{P}_1, w_1), (\mathbf{P}_2, w_2)$ โดยที่ $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathbb{R}^n$, $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ ถ้า $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ แล้ว $w_1 = w_2$

ในการเขียนฟังก์ชัน เราเขียนได้ว่า

$$w = f(\mathbf{P}) \qquad \text{หรือ} \qquad w = f(x_1, ..., x_n) \tag{1.1.1}$$

ทั้งนี้ ฟังก์ชันที่เขียนดังสมการ (1.1.1) เราเรียกว่า **ฟังก์ชันชัดแจ้ง** (explicit function) อย่างไรก็ตาม ในบางครั้ง เราไม่อาจเขียนความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปแบบที่เห็นเด่นชัด ดังนั้น สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปร อาจเขียนได้อยู่ในรูป**ฟังก์ชันโดยปริยาย** (implicit function) เขียนได้ในรูปแบบ

$$\phi(x_1, ..., x_n) = 0 \tag{1.1.2}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชัน n ตัวแปรที่ไม่สามารถเขียนความสัมพันธ์ที่ชัดแจ้งของ x_i ในเทอมของตัวแปรอิสระที่เหลือ $n-1$ ตัวแปรได้ อย่างไรก็ตาม เราศึกษาฟังก์ชันชัดแจ้งเป็นหลักในกระบวนวิชานี้

หมายเหตุ. ในการตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันหรือไม่ นัยหนึ่งคือ เราทำการตรวจสอบว่า **การกำหนดฟังก์ชันเป็นไปอย่างแจ่มชัด** (well-defined) หรือไม่

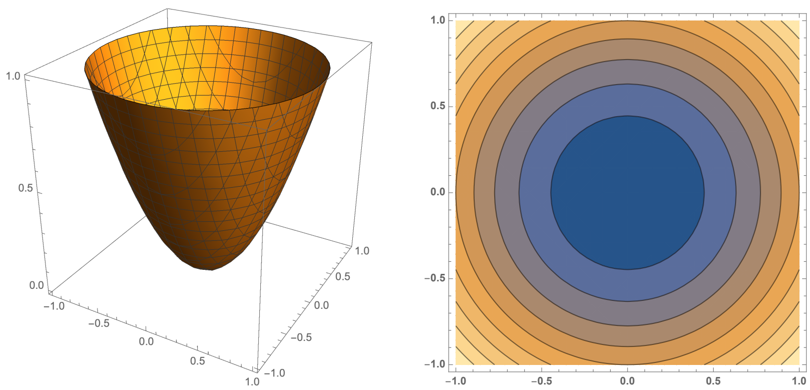
เช่นเดียวกันกับฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราสามารถนิยามโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปรได้ ดังนี้

บทนิยาม 1.1.2. ให้ $w = f(\mathbf{P})$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร **โดเมน** (Domain) แทนด้วย D_f และ**เรนจ์** (Range) แทนด้วย R_f ของฟังก์ชัน f นิยามโดย

$$\begin{aligned} D_f &= \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n \,|\, \text{มี } w \in \mathbb{R} \text{ ซึ่ง } (\mathbf{P}, w) \in f\} \\ R_f &= \{w \in \mathbb{R} \,|\, \text{มี } \mathbf{P} \in \mathbb{R}^n \text{ ซึ่ง } (\mathbf{P}, w) \in f\} \end{aligned}$$

ความหมายทางเรขาคณิตสำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร

สำหรับฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร ฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่แสดงพื้นผิว และเมื่อพิจารณา z เป็นค่าคงที่แต่ละค่า จะสามารถพิจารณา f ในรูปเส้นชั้นความสูง (level curves / contour map) ดังภาพต่อไปนี้



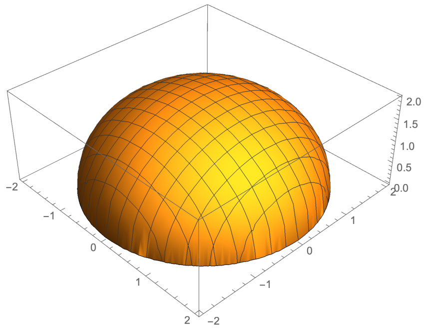
ภาพที่ 1.1. (ซ้าย) พื้นผิวของ $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ (ขวา) เส้นชั้นความสูงของ f

สมมตินิยามฟังก์ชันสองตัวแปรโดย $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ เมื่อทำการวาดกราฟ จะได้พื้นผิวของ $z = f(x, y)$ ดังภาพซ้าย จะเห็นว่า เมื่อกำหนดให้ z เป็นค่าคงที่แต่ละค่า จะปรากฏเป็นเส้นชั้นความสูงของ f

ตัวอย่าง 1.1.1. กำหนดความสัมพันธ์

$$f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$$

1. จงแสดงว่า f ซึ่งมี z เป็นตัวแปรตาม นิยามอย่างแจ่มชัด
2. จงหาโดเมนและเรนจ์ของ f พร้อมทั้งพิสูจน์



ภาพที่ 1.2. พื้นผิวที่นิยามโดย $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

จะเห็นว่า พื้นผิวของ f สามารถวาดได้ดังภาพที่ 1.2 ซึ่งเราสามารถวิเคราะห์โดยคร่าวๆ ได้ว่า f นิยามแจ่มชัด เนื่องจากแต่ละคู่อันดับ (x, y) ให้ค่า z เพียงหนึ่งค่า และเราสามารถวิเคราะห์โดเมนและเรนจ์ได้อย่างคร่าวๆ ต่อไปเราจะพิสูจน์ว่า ความสัมพันธ์ที่กำหนดนิยามแจ่มชัด รวมถึงพิสูจน์โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร

พิสูจน์.

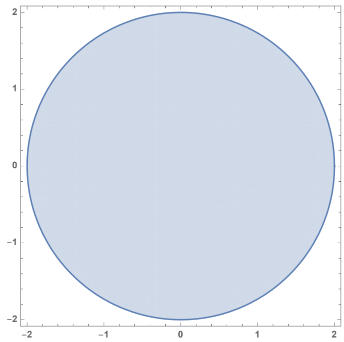
1. จะแสดงว่า ความสัมพันธ์ f นิยามอย่างแจ่มชัด

ให้ $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathbb{R}^2$ โดยที่ $\mathbf{P}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{P}_2 = (x_2, y_2)$ และ $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$
จาก $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ จะได้ว่า $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$
นั่นคือ $x_1 = x_2$ และ $y_1 = y_2$
ดังนั้น $z_1 = \sqrt{4 - x_1^2 - y_1^2} = \sqrt{4 - x_2^2 - y_2^2} = z_2$
จึงได้ว่า f นิยามอย่างแจ่มชัด

2. ก่อนอื่น จะหาโดเมนของ f

จะเห็นว่า $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ หาค่าได้ก็ต่อเมื่อ $4 - x^2 - y^2 \geq 0$
ซึ่งสมมูลกับ $x^2 + y^2 \leq 4$ ดังนั้น โดเมนของ f คือ

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4\}$$



ภาพที่ 1.3. บริเวณที่แสดงโดเมนของ f

โดเมนของ f คือ บริเวณภายในที่รวมขอบของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และมีรัศมี 2 หน่วย ดังภาพ 1.3

ต่อไป จะแสดงว่า $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4\}$

($\subseteq$) ให้ $(a, b) \in D_f$
เนื่องจาก $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ จะได้ว่า $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
โดยนิยามของโดเมน จะได้ว่า มี $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ซึ่ง $c = \sqrt{4 - a^2 - b^2}$
เนื่องจาก $c = \sqrt{4 - a^2 - b^2}$ จึงได้ว่า $c^2 + a^2 + b^2 = 4$
นั่นคือ $a^2 + b^2 \leq c^2 + a^2 + b^2 = 4$
จึงได้ว่า $(a, b) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$

($\supseteq$) ให้ $(a, b) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$
จะได้ว่า $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ และ $a^2 + b^2 \leq 4$ นั่นคือ $\sqrt{4 - a^2 - b^2} \geq 0$
เลือก $c = \sqrt{4 - a^2 - b^2} \geq 0$ ซึ่ง $f(a, b) = \sqrt{4 - a^2 - b^2} = c$
ดังนั้น $(a, b) \in D_f$
เพราะฉะนั้น จึงได้ว่า $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4\}$

3. ต่อไป จะหาเรนจ์ของ f

จะเห็นว่า $z \geq 0$ และ $z^2 = 4 - x^2 - y^2 \leq 4$ นั่นคือ $z \in [0, 2]$ ดังนั้น เรนจ์ของ

f คือ

$$R_f = \{z \in \mathbb{R} | 0 \leq z \leq 2\}$$

ต่อไป จะแสดงว่า $R_f = \{z \in \mathbb{R} | 0 \leq z \leq 2\}$

($\subseteq$) ให้ $c \in R_f$ ดังนั้น $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$
และมี $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ซึ่ง $c = \sqrt{4 - a^2 - b^2}$
ได้ว่า $c^2 = 4 - a^2 - b^2 \leq 4$ นั่นคือ $-2 \leq c \leq 2$
เนื่องจาก $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ได้ว่า $0 \leq c \leq 2$
กล่าวคือ $c \in \{z \in \mathbb{R} | 0 \leq z \leq 2\}$

($\supseteq$) ให้ $c \in \{z \in \mathbb{R} | 0 \leq z \leq 2\}$
เลือก $(a, b) = (\sqrt{4 - c^2}, 0) \in \mathbb{R}^2$ ซึ่ง

$$f(a, b) = \sqrt{4 - (\sqrt{4 - c})^2 - 0} = c$$

ดังนั้น $c \in R_f$

เพราะฉะนั้น จึงได้ว่า $R_f = \{z \in \mathbb{R} | 0 \leq z \leq 2\}$ □

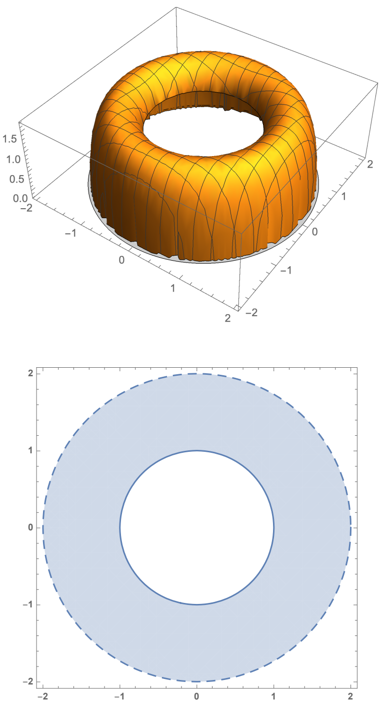
ตัวอย่าง 1.1.2. จงหาโดเมนของฟังก์ชันสองตัวแปร

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$$

พิสูจน์. จะเห็นว่า เงื่อนไขที่ทำให้ฟังก์ชัน f หาค่าได้คือ $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$ และ $4 - x^2 - y^2 > 0$ ซึ่งสมมูลกับเงื่อนไข $x^2 + y^2 \geq 1$ และ $x^2 + y^2 < 4$
ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชัน f คือ

$$\begin{aligned} D_f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \geq 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 4\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \geq 1 \text{ และ } x^2 + y^2 < 4\} \end{aligned}$$

มีบริเวณดังภาพ 1.4 □



ภาพที่ 1.4. พื้นผิวและบริเวณของโดเมนในตัวอย่าง 1.1.2

นอกจากการพิจารณาฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ส่งสมาชิกจากเซตของ $\mathbb{R}^n$ ไปยัง $\mathbb{R}$ แล้ว เรายังสามารถพิจารณาฟังก์ชันที่ส่งสมาชิกจาก $\mathbb{R}^n$ ไปยัง $\mathbb{R}^m$ ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

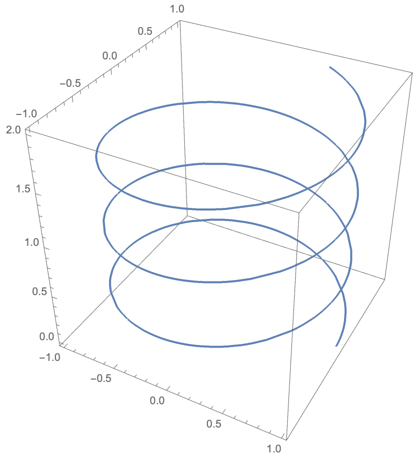
ตัวอย่าง 1.1.3. กำหนดให้ $x = \phi(t), y = \varphi(t)$ โดยที่ $t \in \mathbb{R}$
ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ เป็นฟังก์ชันของเส้นโค้งอิงตัวแปรเสริมในสองมิติ นิยามโดย

$$f(t) = (x, y) = (\phi(t), \varphi(t)) \qquad ; t \in \mathbb{R}$$

ตัวอย่าง 1.1.4. พิจารณาฟังก์ชันที่นิยามแบบอิงตัวแปรเสริม $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ กำหนดโดย

$$f(t) = (\cos t, \sin t, t/10) \qquad ; t \in [0, \infty)$$

f เป็นฟังก์ชันที่แสดงเส้นโค้งอิงตัวแปรเสริมในสามมิติ แสดงได้ดังภาพ 1.5



ภาพที่ 1.5. เส้นโค้งอิงตัวแปรเสริมที่นิยามโดยฟังก์ชัน f ในตัวอย่าง 1.1.4

ในกรณีนี้จะเห็นว่า โดเมนของ f คือ $[0, \infty)$ ซึ่งโดเมนเป็นเซตใน 1 มิติ

ตัวอย่าง 1.1.5. กำหนดให้ $x = \phi(u, v), y = \varphi(u, v), z = \theta(u, v)$ โดยที่ $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ เป็นฟังก์ชันของพื้นผิวอิงตัวแปรเสริมในสามมิติ นิยามโดย

$$F(u, v) = (x, y, z) = (\phi(u, v), \varphi(u, v), \theta(u, v)), u, v \in \mathbb{R}$$

โดยทั่วไป $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ จะเรียกว่า **การแปลง** (transformation) เราจะศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการแปลงในภายหลังอีกครั้งหนึ่งในเรื่องต่อๆ ไป

แบบฝึกหัดที่ 1.1

1. จงแสดงว่า ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชัน พร้อมหาโดเมน และเรนจ์ของฟังก์ชัน พร้อมทั้งพิสูจน์โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันด้วย
   (a) $f_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid z = \ln(x^2 + y^2 - 1)\}$
   (b) $f_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid z = \sqrt{6 - (2x + 3y)}\right\}$
   (c) $f_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right\}$

2. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้
   (a) $f(x, y) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^{1/2}$
   (b) $f(x, y) = \ln(1 - \sqrt{x^2 + y^2})$
   (c) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$
   (d) $f(u, v, w) = \exp\left(\dfrac{u}{v - w}\right)$
   (e) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \dfrac{2x_1 - 3x_2}{x_3 + 5x_4}$
   (f) $f(x, y, z) = \ln(xy/z)$

1.2 ลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร

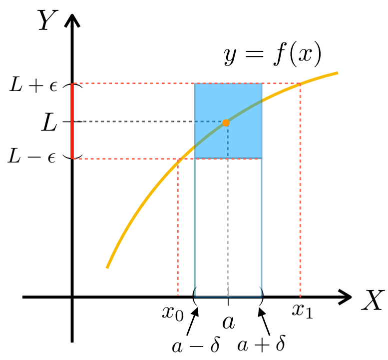
ในหัวข้อนี้ เราจะกล่าวถึงลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร เพื่อให้เข้าใจภาพของลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปร เราจะพิจารณาจากภาพใกล้ตัวก่อน โดยศึกษามโนคติเบื้องต้นเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว จากนั้นเราขยายแนวคิดสู่ฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร โดยศึกษาโทโพโลยีเบื้องต้นของจำนวนจริง และนิยามลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปร

1.2.1 มโนคติเบื้องต้นเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว

ในแคลคูลัสขั้นมูลฐาน เราคุ้นเคยกับลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เมื่อกล่าวถึงภาษาพูดอย่างง่าย การกล่าวถึงลิมิต

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

หมายความว่า เมื่อ x เข้าใกล้ a ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เข้าใกล้ L ด้วย จะเห็นว่าการที่ x เข้าใกล้ a ในโดเมนของ f เราพิจารณาการเข้าสู่ a ในสองทิศทาง คือ ทางบวก $x \to a^+$ และทางลบ $x \to a^-$ บนเส้นจำนวน ดังภาพ 1.6



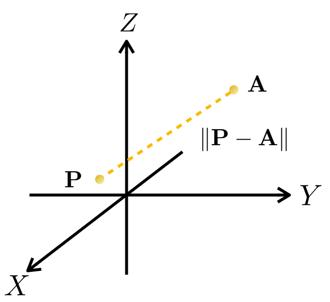
ภาพที่ 1.6. ลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว

จากนิยามของลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราสามารถขยายแนวคิดสู่ฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปรได้ อย่างไรก็ตาม จะเห็นว่าการขยายแนวความคิด จำเป็นต้องพิจารณาการเข้าใกล้ในมิติที่สูงขึ้น การพิจารณาการเข้าใกล้บนช่วงจึงไม่เพียงพอ ในการนี้ เราจึงจะเริ่มต้นศึกษาโทโพโลยีของจำนวนจริงในมิติที่สูงขึ้น เพื่อนำไปสู่นิยามของลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปรต่อไป

1.2.2 โทโพโลยีเบื้องต้นของ $\mathbb{R}^n$

โทโพโลยี (Topology) เป็นการศึกษาสมบัติของปริภูมิที่คงสภาพภายใต้การแปลงที่ต่อเนื่อง โดยการพิจารณากลุ่มของสับเซตที่เรียกว่า เซตเปิด (open set) อย่างไรก็ตาม โทโพโลยีในปริภูมิ $\mathbb{R}^n$ มีสมบัติที่เพียงพอและเหมาะสมต่อการใช้งาน

ระยะทางระหว่างจุดสองจุดในปริภูมิ $\mathbb{R}^n$



ภาพที่ 1.7. ระยะทางระหว่างจุดสองจุด

ให้ $\mathbf{P}(x_1, ..., x_n)$ และ $\mathbf{A}(a_1, ..., a_n)$ เป็นจุดในปริภูมิ $\mathbb{R}^n$

นอร์ม (norm) ระหว่างจุด $\mathbf{P}$ และ $\mathbf{A}$ เขียนแทนด้วย $\|\mathbf{P} - \mathbf{A}\|$

ในปริภูมิ $\mathbb{R}^n$ นอร์มคือการวัดระยะทางระหว่างจุด $\mathbf{P}$ และ $\mathbf{A}$ ซึ่งอาจเขียนระยะทาง (เมตริก) ได้โดย $d(\mathbf{P}, \mathbf{A})$

นอร์มยูคลิด (Euclidean norm) (หรือ ระยะทางยูคลิด) บน $\mathbb{R}^n$ นิยามโดย

$$\|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + ... + (x_n - a_n)^2}$$

สมบัติของเซตใน $\mathbb{R}^n$

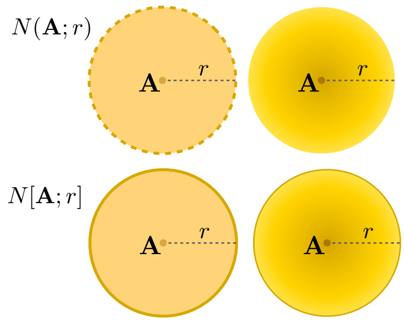
บทนิยาม 1.2.1. ย่านจุดเปิด (neighborhood) หรือ บอลเปิด (open ball) ของจุด $\mathbf{A}$ เขียนแทนด้วย $N(\mathbf{A}; r)$ คือเซตของจุด $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$ ซึ่ง $0 \leq \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < r$ โดยที่ $r > 0$

- ย่านจุดเปิด $N(\mathbf{A}; r)$ เขียนได้โดย

$$N(\mathbf{A}; r) = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n | 0 \leq \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < r\}$$

- ย่านจุดปิด $N[\mathbf{A};r]$ เขียนได้โดย

$$N[\mathbf{A};r] = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n | 0 \leq \|\mathbf{P}-\mathbf{A}\| \leq r\}$$



ภาพที่ 1.8. $N(\mathbf{P};r)$ และ $N[\mathbf{P};r]$

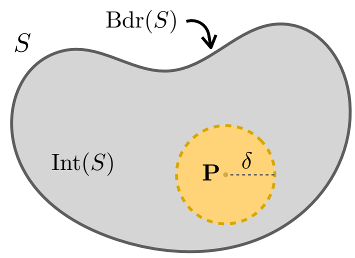
จะเห็นว่าในปริภูมิ $\mathbb{R}^2$ จะเรียก $N(\mathbf{A};r)$ เรียกว่า จานเปิด (open disk) ซึ่งมีบริเวณใน $\mathbb{R}^2$ เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $\mathbf{A}$ รัศมี r รวมขอบ และ $N[A;r]$ เรียกว่า จานปิด (closed disk) ซึ่งมีบริเวณใน $\mathbb{R}^2$ เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $\mathbf{A}$ รัศมี r รวมขอบ ดังภาพ 1.8 (ด้านบน)

สำหรับปริภูมิ $\mathbb{R}^3$ จะเรียก $N(\mathbf{A};r)$ เรียกว่า บอลเปิด (open sphere) ซึ่งบริเวณใน $\mathbb{R}^3$ เป็นทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $\mathbf{A}$ รัศมี r ไม่รวมขอบและ $N[\mathbf{A};r]$ เรียกว่า บอลปิด (closed ball) ซึ่งเป็นบริเวณใน $\mathbb{R}^3$ เป็นทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $\mathbf{A}$ รัศมี r รวมขอบดังภาพ 1.8 (ด้านล่าง)

บทนิยาม 1.2.2. ย่านใกล้เคียงจุด A (deleted neighborhood of $\mathbf{A}$) คือเซตของจุด $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$ ซึ่ง $0 < \|\mathbf{P}-\mathbf{A}\| < r$ โดยที่ $r > 0$ นั่นคือ

$$\{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n | 0 < \|\mathbf{P}-\mathbf{A}\| < r\}$$

จะเห็นว่า ย่านใกล้เคียงจุด A คือ ย่านจุดเปิด A ที่ไม่รวมจุด $\mathbf{A}$



ภาพที่ 1.9. เซต S และส่วนประกอบต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

หมายเหตุ. เมื่อกล่าวโดยทั่วไป ให้ S เป็นเซตในปริภูมิ $\mathbb{R}^n$ เราจะกล่าวถึงนิยามต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับโทโพโลยีได้ดังต่อไปนี้

1. เรากล่าวว่า เซตของบรรดาจุด $\mathbf{P}$ อยู่ใกล้กับจุด $\mathbf{A}$ ด้วยระยะ δ เมื่อ $0 \leq \|\mathbf{P}-\mathbf{A}\| < \delta$ เป็นบอลเปิดที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\mathbf{A}$ รัศมี δ
2. จุด $\mathbf{Q}$ เป็นจุดภายในของเซต S (interior point) ถ้าสำหรับทุกๆ จุดที่อยู่ใกล้ $\mathbf{Q}$ อยู่ในเซต S กล่าวคือ มี $\delta > 0$ ซึ่ง $N(\mathbf{Q};\delta) \subseteq S$
3. เซตของจุดภายใน (interior) ของเซต S คือ สับเซตของ S ที่บรรจุทุกจุด $\mathbf{Q}$ ที่เป็นจุดภายในของเซต S
4. เซต S เรียกว่าเป็นเซตเปิด (open set) ถ้าทุกๆ จุดใน S เป็นจุดภายใน
5. จุด $\mathbf{P}$ ซึ่ง $\mathbf{P} \notin S$ เรียกว่า จุดภายนอก (exterior) ของ S ถ้าทุกจุดที่อยู่ใกล้จุด $\mathbf{P}$ อยู่นอกเซต S
6. เซต S เรียกว่าเป็นเซตปิด (closed set) ใน $\mathbb{R}^n$ ถ้า $\mathbb{R}^n \backslash S$ เป็นเซตเปิด
7. จุดขอบ (boundary point) ของเซต S คือจุดซึ่งไม่อยู่ทั้งภายในและภายนอกของเซต S
บรรดาจุดขอบทั้งหมดของเซต S เรียกว่า ขอบ (boundary) ของเซต S เขียนแทนด้วย $\mathrm{Bdr}(S)$
8. ส่วนปกคลุม (closure) ของเซต S แทนด้วย $\overline{S} = S \cup \mathrm{Bdr}(S)$
9. เซต S มีขอบเขต (bounded) ถ้ามี $M > 0$ ซึ่ง $\|\mathbf{P}\| < M$ สำหรับทุก $\mathbf{P} \in S$
10. เซต N ใดๆ เรียกว่าเป็นย่านจุดเปิดของ $\mathbf{A}$ ถ้า $\mathbf{A}$ เป็นจุดภายในของ N จะได้ว่า

- สำหรับบอลเปิดที่รวมจุด $\mathbf{A}$ เป็นย่านจุดใกล้เคียงของ $\mathbf{A}$
- แต่ละย่านจุดใกล้เคียงของ $\mathbf{A}$ บรรจุเซตบอลเปิดที่รวมจุด $\mathbf{A}$

11. จุด $\mathbf{P}$ เรียกว่า จุดคลัสเตอร์ (cluster point / limit point / accumulation point) ของเซต S ถ้าทุกๆ ย่านใกล้เคียงจุด $\mathbf{P}$ บรรจุจุดใน S

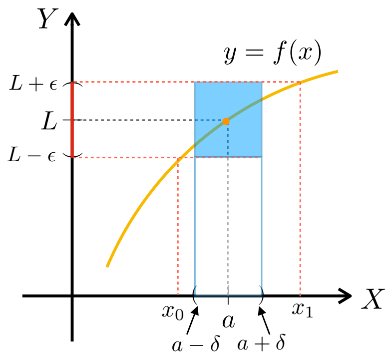
1.2.3 นิยามและการพิสูจน์

ดังที่กล่าวมาในมโนคติเบื้องต้นของลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว การกล่าวถึงลิมิต

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

ที่กล่าวว่า x เข้าใกล้ a หรือ $f(x)$ เข้าใกล้ L ปัญหาที่สำคัญคือ เข้าใกล้อย่างไร และอย่างไรจึงเรียกว่าใกล้

ดังนั้น เพื่อให้เกิดความรัดกุม เราจึงต้องนิยามลิมิตในความหมายของการเข้าใกล้ โดยใช้นิยามแบบ $\delta - \epsilon$ ดังนี้



ภาพที่ 1.10. ลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว

บทนิยาม 1.2.1. ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามสำหรับทุก x ในช่วงเปิดที่บรรจุ a โดยที่ $f(x)$ อาจไม่นิยามที่ a จะได้ว่า

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ

สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $|f(x)-L| < \epsilon$

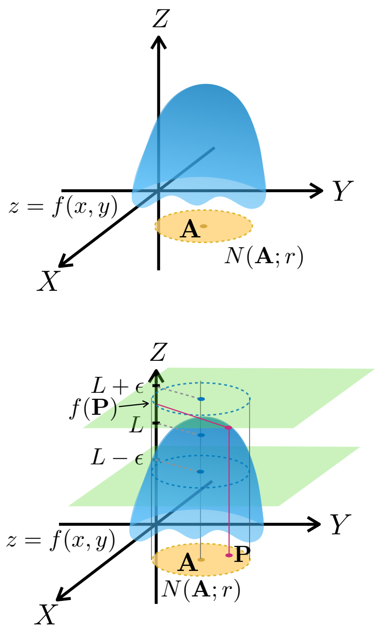
เราสามารถพิจารณานิยามดังกล่าวได้จากภาพ 1.10

จากความหมายในทางโทโพโลยีของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราจึงกล่าวได้ว่า ทุกๆ จุดในย่านจุดใกล้เคียงของ a ด้วยระยะ δ จะต้องมีภาพบน $f(x)$ ที่ $f(x)$ อยู่ใกล้ L ด้วยระยะ ϵ

ดังนั้น เมื่อทำการขยายความคิดสู่ฟังก์ชันหลายตัวแปร เราก็จะสามารถนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม 1.2.3. ให้ f เป็นฟังก์ชัน n ตัวแปรที่นิยามบนย่านจุดใกล้เคียงของ $\mathbf{A}$ จะเรียกว่า L เป็นลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อจุด $\mathbf{P}(x_1, ..., x_n)$ เข้าใกล้จุด $\mathbf{A}$ เขียนแทนด้วย $\lim_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P}) = L$ ก็ต่อเมื่อ

สำหรับทุก $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < \|\mathbf{P}-\mathbf{A}\| < \delta$ แล้ว $|f(\mathbf{P})-L| < \epsilon$



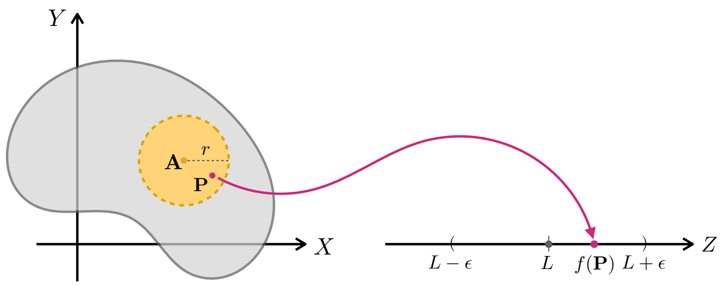
ภาพที่ 1.11. ลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร

ในกระบวนวิชานี้ เราจะสนใจลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร จะเห็นว่า สำหรับจุด $\mathbf{P} = (x, y)$ และ $\mathbf{A} = (x_0, y_0)$ เราสามารถเขียน $\lim_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P}) = L$ โดย

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = L \qquad \text{หรือ} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

ซึ่งสำหรับกรณีพื้นผิว เราสามารถอธิบายได้ดังภาพที่ 1.11 และพิจารณาการส่งจาก $\mathbb{R}^2$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ในภาพที่ 1.12

เราจะมาพิจารณาตัวอย่างของการพิสูจน์ลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร ทั้งนี้ เนื่องจากการเขียนพิสูจน์ดังกล่าวเป็นการเขียนพิสูจน์ครั้งแรกๆ ของผู้อ่าน ผู้เขียนจึงขอแยกตัวอย่างออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนแนวคิด สำหรับเรียบเรียงภาพรวม และการพิสูจน์ ซึ่งเป็นการเรียบเรียงแนวคิด นำมาเขียนให้สมบูรณ์และกระชับ



ภาพที่ 1.12. ลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร เมื่อพิจารณา
(ภาพซ้าย) บริเวณโดเมน XY และ $N(\mathbf{A}; r)$
(ภาพขวา) จุด $\mathbf{P}$ ในบริเวณใกล้ๆ $\mathbf{A}$ ถูกส่งไปยัง $f(\mathbf{A})$ โดยที่ $f(\mathbf{A})$ อยู่ในช่วง $(L-\epsilon, L+\epsilon)$

ตัวอย่าง 1.2.1. จงพิสูจน์ว่า $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} (2x+y) = 1$

แนวคิด. เพื่อที่จะแสดงว่า $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} (2x+y) = 1$ เราจะต้องแสดงว่า

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0\,[0 < \|(x,y)-(0,1)\| < \delta \Rightarrow |(2x+y)-1| < \epsilon]$$

ดังนั้น ถ้าเราให้ $\epsilon > 0$ ขั้นตอนที่สำคัญคือ หา δ ที่สอดคล้องกับสิ่งที่เราต้องการคือ $|(2x+y)-1| < \epsilon$ เมื่อ $0 < \|(x,y)-(0,1)\| < \delta$

ถ้าลองสมมติให้ $\|(x,y)-(0,1)\| = \sqrt{x^2+(y-1)^2} < \delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |x| &= \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+(y-1)^2} < \delta \\ |y-1| &= \sqrt{(y-1)^2} \le \sqrt{x^2+(y-1)^2} < \delta \end{aligned}$$

เราลองจัดรูปให้

$$|(2x+y)-1| = |2x+(y-1)| \le |2x| + |y-1| = 2|x| + |y-1|$$

เราพอจะเห็นว่า เราสามารถเลือก $\delta = \epsilon/3$ หรือ δ ใดๆ ที่เล็กกว่า $\epsilon/3$ เพื่อทำให้

$$|(2x+y)-1| \le 2|x| + |y-1| < 3\delta = \epsilon$$

พิสูจน์. ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = \epsilon/3 > 0$
ซึ่งสำหรับ $\|(x,y)-(0,1)\| = \sqrt{x^2+(y-1)^2} < \delta$ และ

$$\begin{aligned} |x| &= \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+(y-1)^2} < \delta \\ |y-1| &= \sqrt{(y-1)^2} \le \sqrt{x^2+(y-1)^2} < \delta \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |(2x+y)-1| &\le 2|x| + |y-1| \\ &< 2\delta + \delta \\ &= 3\delta = \epsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} (2x+y) = 1$ ตามต้องการ $\square$

หมายเหตุ. อสมการต่อไปนี้เป็นอสมการสำคัญที่อาจมีประโยชน์ในการพิสูจน์ ให้ $a_1, ..., a_n$ และ $b_1, ..., b_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

1. **อสมการโคชี-ชวาร์ซ** (Cauchy-Schwarz inequality)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

2. **อสมการสามเหลี่ยม** (triangle inequality)

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

3. **อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต-ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิค** (AM-GM-HM inequality)

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$

ตัวอย่าง 1.2.2. จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(x^2+2y)=5$

แนวคิด. เพื่อที่จะแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(x^2+2y)=5$ เราจะต้องแสดงว่า

$$\forall\epsilon>0, \exists\delta>0\left[0<\|(x,y)-(1,2)\|<\delta \Rightarrow |(x^2+2y)-5|<\epsilon\right]$$

จะเห็นว่า หากพิจารณา $0 < \|(x,y)-(1,2)\| < \delta$ หรือความหมายเดียวกันกับ $0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta$ จะได้ว่า $|x-1|<\delta$ และ $|y-2|<\delta$ เช่นเดียวกันกับตัวอย่างที่ผ่านมา เราสามารถจัดพจน์เพื่อให้อยู่ในรูปที่มีอยู่แล้ว คือ

$$\begin{aligned}|(x^2+2y)-5| &= |(x^2-1)+(2y-4)| \\ &\leq |x^2-1|+2|y-2| = |x+1||x-1|+2|y-2|\end{aligned}$$

เราเกือบพร้อมที่จะพิสูจน์แล้ว เหลือเพียงการพิจารณาพจน์ $|x+1|$
เนื่องจาก $|x-1|<\delta$ หากเราเลือก $\delta=1$ จะพบว่า $|x+1|<3$ และ

$$|(x^2+2y)-5| < 3\delta+2\delta = 5\delta$$

ดังนั้น ในการเลือก δ ในการพิสูจน์ เราจึงจะเลือก $\delta=\epsilon/5$ หรือ 1 ตัวใดก็ได้ที่น้อยกว่า ดังนั้น จึงเลือก $\delta=\min\{1,\epsilon/5\}$ เพื่อให้

$$|(x^2+2y)-5| < 3\delta+2\delta = 5\delta = \epsilon$$

จากแนวคิดดังกล่าว เราสามารถเขียนพิสูจน์ให้กระชับได้ดังนี้

พิสูจน์. ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = \min\{1, \epsilon/5\} > 0$
ซึ่งสำหรับ $\|(x, y) - (1, 2)\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta$ และ

$$|x - 1| = \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta$$
$$|y - 2| = \sqrt{(y-2)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta$$

จะได้ว่า

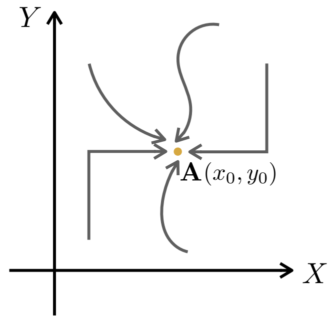
$$\begin{aligned} |(x^2 + 2y) - 5| &= |(x^2 - 1) + (2y - 4)| \\ &\leq |x^2 - 1| + 2|y - 2| \\ &= |x + 1||x - 1| + 2|y - 2| \\ &< 3\delta + 2\delta = 5\delta = \epsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (x^2 + 2y) = 5$ ตามต้องการ □

ลิมิตทำซ้ำ และลิมิตตามเส้น

จากภาพของลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว การเข้าใกล้ของ x สู่ a สามารถพิจารณาการเข้าใกล้ได้สองทิศทางดังที่กล่าวมาข้างต้น และการที่ลิมิตของ f มีค่า ค่าของลิมิตที่เข้าใกล้ในทิศทางทั้งสองจะต้องเท่ากันด้วย

จากนิยามของลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปร จะเห็นว่า แต่ละจุด $\mathbf{P}$ ในย่านใกล้เคียงจุด $\mathbf{A}$ ซึ่งสอดคล้องกับ $\|\mathbf{P} - \mathbf{A}\| < \delta$ มีความหมายว่า จุด $\mathbf{P}$ วิ่งเข้าหา $\mathbf{A}$ ในย่านใกล้เคียงจุด $\mathbf{A}$ จะเห็นว่า การวิ่งเข้าสู่จุด $\mathbf{A}$ สามารถเป็นไปได้หลายทิศทาง ดังภาพ 1.13



ภาพที่ 1.13. เส้นทางของจุด $\mathbf{P}$ ที่เข้าหาจุด $\mathbf{A}$

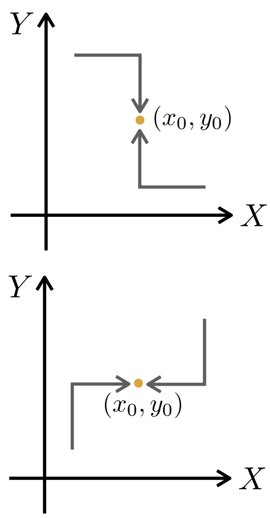
ดังนั้น หากพิจารณาแล้วพบว่า ในทุกๆ เส้นทางจาก $\mathbf{P}$ ไปยัง $\mathbf{A}$ ค่าของลิมิตมีค่าเท่ากัน เราจึงจะสามารถสรุปได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชันที่จุด $\mathbf{A}$ มีค่า สอดคล้องดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.2.3. ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร

1. ถ้า $f(x, y) \to L$ เมื่อ $(x, y) \to (x_0, y_0)$ แล้ว $f(x, y) \to L$ เมื่อ $(x, y) \to (x_0, y_0)$ สำหรับทุกๆ เส้นโค้งเรียบใดๆ

2. ถ้าลิมิตของ $f(x, y)$ ไม่มีค่าเมื่อ $(x, y) \to (x_0, y_0)$ สำหรับบางเส้นโค้ง หรือ $f(x, y)$ มีค่าลิมิตที่แตกต่างกันเมื่อ $(x, y) \to (x_0, y_0)$ สำหรับสองเส้นโค้งที่ต่างกันแล้ว ลิมิต $f(x, y)$ ไม่มีค่า เมื่อ $(x, y) \to (x_0, y_0)$

เราเริ่มต้นพิจารณาเส้นทางที่ง่ายที่สุด คือทิศทางที่จากจุด $\mathbf{P}$ ไปยังจุด $\mathbf{A}$ ในแนวเส้นตรงที่ขนานแกน X และ Y ก่อน การพิจารณาเส้นทางของลิมิตดังกล่าวนี้จะเรียกว่า **ลิมิตทำซ้ำ** (Iterated limit) โดยลิมิตทำซ้ำ มีสองลักษณะ ซึ่งสอดคล้องดังภาพ 1.14 ดังนี้



ภาพที่ 1.14. (บน) ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 1 (ล่าง) ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 2

แบบที่ 1 ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อให้ $x \to x_0$ ก่อน ขณะที่ y เป็นค่าคงตัวใดๆ จากนั้นจึงให้ $y \to y_0$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{y\to y_0} \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)\right]$

แบบที่ 2 ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อให้ $y \to y_0$ ก่อน ขณะที่ x เป็นค่าคงตัวใดๆ จากนั้นจึงให้ $x \to x_0$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to x_0} \left[\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)\right]$

จะเห็นว่า หากลิมิตทำซ้ำทั้งสองทางมีค่า และไม่เท่ากัน กล่าวคือ

$$\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] = L_1 \neq L_2 \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right]$$

โดยทฤษฎีบท 1.2.3 เราสามารถสรุปได้ว่า ลิมิต $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ ไม่มีค่า

อย่างไรก็ตาม หากลิมิตทำซ้ำทั้งสองทางมีค่าเท่ากัน กล่าวคือ

$$\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] = L = \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right]$$

หากยังไม่ได้ทำการพิสูจน์ เราก็**ยังสรุปไม่ได้**ว่า ลิมิตจะมีค่าเท่ากับ L เนื่องจาก อาจมีเส้นทางบางเส้นทางที่ทำให้ลิมิตจากเส้นทางหนึ่งไม่เท่ากัน

ตัวอย่าง 1.2.4. กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{5x-2y}{x+2y}$ โดยที่ $(x,y)\neq(0,0)$
จงหาค่าของ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ (ถ้ามี)

พิสูจน์. เราเริ่มพิจารณาจากลิมิตทำซ้ำ กล่าวคือ

ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 1: $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x-2y}{x+2y}\right] = \lim\limits_{y\to 0}[-1] = -1$

ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 2: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{5x-2y}{x+2y}\right] = \lim\limits_{x\to 0}[5] = 5$

เนื่องจาก $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x-2y}{x+2y}\right] = -1 \neq 5 = \lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{5x-2y}{x+2y}\right]$

จึงได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ไม่มีค่า □

เนื่องจากเส้นโค้งในระนาบ XY สามารถเขียนได้ในรูปของสมการอิงตัวแปรเสริมหนึ่งตัวแปร ดังนั้น เราจึงสามารถพิจารณา ลิมิตจากจุด (x,y) ที่เข้าสู่จุด (x_0,y_0) ตามเส้นทางอื่น ๆ ที่นิยามโดยสมการอิงตัวแปรเสริมได้ โดยจะนิยามลิมิตตามเส้น (limit along curves) ได้ดังนี้

บทนิยาม 1.2.4. ให้ C เป็นเส้นโค้งเรียบที่กำหนดโดยสมการอิงตัวปรเสริม

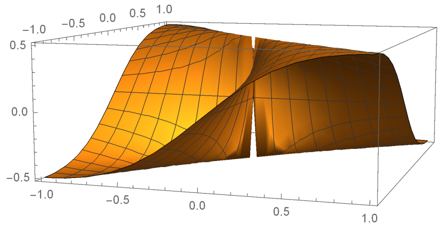
$$x = x(t), y = y(t)$$

และถ้า $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$ แล้ว **ลิมิตตามเส้น** C (limit along curve C) นิยามโดย

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (\text{ตามเส้น } C)}} f(x,y) = \lim_{t\to t_0} f(x(t),y(t))$$

โดยทฤษฎีบท 1.2.3 ถึงแม้ว่าลิมิตทำซ้ำจะเท่ากัน แต่หากเราพบว่า มีเส้นทางบางเส้นทางที่เข้าสู่จุด (x_0,y_0) ที่ทำให้ค่าของลิมิตไม่เท่ากันแล้ว เราก็สามารถสรุปได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ ไม่มีค่าเช่นกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.2.5. กำหนดให้ $f(x,y) = -\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ โดยที่ $(x,y) \neq (0,0)$ จงหาค่าของ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ (ถ้ามี)



ภาพที่ 1.15. พื้นผิวของ $f(x,y) = -\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

พิสูจน์. ก่อนอื่น เราพิจารณาจากลิมิตทำซ้ำ กล่าวคือ

<u>ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 1:</u> $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} -\frac{xy}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0}[0] = 0$

<u>ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 2:</u> $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} -\frac{xy}{x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to 0}[0] = 0$

จะเห็นว่า

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} -\frac{xy}{x^2+y^2}\right] = 0 = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} -\frac{xy}{x^2+y^2}\right]$$

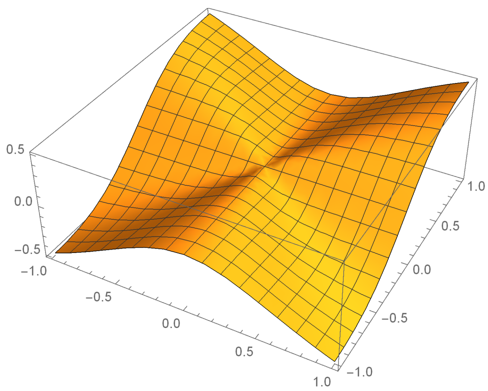
อย่างไรก็ตาม เราต้องพิจารณาตามเส้นอื่นๆ โดยใช้ลิมิตตามเส้น
เมื่อเลือกแนวเส้นตรง $y = x$ จะเห็นว่า เมื่อ $x \to 0$ แล้ว $y \to 0$ ดังนั้นเราจะพิจารณา

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (\text{ตามเส้น } y=x)}} -\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{x^2+x^2} = -\frac{1}{2}$$

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ไม่มีค่า $\square$

หมายเหตุ. จะเห็นว่าในตัวอย่าง 1.2.5 การกำหนดสมการอิงตัวแปรเสริม เรากำหนดว่า ถ้าให้ $x = t$ แล้ว $y = t$ ในกรณีที่มีการกำหนดให้ตัวแปร x หรือ y ตัวใดตัวหนึ่งเป็น t เราอาจกำหนดให้ตัวแปรนั้นเป็นตัวแปรหลัก และอีกตัวแปรเป็นตัวแปรที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรหลักนั้นตามการเขียนในตัวอย่าง 1.2.5 ได้

ตัวอย่าง 1.2.6. กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ จงหาและพิสูจน์ค่าของ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ (ถ้ามี)



ภาพที่ 1.16. พื้นผิวของ $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

พิสูจน์. เราเริ่มต้นจากการพิจารณาลิมิตทำซ้ำ

<u>ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 1:</u> $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0}[0] = 0$

<u>ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 2:</u> $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to 0}[0] = 0$

จะเห็นว่า

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right] = 0 = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right]$$

ต่อไป เราจะพิจารณาเส้นทางต่างๆ โดยเลือกเส้นทางที่ผ่านจุด $(0,0)$ เริ่มต้นจึงเลือก $y = x$ ได้ว่า เมื่อ $x \to 0$ แล้ว $y \to 0$ นั่นคือ

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (\text{ตามเส้น } y=x)}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2+x^2} = 0$$

ทำการเลือกเส้นทางอื่นๆ อีก เช่น เลือก $y = x^2$ จะได้ว่า

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (\text{ตามเส้น } y=x^2)}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2(1+x^2)} = 0$$

จะเห็นว่า ไม่ว่าจะเลือกเส้นทางใดในที่นี้ ก็จะได้ค่าของลิมิตเท่ากับ 0 เราจึงคาดเดาว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

ต่อไป จะพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$

แนวคิด. เราจะแสดงว่า

$$\forall\epsilon>0, \exists\delta>0\left[0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\epsilon\right]$$

เราพบว่า $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ และ $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ และเราทราบว่า $x^2+y^2 \geq x^2$ โดยสิ่งที่ต้องการพิสูจน์คือ $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\epsilon$ ถ้าเราจัดรูป $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \left|\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right||y|$ ก็จะพบว่า เราจะเลือก $\delta = \epsilon$

ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = \epsilon$
ซึ่งสำหรับ $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ และ

$$\begin{aligned}|x| &= \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta\\ |y| &= \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta\end{aligned}$$

จะได้ว่า

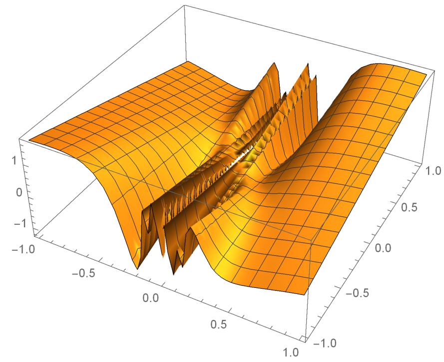
$$\begin{aligned}\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right| &= \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\\ &= \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right||y|\\ &\leq |y|\\ &< \delta = \epsilon\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$ ตามต้องการ □

หมายเหตุ. ถ้าลิมิต $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ มีค่า อาจเกิดเหตุการณ์ที่ลิมิตทำซ้ำ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right]$ หรือ $\lim\limits_{y\to y_0}\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right]$ ไม่มีค่าได้ ทั้งนี้ เราจะพิจารณาเหตุการณ์ดังกล่าวนี้ในแบบฝึกหัดที่ 1.2 ข้อที่ 7

ตัวอย่าง 1.2.7. จงหาและพิสูจน์ค่าของ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ เมื่อกำหนด

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$



ภาพ ที่ 1.17. พื้นผิวของ $f(x,y)$ ใน ตัวอย่าง 1.2.7

แนวคิด. จะเห็นว่า เราสามารถแบ่งกรณีได้ 2 กรณี ดังนี้
กรณีที่ $x = 0$ จะเห็นว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$
กรณีที่ $x \neq 0$ หากพิจารณาลิมิตตามเส้น $y = x$ จะพบว่า

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (\text{ตามเส้น } y=x)}} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

และเมื่อลองพิจารณาเส้นทางอื่นๆ เช่น $y = x^n$ จะพบเช่นกันว่า

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (\text{ตามเส้น } y=x^n)}} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} (x+x^n)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

จึงคาดเดาว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$
สำหรับการพิสูจน์ในข้อนี้ จะต้องแบ่งออกเป็นสองกรณี คือ เมื่อ $x = 0$ และ $x \neq 0$
โดยเราจะต้องเลือก δ ที่สอดคล้องทั้งสองกรณี
ในกรณีที่ $x \neq 0$ เราพบว่า $\left|(x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| = |x+y|\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|$ โดยใช้อสมการสามเหลี่ยม และความรู้ที่ว่า $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ จึงจะเลือก $\delta = \epsilon/2$

พิสูจน์. ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = \epsilon/2$
ซึ่งสำหรับ $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ และ

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$
$$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

กรณีที่ $x = 0$ จะได้ว่า

$$|f(x,y) - 0| = |0-0| < \epsilon$$

กรณีที่ $x \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left|(x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| &= |x+y|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \\ &\leq |x| + |y| \\ &< \delta + \delta = 2\delta = \epsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ ตามต้องการ $\square$

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต N เราสามารถพิจารณาพีชคณิตของฟังก์ชัน $f \pm g, fg, f/g$ บน N โดย

$$\begin{aligned}(f+g)(x,y) &= f(x,y)+g(x,y)\\ (f-g)(x,y) &= f(x,y)-g(x,y)\\ (f\cdot g)(x,y) &= f(x,y)\cdot g(x,y)\\ (f/g)(x,y) &= f(x,y)/g(x,y) \text{ เมื่อ } g(x,y)\neq 0 \text{ สำหรับ } (x,y)\in N\end{aligned}$$

เราสามารถพิจารณาทฤษฎีบทของลิมิตได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.2.8. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันของ $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$ ที่นิยามบนย่านจุดเปิด $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ โดยที่ $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P}) = L$ และ $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} g(\mathbf{P}) = M$ จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P})+g(\mathbf{P}) = L+M$
2. $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P})-g(\mathbf{P}) = L-M$
3. $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} cf(\mathbf{P}) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ
4. $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P})\cdot g(\mathbf{P}) = L\cdot M$
5. $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P})/g(\mathbf{P}) = L/M$ เมื่อ $M\neq 0$

พิสูจน์. เราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ในข้อ 1. สำหรับข้ออื่นๆ ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

เราจะแสดงว่า $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P})+g(\mathbf{P}) = L+M$

ให้ $\epsilon > 0$

สมมติให้ $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P}) = L$ และ $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} g(\mathbf{P}) = M$

จะได้ว่า มี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $|f(\mathbf{P})-L| < \epsilon/2$ เมื่อ $0 < \|\mathbf{P}-\mathbf{A}\| < \delta_1$

และมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง $|g(\mathbf{P})-M)| < \epsilon/2$ เมื่อ $0 < \|\mathbf{P}-\mathbf{A}\| < \delta_2$

แนวคิด. เราจะต้องแสดงว่า ถ้าให้ $\epsilon > 0$ จะเลือก $\delta > 0$ ซึ่ง
ถ้า $0 < \|\mathbf{P}-\mathbf{A}\| < \delta$ แล้ว $|(f(\mathbf{P})+g(\mathbf{P}))-(L+M)| < \epsilon$
เราพิจารณาว่า

$$|(f(\mathbf{P})+g(\mathbf{P}))-(L+M)| \leq |f(\mathbf{P})-L| + |g(\mathbf{P})-M|$$

ซึ่งการเลือก δ ครั้งนี้ ขึ้นอยู่กับการเลือก δ_1, δ_2 ตัวเดิมของลิมิตของฟังก์ชัน $f(\mathbf{P})$ และ $g(\mathbf{P})$ ว่าตัวใดน้อยกว่ากัน จึงเลือก $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ ด้วยเหตุนี้ เราจึงกำหนดให้ $|f(\mathbf{P}-L)| < \epsilon/2$ และ $|g(\mathbf{P}-M)| < \epsilon/2$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\} > 0$ ซึ่งสำหรับ $0 < \|\mathbf{P}-\mathbf{A}\| < \delta$ แล้ว

$$\begin{aligned}|(f(\mathbf{P})+g(\mathbf{P}))-(L+M)| &\leq |f(\mathbf{P})-L| + |g(\mathbf{P})-M|\\ &< \epsilon/2+\epsilon/2 = \epsilon\end{aligned}$$

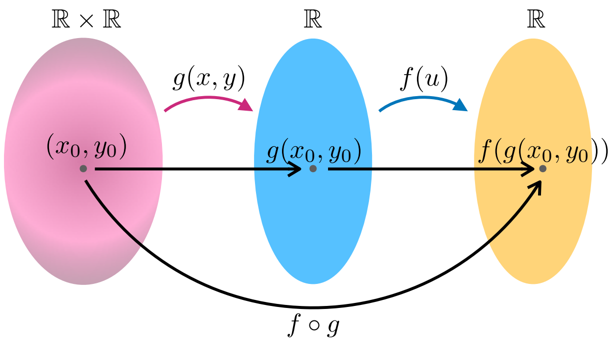
นั่นคือ $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P})+g(\mathbf{P}) = L+M$ $\square$

ตัวอย่าง 1.2.9. จงใช้ทฤษฎีลิมิตหาค่าของ $\lim_{(x,y)\to(1,4)}(5x^3y^2-9)$

วิธีทำ. โดยทฤษฎีลิมิต จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(1,4)}(5x^3y^2-9) &= \lim_{(x,y)\to(1,4)}5x^3y^2-\lim_{(x,y)\to(1,4)}9\\
&= 5\left(\lim_{(x,y)\to(1,4)}x^3\right)\left(\lim_{(x,y)\to(1,4)}y^2\right)-\left(\lim_{(x,y)\to(1,4)}9\right)\\
&= 5(1)^3(4)^2-9=71
\end{aligned}
$$

ในกรณีที่เรามีฟังก์ชัน f ที่เป็นฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว และมี g เป็นฟังก์ชันค่าจริงหลายตัวแปร เราพิจารณาการประกอบของฟังก์ชัน $f\circ g$ ได้ ดังแผนภาพ 1.18 ทำให้เราได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้



ภาพที่ 1.18. การประกอบฟังก์ชันสองตัวแปร กับฟังก์ชันตัวแปรเดียว

ทฤษฎีบท 1.2.10. ให้ g เป็นฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร ซึ่ง $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}g(x,y)=c$ และถ้าฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว f ต่อเนื่องที่จุด c แล้ว

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f\circ g(x,y)=f(c)$$

กล่าวคือ

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f\circ g(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(g(x,y))=f\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}g(x,y)\right)$$

แนวคิด. เราจะไม่พิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ แต่จะให้แนวคิดแก่ผู้อ่านสำหรับการพิสูจน์ ดังนี้
สำหรับ $A\subseteq\mathbb{R}$ และ $c\in A$
ฟังก์ชันค่าจริงตัวแปรเดียว f มีความต่อเนื่องที่ c ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $\epsilon>0$ มี $\delta>0$ ซึ่งถ้าทุกจุดใน A ที่สอดคล้องกับ $|x-c|<\delta$ แล้ว $|f(x)-f(c)|<\epsilon$

จะเห็นว่า การพิสูจน์ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน มีเค้าโครงการพิสูจน์คล้ายกันกับการพิสูจน์ลิมิต ซึ่งจะเห็นว่า เราจะเลือก δ จากการที่ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}g(x,y)=c$ เพื่อแสดงให้ได้ว่า $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f\circ g(x,y)=f(c)$

ทฤษฎีบทดังกล่าวนี้ มีประโยชน์สำหรับการหาค่าของลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปรที่ถูกประกอบกับฟังก์ชันตัวแปรเดียว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.2.11. จงหาลิมิต $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \ln(1+x^2y^3)$

วิธีทำ. เราสามารถมองได้ว่า $f(u) = \ln u$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนโดเมน กล่าวคือ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(0,\infty)$ และ $g(x,y) = 1+x^2y^3$ โดยที่ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^3) = 1$

โดยทฤษฎีบท 1.2.10 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(1+x^2y^3) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} f\circ g(x,y)\\ &= \ln\Big(\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2y^3)\Big)\\ &= \ln 1 = 0\end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ 1.2

1. จงแสดงว่า ลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้ไม่มีค่า

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x^2-y^2)^2}$

   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y-x}{y+x}\cdot\dfrac{1+x}{1+y}$

   (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x-y}$ (คำใบ้: พิจารณาเส้น $y = x - mx^3$)

2. จงใช้นิยามของลิมิตแสดงว่า ลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้มีค่า

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} 3xy$

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{\sqrt{2x^2+3y^2}}$ $;(x,y)\neq(0,0)$

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ $;(x,y)\neq(0,0)$

3. จงใช้ลิมิตทำซ้ำตรวจสอบการมีค่าของลิมิต $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ เมื่อกำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้ ทั้งนี้ หากลิมิตมีค่า ให้พิสูจน์ลิมิตของฟังก์ชันนั้นด้วย

   (a) $f(x,y) = \dfrac{\sin x \sin y}{x^2+y^2}$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+2y^4}$

ทฤษฎีบท 1.2.12. (Squeeze Theorem) ถ้า $g(x,y) \le f(x,y) \le h(x,y)$ สำหรับทุก $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ ในย่านจุดเปิดที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (x_0,y_0) และถ้า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)$

แล้ว $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$

4. จงหาค่าของลิมิต $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$ เมื่อกำหนด
$$f(x,y) = \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2}$$
(คำใบ้ : ใช้ Squeeze Theorem พิจารณาการลู่เข้าของ $|\ln x|$)

5. เมื่อทราบว่า $2|xy| - \dfrac{x^2y^2}{6} \le 4 - 4\cos\sqrt{|xy|} \le 2|xy|$ แล้ว จงหาค่าของลิมิต
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$
(คำใบ้ : ใช้ Squeeze Theorem และแบ่งกรณีเมื่อ $xy > 0$ และ $xy < 0$)

6. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.2.8 ข้อ 2 - 5

7. จงแสดงว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ มีลิมิตที่จุดกำเนิด $(0,0)$ แต่ลิมิตทำซ้ำที่ $(0,0)$ ไม่มีค่า
$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{y}\right) + y\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & , xy \neq 0 \\ 0 & , xy = 0 \end{cases}$$

8. จงแสดงว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ มีลิมิตทำซ้ำที่จุดกำเนิด $(0,0)$ แต่ไม่มีลิมิตที่จุด $(0,0)$
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & , xy \neq 0 \\ 0 & , xy = 0 \end{cases}$$

9. จงแสดงว่า สำหรับฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right]$ ไม่มีค่า แต่ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ และ $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right]$ มีค่า
$$f(x,y) = \begin{cases} y + x\sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

10. จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้ทฤษฎีลิมิต และทฤษฎีการประกอบของฟังก์ชัน

    (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} \dfrac{xy^3}{x+2y}$

    (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \ln(1+x^2y^3)$

    (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1/4,\pi)} (xy^2 \sin xy)$

    (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+2\sqrt{x}-y+2\sqrt{y}}$ เมื่อ $x \neq y$

    (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,3)} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$ เมื่อ $x \neq y+1$

    (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,3)} \dfrac{x^2-y^2}{x^4-y^4}$

1.3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชันหลายตัวแปร

สมบัติที่สำคัญประการหนึ่งของฟังก์ชันคือ สมบัติเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (continuity of a function) สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปร เราจะสามารถพิจารณาความต่อเนื่องได้ในทำนองคล้ายกันกับความต่อเนื่องของฟังก์ชันตัวแปรเดียวได้ ดังนิยามต่อไปนี้

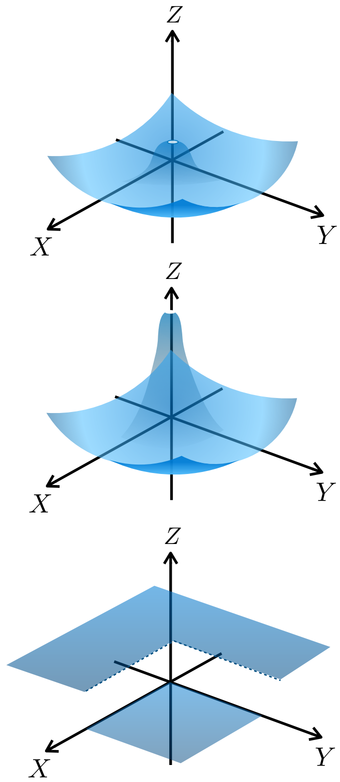
บทนิยาม 1.3.1. ให้ f เป็นฟังก์ชันของ $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$ ที่กำหนดตามโดเมน ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่อง (continuity) ที่จุด $\mathbf{P} = \mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ ถ้า f สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $f(\mathbf{A})$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P})$ มีค่า
3. $\lim\limits_{\mathbf{P}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{P}) = f(\mathbf{A})$

จากนิยามดังกล่าว เราสามารถกล่าวได้โดยมุมมองของนิยามแบบ $\delta - \epsilon$ ได้ว่า

. ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด $\mathbf{A}$ บนโดเมนของฟังก์ชัน ถ้าสำหรับทุก $\epsilon > 0$ มีย่านจุดเปิด $N(\mathbf{A};\delta)$ ของ $\mathbf{A}$ ที่ทำให้ $|f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{A})| < \epsilon$ สำหรับทุก $\mathbf{P} \in N(\mathbf{A};\delta)$

ฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่จุด $\mathbf{A}$ จะเรียกว่า ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง (discontinuity) ที่จุด $\mathbf{A}$ ทั้งนี้ ตัวอย่างของความต่อเนื่องแบบต่างๆ แสดงในภาพที่ 1.19



ภาพที่ 1.19. ตัวอย่างของความไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ แบบต่างๆ
(ภาพบน) ฟังก์ชันไม่นิยามที่จุด $(0,0)$ เกิดความไม่ต่อเนื่องแบบขจัด
(ภาพกลาง) ค่าของฟังก์ชันเป็นอนันต์ที่จุด $(0,0)$
(ภาพล่าง) ฟังก์ชันมีการกระโดดแนวตั้ง (vertical jump) ที่จุด $(0,0)$

ตัวอย่าง 1.3.1. จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x,y) = 2x + y$ มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,1)$

พิสูจน์. จะเห็นว่า $f(0,1) = 1$ และเนื่องจาก $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} (2x+y) = 1$ จากตัวอย่าง 1.2.8

ทำให้ได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} (2x+y) = 1 = f(0,1)$

นั่นคือ f มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,1)$ □

เราสามารถพิสูจน์ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบางชนิด รวมถึงฟังก์ชันที่สร้างจากฟังก์ชันอื่นๆ ที่มีความต่อเนื่อง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ โดยเว้นให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 1.3.2. .

1. ฟังก์ชันพหุนามที่มี n ตัวแปร มีความต่อเนื่องทุกจุดใน $\mathbb{R}^n$
2. ฟังก์ชันตรรกยะ มีความต่อเนื่องทุกๆ จุดในโดเมนของฟังก์ชัน

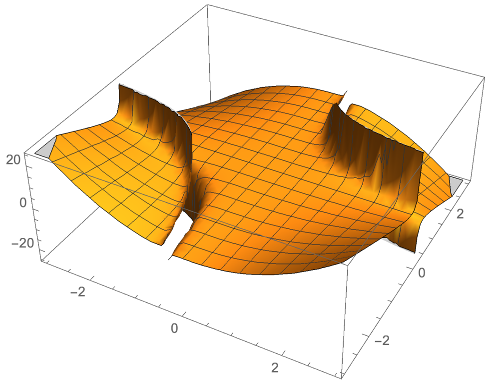
ตัวอย่าง 1.3.3.

จงหาลิมิต $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

วิธีทำ. เนื่องจาก $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $(-1,2)$ โดยนิยามของฟังก์ชันต่อเนื่อง จึงได้ว่า

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{(-1)(2)}{(-1)^2+(2)^2} = -\frac{2}{5}$$

ตัวอย่าง 1.3.4. ฟังก์ชัน $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{1-xy}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ มีความต่อเนื่องทุกจุดยกเว้นบริเวณที่ $xy = 1$



ภาพที่ 1.20. พื้นผิวของ $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{1-xy}$

เราสามารถสร้างฟังก์ชันใหม่ที่มีความต่อเนื่อง จากฟังก์ชันเก่าที่มีความต่อเนื่องได้ โดยให้ผู้อ่านพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 1.3.5. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ แล้ว

1. $f \pm g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด A
2. $f \cdot g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด A
3. f/g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด A โดยที่ $g(\mathbf{A}) \neq 0$

ตัวอย่าง 1.3.6. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ หรือไม่

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

พิสูจน์. จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะเห็นว่า $f(0,0) = 0$ เราจึงพิจารณาค่าของ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ โดยเริ่มต้น เราจะพิจารณาจากลิมิตทำซ้ำ

<u>ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 1:</u> $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right] = \lim\limits_{y\to 0}[-1] = -1$

<u>ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 2:</u> $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right] = \lim\limits_{x\to 0}[1] = 1$

ดังนั้นจะเห็นว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ไม่มีค่า
นั่นคือ f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ □

ตัวอย่าง 1.3.7. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ มีความต่อเนื่องที่จุด $(1,2)$ หรือไม่

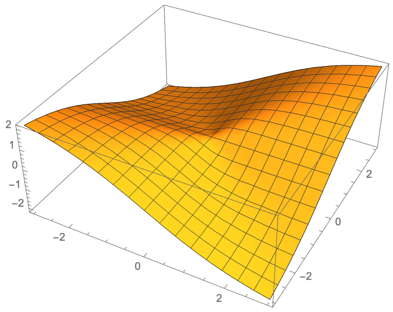
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+2y & ,(x,y) \neq (1,2) \\ 0 & ,(x,y) = (1,2) \end{cases}$$

พิสูจน์. จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะเห็นว่า $f(1,2) = 0$
และ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 5$

จึงได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 5 \neq f(1,2)$
นั่นคือ f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด $(1,2)$ □

จะเห็นว่า ในตัวอย่าง 1.3.7 หากเรานิยามให้ $f(1,2) = 5$ จึงจะทำให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง สำหรับฟังก์ชันลักษณะนี้ มีความไม่ต่อเนื่องแบบขจัด (removable discontinuity)

หมายเหตุ. ฟังก์ชัน $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความไม่ต่อเนื่องแบบขจัด (removable discontinuity) ที่ (x_0,y_0) ถ้า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ มีค่า แต่ f ไม่ต่อเนื่อง เนื่องจาก f ไม่นิยามที่จุด (x_0,y_0) หรือ $f(x_0,y_0)$ มีค่าต่างจาก $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ อย่างใดอย่างหนึ่ง



ภาพที่ **1.21.** พื้นผิวของฟังก์ชันในตัวอย่าง 1.3.8

ตัวอย่าง 1.3.8. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

พิสูจน์. จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะเห็นว่า $f(0,0)=0$
ต่อไป เราจะพิจารณา $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

เราเริ่มต้นจากการพิจารณาลิมิตทำซ้ำ
<u>ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 1:</u> $\lim\limits_{y\to0}\left[\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]=\lim\limits_{y\to0}[0]=0$

<u>ลิมิตทำซ้ำแบบที่ 2:</u> $\lim\limits_{x\to0}\left[\lim\limits_{y\to0}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]=\lim\limits_{x\to0}[0]=0$

จะเห็นว่า

$$\lim_{y\to0}\left[\lim_{x\to0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]=0=\lim_{x\to0}\left[\lim_{y\to0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

ต่อไป เราจะพิจารณาเส้นทางต่างๆ โดยเลือกเส้นทางที่ผ่านจุด $(0,0)$ เริ่มต้นจึงเลือก $y=mx$ สำหรับจำนวนจริง m ใดๆ ได้ว่า เมื่อ $x\to0$ แล้ว $y\to0$ นั่นคือ

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(\text{ตามเส้น } y=mx)}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to0}\frac{mx^2}{\sqrt{x^2(1+m^2)}}=0$$

ทำการเลือกเส้นทางอื่นๆ อีก เช่น เลือก $y=mx^2$ จะได้ว่า

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(\text{ตามเส้น } y=mx^2)}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to0}\frac{mx^3}{\sqrt{x^2(1+m^2x^2)}}=0$$

จะเห็นว่า ไม่ว่าจะเลือกเส้นทางใดในที่นี้ ก็จะได้ค่าของลิมิตเท่ากับ 0 เราจึงคาดเดาว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$
ต่อไป จะพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$
ให้ $\epsilon>0$ เลือก $\delta=\epsilon>0$
ซึ่งสำหรับ $\|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ และ

$$|x|=\sqrt{x^2}\leq\sqrt{x^2+y^2}<\delta$$
$$|y|=\sqrt{y^2}\leq\sqrt{x^2+y^2}<\delta$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right| &= \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \\ &= \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right||y| \\ &\leq |y| \\ &< \delta = \epsilon\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

เนื่องจาก $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$
จึงได้ว่า f มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ $\square$

แบบฝึกหัดที่ 1.3

1. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x-y} & ,x\neq y \\ 0 & ,x=y \end{cases}$

2. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^4+y^4} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

3. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ หรือไม่

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^3+y^3} & ,x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & ,x=y=0 \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} 2xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & ,(x,y) = (2y,y) \\ \mathrm{e}^{|x-2y|/|(x^2-4xy+4y^2)} & ,(x,y) \neq (2y,y) \end{cases}$

4. ให้ฟังก์ชัน $f(x,y) = |x|(1+y)$ จงแสดงว่า f มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

5. ให้ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด x_0 และ $h(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด y_0 แล้ว จงแสดงว่า $f(x,y) = g(x)h(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0)

   (คำใบ้: ใช้นิยามแบบ $\delta - \epsilon$ ในการพิสูจน์)

6. จงแสดงว่าฟังก์ชัน f ที่กำหนดโดย

$$f(x,y) = \begin{cases} 3xy & ,(x,y) \neq (2,3) \\ 6 & ,(x,y) = (2,3) \end{cases}$$

   มีความไม่ต่อเนื่องแบบขจัด พร้อมทั้งนิยามค่าของฟังก์ชันที่ทำให้ฟังก์ชันนี้ต่อเนื่อง

7. สำหรับฟังก์ชันต่อไปนี้ เราสามารถนิยามค่าของฟังก์ชันที่จุด $(0,0)$ ที่ทำให้ฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

   (b) $f(x,y) = |x|^y$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2-y^2}$

1.4 อนุพันธ์ย่อย

ถ้า $z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร เราสนใจการศึกษาว่า z มีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร เมื่อ x เปลี่ยนแปลงไป ในขณะที่ y ถูกตรึงให้คงที่ และเมื่อ y เปลี่ยนแปลงไป ในขณะที่ x ถูกตรึงให้คงที่ การศึกษาการเปลี่ยนแปลงในลักษณะดังกล่าว คล้ายคลึงกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียว และจะเรียกว่า อนุพันธ์ย่อย (partial derivative)

บทนิยาม 1.4.1. ให้ $z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรแล้ว

1. อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x เขียนแทนด้วย f_x, $\partial f/\partial x$, $D_x f(x,y)$ หรือ $f_x(x,y)$ นิยามโดย

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

2. อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y เขียนแทนด้วย f_y หรือ $\partial f/\partial y$, $D_y f(x,y)$ หรือ $f_y(x,y)$ นิยามโดย

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

ถ้าลิมิตดังกล่าวมีค่า

อนุพันธ์ย่อยที่จุด (x_0, y_0) ในโดเมนของ f เขียนแทนด้วย

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \quad , \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} \quad , D_x f(x_0,y_0) \quad \text{หรือ } f_x(x_0,y_0)$$

และทำนองเดียวกัน

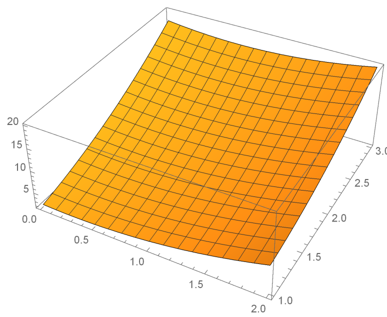
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \quad , \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \quad , D_y f(x_0,y_0) \quad \text{หรือ } f_y(x_0,y_0)$$

ดังนั้น จะได้ว่า อนุพันธ์ย่อยของ f ที่จุด (x_0, y_0) สามารถพิจารณาได้โดย

$$\begin{aligned} f_x(x_0,y_0) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} \\ f_y(x_0,y_0) &= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y} \end{aligned}$$

และถ้าให้ $\Delta x = x - x_0$ และ $\Delta y = y - y_0$ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_x(x_0,y_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} \\ f_y(x_0,y_0) &= \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0} \end{aligned}$$



ภาพที่ 1.22. พื้นผิวของฟังก์ชันในตัวอย่าง $f(x,y) = 2x^2 - xy + 2y^2$

ตัวอย่าง 1.4.1. กำหนด $f(x,y) = 2x^2 - xy + 2y^2$ จงหาอนุพันธ์ย่อย $\partial f/\partial x$ และ $\partial f/\partial y$ ที่จุด $(1,2)$ โดยใช้นิยามของอนุพันธ์ย่อย

วิธีทำ. ก่อนอื่น จะหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x และ y จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(2(x+\Delta x)^2 - y(x+\Delta x) + 2y^2\right) - (2x^2 - xy + 2y^2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} 4x + 2\Delta x - y \\ &= 4x - y \end{aligned}$$

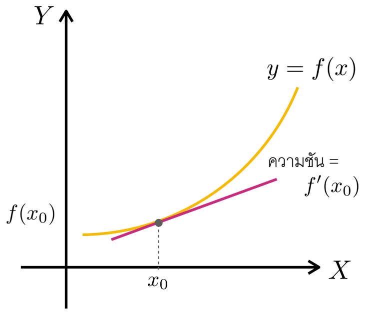
และทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{(2x^2 - x(y+\Delta x) + 2(y+\Delta y)^2 - (2x^2 - xy + 2y^2)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y\to 0} -x + 4y + 2\Delta y \\ &= -x + 4y \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ว่า $f_x(1,2) = 4(1) - 2 = 2$ และ $f_y(1,2) = -1 + 4(2) = 7$

หมายเหตุ. ในตัวอย่างดังกล่าว เราอาจเลือกใช้นิยามของการหาอนุพันธ์ที่จุดดังกล่าวได้เช่นเดียวกัน โดยให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด

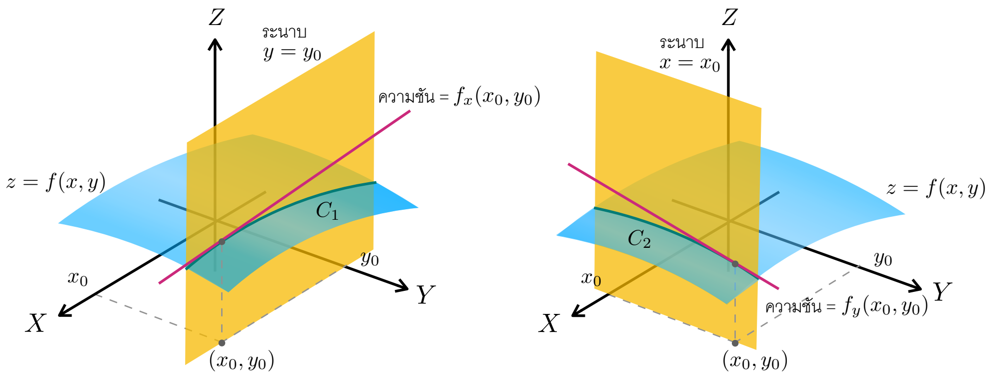
1.4.1 ความหมายของอนุพันธ์ในทางเรขาคณิต



ภาพที่ 1.23. ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ f ที่จุด x_0

สำหรับฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร $y = f(x)$ ความหมายของอนุพันธ์ $f'(x_0)$ คือ การเปลี่ยนของ y เทียบกับ x ที่จุด x_0 ซึ่งมีความหมายทางเรขาคณิตคือ ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ f ณ จุด x_0 ดังแสดงในภาพที่ 1.23

จากนิยามของอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $z = f(x,y)$ ที่จุด (x_0, y_0) เราสามารถพิจารณาได้ว่า $f_x(x_0, y_0)$ คือ ความชันของเส้นโค้ง C_1 ที่เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบ $y = y_0$ และพื้นผิว $z = f(x,y)$ ณ ตำแหน่งที่ $x = x_0$ นั่นคือ $f_x(x_0, y_0)$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ z ตามเส้นโค้ง C_1 และทำนองเดียวกัน $f_y(x_0, y_0)$ คือการพิจารณาความชันของเส้นโค้ง C_2 ที่เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบ $x = x_0$ และพื้นผิว $z = f(x,y)$ ณ ตำแหน่งที่ $y = y_0$ นั่นคือ $f_y(x_0, y_0)$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ z ตามเส้นโค้ง C_2 ดังแสดงในภาพที่ 1.24



ภาพที่ 1.24. ความหมายทางเรขาคณิตของอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $z = f(x,y)$ ที่จุด (x_0, y_0) (ภาพซ้าย) $f_x(x_0, y_0)$ (ภาพขวา) $f_y(x_0, y_0)$

กล่าวโดยสรุป คือ $f_x(x_0, y_0)$ คืออัตราการการเปลี่ยนแปลงของ z เมื่อเทียบกับ x ตามเส้นโค้ง C_1 ที่จุด (x_0, y_0) และ $f_y(x_0, y_0)$ คืออัตราการการเปลี่ยนแปลงของ z เมื่อเทียบกับ y ตามเส้นโค้ง C_2 ที่จุด (x_0, y_0) นั่นเอง

จากความหมายในทางเรขาคณิตดังกล่าว ทำให้เราสามารถใช้สูตรของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียว มาช่วยในการหาอนุพันธ์ย่อยได้ กล่าวคือ การหาอนุพันธ์ย่อย $f_x(x,y)$ เราให้ตัวแปร y คงที่ แล้วหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร x และในทำนองเดียวกัน การหาอนุพันธ์ย่อย $f_y(x,y)$ เราให้ตัวแปร x คงที่ แล้วหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร y

ตัวอย่าง 1.4.2. กำหนด $f(x,y) = x^3y^5 + e^{xy}\sin(x+2y)$ จงหาอนุพันธ์ย่อย $\partial f/\partial x$ และ $\partial f/\partial y$

วิธีทำ. จากสูตรของการหาอนุพันธ์ ทำให้ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 3x^2y^5 + (e^{xy}\cos(x+2y) + y\sin(x+2y)e^{xy}) \\
f_y(x,y) &= 5x^3y^4 + (2e^{xy}\cos(x+2y) + x\sin(x+2y)e^{xy})
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 1.4.3. กำหนดพื้นผิว $f(x,y) = x^3y + 5y^3$ จงหาความชันของพื้นผิว $z = f(x,y)$ ในทิศทางของ x ที่จุด $(-1, 2)$

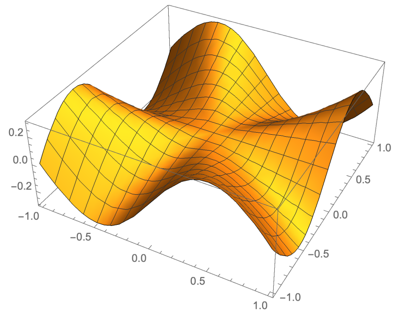
วิธีทำ. ความหมายของการหาความชันของพื้นผิว $z = f(x,y)$ ในทิศทางของ x คือการหา $f_x(x,y)$ ที่จุด $(-1,2)$ นั่นคือ $f_x(x,y) = 3x^2y$ ดังนั้น $f_x(-1,2) = 6$

กล่าวคือ z เพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 6 หน่วย ต่อหนึ่งหน่วยการเพิ่มขึ้นของ x

ตัวอย่าง 1.4.4. ให้ฟังก์ชัน f นิยามโดย

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

จงหาอนุพันธ์ย่อย $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, $f_x(0,y)$, $f_y(x,0)$



ภาพที่ 1.25. พื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x,y)$ ในตัวอย่าง 1.4.4

วิธีทำ. จะเห็นว่า ในกรณีที่ $(x,y)\neq(0,0)$ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\\ f_y(x,y) &= x\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\end{aligned}$$

ต่อไป เราจะพิจารณา $f_x(0,y)$ ในกรณีนี้จะเห็นว่า เราต้องแบ่งกรณีออกเป็น 2 กรณี

กรณีที่ $y\neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_x(0,y) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x-0}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}-0}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=-y\end{aligned}$$

กรณีที่ $y=0$ จะได้ว่า

$$f_x(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

จึงสรุปได้ว่า

$$f_x(0,y)=\begin{cases}-y & ,y\neq 0\\ 0 & ,y=0\end{cases}$$

ในทำนองเดียวกัน เราจะได้ว่า

$$f_y(x,0)=\begin{cases}x & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

1.4.2 อนุพันธ์ย่อยในมิติที่สูงขึ้น

ในกรณีฟังก์ชันหลายตัวแปร เราสามารถวางนัยทั่วไปนิยามของอนุพันธ์ย่อยได้

ให้ f เป็นฟังก์ชันของ $\mathbf{P}=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ เขียนแทนด้วย $f=f(x_1,...,x_n)$ อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับตัวแปร x_k นิยามโดย

$$f_{x_k}(\mathbf{P})=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f(x_1,x_2,...,x_{k-1},x_k+\Delta x_k,x_{k+1},...,x_n)-f(\mathbf{P})}{\Delta x_k}$$

การหาอนุพันธ์ย่อยโดยใช้สูตร ก็สามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับการหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปร

ตัวอย่าง 1.4.5. กำหนด $f(x,y,z) = x^3y^4z^5 + 3xy + 4z$
จงหา $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$, $f_z(x,y,z)$, $f_z(-1,1,0)$

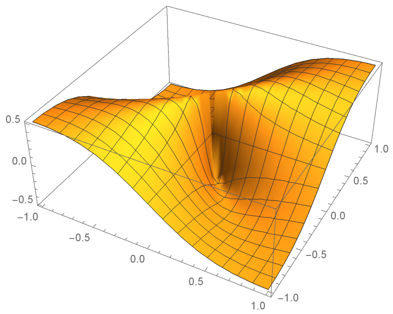
วิธีทำ. จากสูตรของการหาอนุพันธ์ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= 3x^2y^4z^5 + 3y \\ f_y(x,y,z) &= 4x^3y^3z^5 + 3x \\ f_z(x,y,z) &= 5x^3y^4z^4 + 4 \\ f_z(-1,1,0) &= 5(-1)^3(1)^4(0)^4 + 4 = 4 \end{aligned}$$

1.4.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความต่อเนื่องและอนุพันธ์ย่อย

ในแคลคูลัสในหนึ่งตัวแปร เรามีทฤษฎีบทที่คุ้นเคยที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างการมีอนุพันธ์ และความต่อเนื่อง ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.4.1. ถ้าฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่ $x = x_0$ แล้ว f มีความต่อเนื่องที่ $x = x_0$



ภาพที่ 1.26. พื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x,y)$ ในตัวอย่าง 1.5.5

คำถามหนึ่งที่อาจเกิดขึ้นในทำนองคล้ายกันกับกรณีฟังก์ชันตัวแปรเดียว คือ การมีอนุพันธ์ย่อยที่จุด (x_0,y_0) สามารถรับประกันความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จุด (x_0,y_0) ได้หรือไม่ ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า คำตอบของคำถามนี้ไม่จริงเสมอไป

ตัวอย่างค้าน 1.4.6. ให้ฟังก์ชัน f นิยามโดย

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

จงแสดงว่า $f_x(0,0)$ และ $f_y(0,0)$ มีค่า แต่ $f(x,y)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

พิสูจน์. ก่อนอื่น จะพิจารณาอนุพันธ์ย่อยของ f ที่จุด $(0,0)$ คือ

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0 \\ f_y(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{y} = 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ อนุพันธ์ย่อย $f_x(0,0)$ และ $f_y(0,0)$ มีค่า

ต่อไปจะแสดงว่า $f(x,y)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ จะเห็นว่า $f(0,0) = 0$ ต่อมาจึงพิจารณา $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ จะเห็นว่า สำหรับลิมิตทำซ้ำ

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right] = 0 = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right]$$

แต่สำหรับลิมิตตามเส้น เมื่อเลือกเส้น $y = x$ จะได้ว่า

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (\text{ตามเส้น } y=x)}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

นั่นคือ ลิมิต $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ไม่มีค่า จึงสรุปได้ว่า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ □

จากตัวอย่าง 1.4.6 จะเห็นว่า หาก $(x, y) \neq (0, 0)$ เราจะสามารถคำนวณอนุพันธ์ย่อยได้ กล่าวคือ

$$f_x(x, y) = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad f_y(x, y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

แต่อนุพันธ์ย่อย $f_x(0, 0)$ และ $f_y(0, 0)$ จะต้องใช้นิยามโดยตรง ดังที่แสดงในตัวอย่าง 1.4.6 ไม่สามารถคำนวณผ่านการหาอนุพันธ์ย่อยทั่วๆ ไปแล้วแทนค่าได้

ถึงแม้การมีอนุพันธ์ย่อยที่จุด (x_0, y_0) ไม่ได้รับประกันความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จุด (x_0, y_0) แต่หากเพิ่มเติมเงื่อนไขบางประการ จะทำให้เรายืนยันความต่อเนื่องจากอนุพันธ์ย่อยได้ เพื่อพิจารณาเงื่อนไขดังกล่าว เราจะพิจารณาทฤษฎีบทค่ามัชฌิมของฟังก์ชันสองตัวแปร โดยก่อนอื่น จะขอยกทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.4.2. (ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว)
ถ้าฟังก์ชัน f ที่นิยามบน $[a, b]$ ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b) แล้ว มีจำนวนจริง $c \in (a, b)$ ซึ่ง

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

จากทฤษฎีบท 1.4.2 หากเราพิจารณาให้ b เขียนแทนด้วย $a + h$ แล้ว จำนวนจริง c ที่อยู่ในช่วง (a, b) สามารถเขียนได้ในรูป $a + \theta h$ เมื่อ $0 < \theta < 1$ นั่นคือ

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a + \theta h) \qquad \text{เมื่อ } 0 < \theta < 1$$

ต่อไป เราจะขยายแนวคิดทฤษฎีบทค่ามัชฌิมไปสู่ฟังก์ชันสองตัวแปร ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.4.7. (ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร)
ถ้า f_x มีค่าสำหรับจุดในย่านจุดเปิดจุด (a, b) และ $f_y(a, b)$ มีค่าแล้ว สำหรับทุกจุด $(a + h, b + k)$ ของย่านจุดเปิดจุด (a, b) จะได้ว่า

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = hf_x(a + \theta h, b + k) + k[f_y(a, b) + \eta]$$

เมื่อ $0 < \theta < 1$ และ η เป็นฟังก์ชันของ k ที่ลู่เข้าสู่ 0 เมื่อ $k \to 0$

พิสูจน์. ก่อนอื่น พิจารณา

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = [f(a+h, b+k) - f(a, b+k)] + [f(a, b+k) - f(a, b)]$$

เนื่องจาก f_x มีค่าในย่านจุดเปิดจุด (a, b) โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว (ทฤษฎีบท 1.4.2) จะได้ว่า

$$f(a + h, b + k) - f(a, b + k) = hf_x(a + \theta h, b + k) \qquad \text{เมื่อ } 0 < \theta < 1$$

และเนื่องจาก $f_y(a, b)$ มีค่า นั่นคือ

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} = f_y(a, b)$$

จึงได้ว่า

$$f(a, b+k) - f(a, b) = k[f_y(a, b) + \eta]$$

โดยที่ η เป็นฟังก์ชันของ k ที่ลู่เข้าสู่ 0 เมื่อ $k \to 0$ เพราะฉะนั้น จึงได้ว่า

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = hf_x(a+\theta h, b+k) + k[f_y(a, b) + \eta]$$

เมื่อ $0 < \theta < 1$ และ η เป็นฟังก์ชันของ k ที่ลู่เข้าสู่ 0 เมื่อ $k \to 0$ ตามต้องการ □

เมื่อเราเพิ่มเงื่อนไขให้อนุพันธ์ย่อยมีขอบเขต (bounded) ในย่านจุดเปิดจุด (a, b) ก็จะสามารถรับประกันความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.4.8. ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้าหนึ่งในบรรดาอนุพันธ์ย่อยของ f มีค่า และมีขอบเขตในย่านจุดเปิดจุด (a, b) และอนุพันธ์ย่อยที่เหลือมีค่าที่จุด (a, b) แล้ว f มีความต่อเนื่องที่จุด (a, b)

พิสูจน์. โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้ f_x มีค่าและมีขอบเขตในย่านจุดเปิดจุด (a, b) และให้ $f_y(a, b)$ มีค่า แล้วสำหรับทุกจุด $(a+h, y+k)$ ในย่านจุดเปิดจุด (a, b) โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร จะได้ว่า

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = hf_x(a+\theta h, b+k) + k[f_y(a, b) + \eta]$$

เมื่อ $0 < \theta < 1$ และ $\eta \to 0$ เมื่อ $k \to 0$
เราทำการผ่านลิมิตให้ $(h, k) \to (0, 0)$ เนื่องจาก $f_x(a+\theta h, b+k)$ มีขอบเขตในย่านจุดเปิดจุด (a, b) จึงได้ว่า

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h, b+k) = f(a, b)$$

นั่นคือ f มีความต่อเนื่องที่จุด (a, b) ตามต้องการ □

ดังนั้น สำหรับบริเวณปิด เราจึงสรุปได้ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 1.4.9. ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่นิยามในบริเวณปิด ถ้าอนุพันธ์ย่อยของ f ทั้งสองมีค่า และมีขอบเขตในบริเวณปิดดังกล่าวแล้ว f มีความต่อเนื่องในบริเวณปิดดังกล่าว

ในหัวข้อต่อไป เราจะพิจารณาปัญหาเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ได้ของฟังก์ชันหลายตัวแปร รวมถึงความสัมพันธ์ต่างๆ ที่เกี่ยวข้องระหว่างอนุพันธ์ย่อย การหาอนุพันธ์ได้ และความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

แบบฝึกหัดที่ 1.4

1. กำหนดฟังก์ชัน f ต่อไปนี้ จงหา $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$

   (a) $f(x,y) = x^3y + e^{xy^2}$

   (b) $f(x,y) = y^{-3/2}\arctan(x/y)$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{3x^4y - 7x^3y}$

2. จงหาความชันที่จุด $(-1,1,5)$ ของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันระหว่างพื้นผิว $z = x^2 + 4y^2$ และ

   (a) ระนาบ $x = -1$

   (b) ระนาบ $y = 1$

3. จุดหนึ่งเคลื่อนที่อยู่บนเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันระหว่างพาราโบลอยด์เชิงวงรี $z = x^2 + 3y^2$ กับระนาบ $x = 2$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ z เมื่อเทียบกับ y เมื่อจุดนั้นอยู่ที่ตำแหน่ง $(3,1,12)$

4. จงหา $\partial w/\partial w_i$ สำหรับ $i = 1,...,n$ เมื่อกำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้

   (a) $w = \cos(x_1 + 2x_2 + ... + nx_n)$

   (b) $w = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$

5. กำหนดให้ $f(x,y) = (x^2+y^2)^{2/3}$ จงแสดงว่า

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x}{3(x^2+y^2)^{1/3}} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6. จงหา $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy}{x+y} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

7. สำหรับฟังก์ชัน f ที่กำหนดโดย

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x-y} & ,x \neq y \\ 0 & ,x = y \end{cases}$$

   จงแสดงว่า ฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ (แบบฝึกหัดที่ 1.3 ข้อ 1.c) แต่อนุพันธ์ย่อย $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$ สามารถหาค่าได้ทุกจุดรวมถึงจุด $(0,0)$

8. กำหนดฟังก์ชัน

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\tan\left(\dfrac{y}{x}\right) & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

จงแสดงว่า $xf_x+yf_y=2f$

9. จงหา $f_x, f_y, f_x(0,0), f_y(0,0)$ เมื่อกำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้

(a) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

(b) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x=y=0\end{cases}$

10. กำหนด $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ จงหา $f_x(0,0), f_y(0,0)$

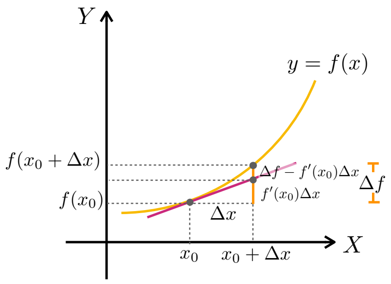
1.5 การหาอนุพันธ์ได้ และผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม

สืบเนื่องจากปัญหาที่เกิดขึ้นในหัวข้อที่ 1.4 เราพบว่า ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ย่อยได้ ณ จุด (x_0,y_0) อาจไม่มีความต่อเนื่องที่จุด (x_0,y_0) ดังตัวอย่าง 1.4.6

สำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว f จะกล่าวว่า f หาอนุพันธ์ที่ได้ (differentiable) ที่จุด x_0 ถ้าลิมิต

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

มีค่า ดังนั้น ผลที่ตามมาจากการที่ f หาอนุพันธ์ได้ ประกอบด้วย



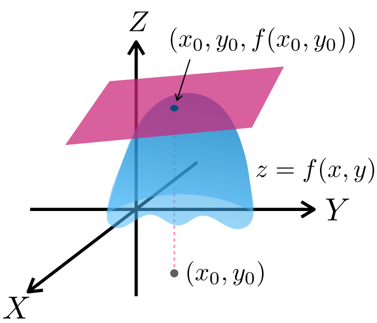
ภาพที่ 1.27. การประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ของฟังก์ชัน f ใกล้จุด x_0 สำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว

$(1D)$: 1 กราฟของฟังก์ชัน $y=f(x)$ มีเส้นสัมผัสที่ไม่ใช่เส้นสัมผัสแนวตั้งที่จุด $(x_0,f(x_0))$

$(1D)$: 2 f สามารถประมาณได้โดยการประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ (local linear approximation) ณ จุดที่ใกล้ๆ x_0 (ดังภาพที่ 1.27)

$(1D)$: 3 f มีความต่อเนื่องที่ x_0 (โดยทฤษฎีบท 1.4.1)

ดังนั้น เราจึงต้องการที่จะขยายผลดังกล่าวไปสู่กรณีฟังก์ชันหลายตัวแปร เพื่อให้ได้ผลที่เป็นไปในแนวทางเดียวกัน กล่าวคือ



ภาพที่ 1.28. ระนาบสัมผัสที่ไม่ใช่ระนาบแนวตั้งที่จุด (x_0,y_0)

(nD): 1 พื้นผิวของฟังก์ชัน $z=f(x,y)$ มีระนาบสัมผัสที่ไม่ใช่ระนาบสัมผัสแนวตั้งที่จุด $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

(nD): 2 ค่าของฟังก์ชัน f ที่จุดที่ใกล้ๆ (x_0,y_0) สามารถประมาณได้ด้วยค่าที่คำนวณจากค่าของฟังก์ชันเชิงเส้น

(nD): 3 f มีความต่อเนื่องที่ (x_0,y_0)

ก่อนอื่น เราจะศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ได้ของฟังก์ชันหลายตัวแปรก่อน

1.5.1 การหาอนุพันธ์ได้

ในแคลคูลัสของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราศึกษาส่วนเปลี่ยนแปลง (increment) ของตัวแปรตาม Δf เมื่อตัวแปร x มีการเปลี่ยนแปลงจาก x_0 ไป Δx เป็น $x_0 + \Delta x$ โดย

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ซึ่งในการศึกษาเกี่ยวกับดิฟเฟอเรนเชียลของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราทราบว่า เมื่อ Δx มีค่าใกล้ๆ 0 จะสามารถประมาณ

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$$

ดังนั้น เมื่อค่า Δx เข้าใกล้ 0 ความคลาดเคลื่อน $\Delta f - f'(x_0)\Delta x$ ควรมีขนาดที่น้อยกว่า Δx ทั้งนี้ เพราะ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = 0$$

จะเห็นว่า Δx คือระยะระหว่างจุด x_0 และ $x_0 + \Delta x$ ดังนั้น หากให้ระยะระหว่างจุดสองจุดเข้าใกล้กันมากๆ การประมาณค่าของจุดก็ควรจะมีความคลาดเคลื่อนที่น้อยลงเรื่อยๆ ดังภาพ 1.27 ด้วยแนวคิดเช่นนี้ เราจึงขยายไปสู่แนวคิดของฟังก์ชันสองตัวแปรได้ ดังนี้

ให้ Δf แทน **ส่วนเปลี่ยนแปลง** (increment) ของ f ซึ่งแสดงการเปลี่ยนแปลงของ $f(x, y)$ เมื่อ (x, y) เปลี่ยนแปลงจากจุด (x_0, y_0) ไปสู่จุดใหม่ $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ กล่าวคือ

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

เราจะนิยามการหาอนุพันธ์ได้ ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.5.1. ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร โดยที่ (x, y) และ $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ เป็นจุดในโดเมนของฟังก์ชัน f ฟังก์ชัน f จะ**หาอนุพันธ์ได้** (differentiable)ที่จุด (x, y) ถ้าการเปลี่ยนแปลง Δf สามารถเขียนได้ในรูป

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \phi(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \psi(\Delta x, \Delta y)\Delta y \qquad (1.5.1)$$

โดยที่ A และ B เป็นค่าที่เป็นอิสระจาก $\Delta x, \Delta y$ และ ϕ, ψ เป็นฟังก์ชันของ $\Delta x, \Delta y$ โดยที่ $\phi \to 0, \psi \to 0$ เมื่อ $\Delta x \to 0$ และ $\Delta y \to 0$

จากสมการ (1.5.1) จะเห็นว่า ถ้า $\Delta y = 0$ จะได้ว่า

$$\Delta f = A\Delta x + \phi(\Delta x, \Delta y)\Delta x \qquad (1.5.2)$$

ดังนั้น หากหารสมการ (1.5.2) ด้วย Δx แล้วให้ $\Delta x \to 0$ จะทำให้ได้ว่า $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}$

และในทำนองเดียวกัน จากสมการ (1.5.1) ถ้าให้ $\Delta x = 0$ แล้วนำ Δy ไปหารทั้งสมการ จะทำให้ได้ว่า $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ ดังนั้น เราจึงสรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.5.1. ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) แล้วอนุพันธ์ย่อย $f_x(x_0, y_0)$ และ $f_y(x_0, y_0)$ มีค่า

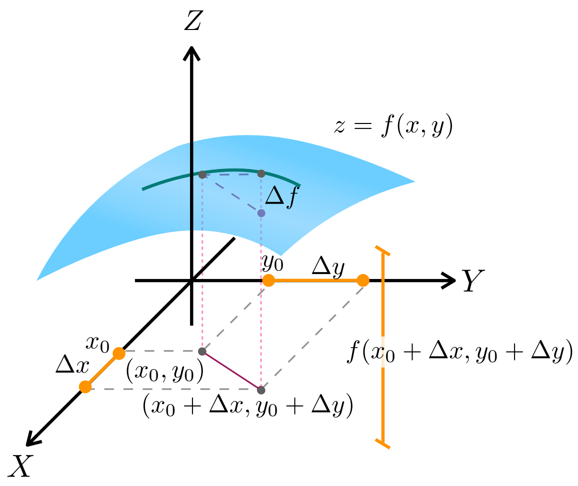
จากทฤษฎีบท 1.5.1 เราจึงสามารถพิจารณานิยามของการหาอนุพันธ์ได้ในรูปของอนุพันธ์ย่อยได้ กล่าวคือ

. ฟังก์ชัน f จะ**หาอนุพันธ์ได้** (differentiable)ที่จุด (x_0, y_0) ถ้าการเปลี่ยนแปลง Δf สามารถเขียนได้ในรูป

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \phi(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \psi(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

โดยที่ A และ B เป็นค่าที่เป็นอิสระจาก $\Delta x, \Delta y$ และ ϕ, ψ เป็นฟังก์ชันของ $\Delta x, \Delta y$ โดยที่ $\phi \to 0, \psi \to 0$ เมื่อ $\Delta x \to 0$ และ $\Delta y \to 0$

ภาพที่ 1.29 แสดงให้เห็นถึงการพิจารณาส่วนเปลี่ยนแปลงของ f ที่จุด (x_0, y_0)



ภาพที่ 1.29. ส่วนเปลี่ยนแปลงของ f ที่จุด (x_0, y_0)

ตัวอย่าง 1.5.2. จงแสดงว่า $f(x, y) = x^2 + 3xy$ หาอนุพันธ์ได้ทุกจุดใน $\mathbb{R}^2$

พิสูจน์. ให้ (x_0, y_0) เป็นจุดใดๆ ใน $\mathbb{R}^2$ ก่อนอื่นจะพิจารณาส่วนเปลี่ยนแปลงของ f เมื่อ (x, y) มีการเปลี่ยนแปลงจาก (x_0, y_0) ไปเป็น $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\
&= [(x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)] - [x_0^2 + 3x_0 y_0] \\
&= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x_0 y_0 + 3x_0\Delta y + 3y_0\Delta x + \Delta x\Delta y - x_0^2 - 3x_0 y_0 \\
&= 2x_0\Delta x + 3x_0\Delta y + 3y_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x\Delta y \qquad (1.5.3)
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $f_x(x_0, y_0) = 2x_0 + 3y_0$ และ $f_y(x_0, y_0) = 3x_0$ ดังนั้น จากสมการ (1.5.3) จะสามารถจัดรูปได้ว่า

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \Delta x\Delta x + \Delta x\Delta y$$

เลือก $\phi(\Delta x, \Delta y) = \Delta y$ และ $\psi(\Delta x, \Delta y) = \Delta x$ ซึ่งต่างก็เป็นฟังก์ชันของ Δx และ Δy จะเห็นว่า $\phi(\Delta x, \Delta y) \to 0$ และ $\psi(\Delta x, \Delta y) \to 0$ เมื่อ $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$

ดังนั้น f จึงหาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุดใน $\mathbb{R}^2$ $\square$

หมายเหตุ. การเลือก $\phi(\Delta x, \Delta y)$ หรือ $\psi(\Delta x, \Delta y)$ ไม่จำเป็นต้องเลือกได้เพียงอย่างเดียว หากสามารถแสดงได้ว่า มี $\phi(\Delta x, \Delta y)$ หรือ $\psi(\Delta x, \Delta y)$ ซึ่ง $\phi \to 0$ หรือ $\psi \to 0$ เมื่อ $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ ก็เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0)

โดยอาศัยแนวคิดที่กล่าวมาในข้างต้น เมื่อพิจารณาจากภาพที่ 1.29 ถ้า $f_x(x_0, y_0)$ และ $f_y(x_0, y_0)$ แล้ว เราจะสามารถประมาณค่าส่วนเปลี่ยนแปลงได้จาก

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

และเมื่อ $\Delta x, \Delta y \to 0$ เราคาดหวังให้ความคลาดเคลื่อน $\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y$ มากกว่าระยะ $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ซึ่งเป็นระยะระหว่างจุด (x_0, y_0) กับจุด $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ โดยต้องการให้ได้ว่า

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

ดังนั้น นิยามของการหาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) สามารถพิจารณาได้อีกแบบหนึ่ง ดังนี้

บทนิยาม 1.5.2. ฟังก์ชันสองตัวแปร f จะหาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) เมื่ออนุพันธ์ย่อย $f_x(x_0, y_0)$ และ $f_y(x_0, y_0)$ มีค่า และ

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

ต่อไป เราตอบคำถามสิ่งที่เราคาดหวังตั้งแต่ต้น คือ การพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างการหาอนุพันธ์ได้และความต่อเนื่อง ซึ่งโดยสรุปแล้ว คำตอบของคำถามนี้ยังคงเป็นจริงสำหรับกรณีฟังก์ชันสองตัวแปร ดังทฤษฎีบทนี้

ทฤษฎีบท 1.5.3. ให้ $f = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) แล้ว f จะต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0)

พิสูจน์. สมมติให้ f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) เราจะแสดงว่า

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

ให้ $x = x_0 + \Delta x$ และ $y = y_0 + \Delta y$ นั่นคือ เราจะแสดงให้ได้ว่า

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

พิจารณาส่วนเปลี่ยนแปลงของ f เราทราบว่า

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

จาก f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) จะได้ว่า Δf สามารถเขียนได้เป็น

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \phi\Delta x + \psi\Delta y \qquad (1.5.4)$$

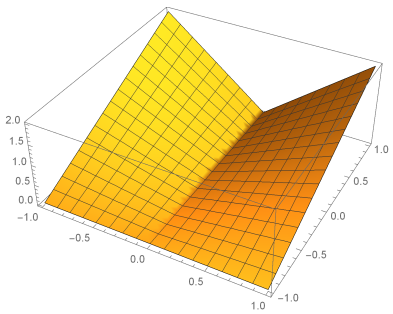
เมื่อให้ $\Delta x \to 0$ และ $\Delta y \to 0$ ทำให้ได้ว่า ด้านขวามือของสมการ (1.5.4) เข้าใกล้ 0 นั่นคือ

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta f = 0$$

ดังนั้น เราจึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta f &= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)\\ &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) - f(x_0,y_0) = 0\end{aligned}$$

จึงได้ว่า $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ นั่นคือ f มีความต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0) ตามต้องการ □



ภาพที่ 1.30. พื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x, y)$ ในตัวอย่าง 1.5.4

เช่นเดียวกันกับทฤษฎีบทของฟังก์ชันตัวแปรเดียว บทกลับของทฤษฎีบทนี้ไม่เป็นจริง ดังตัวอย่างค้านต่อไปนี้

ตัวอย่างค้าน 1.5.4. ฟังก์ชัน $f(x, y) = |x|(1+y)$ มีความต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ แต่หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุด $(0, 0)$

พิสูจน์. การแสดงความต่อเนื่องของฟังก์ชัน $f(x, y) = |x|(1 + y)$ ได้ทิ้งไว้ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด ในแบบฝึกหัดที่ 1.3 ข้อที่ 4 แล้ว

เราจะแสดงว่า f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุด $(0, 0)$ โดยจะใช้ข้อความแย้งสลับที่ (contrapositive) ของทฤษฎีบท 1.5.1 นั่นคือ

> . สำหรับฟังก์ชัน f ที่เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้าอนุพันธ์ย่อย $f_x(x_0, y_0)$ หรือ $f_y(x_0, y_0)$ ไม่มีค่า แล้ว f ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0)

พิจารณาอนุพันธ์ย่อย $f_x(0, 0)$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}f_x(0,0) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{|\Delta x|(1+0) - 0}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}\end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นว่า $\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

และ $\lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ ไม่มีค่า นั่นคืออนุพันธ์ย่อย $f_x(x, y)$ ไม่มีค่า

ดังนั้น f จึงหาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $(0, 0)$ □

คำถามต่อไปที่น่าสนใจ คือ หาก f มีอนุพันธ์ย่อยที่จุด (x_0, y_0) แล้ว เราจะสามารถรับประกันการหาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) หรือไม่ ตัวอย่างค้านต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่าบทกลับของทฤษฎีบท 1.5.1 ไม่จริง นั่นคือ การมีอนุพันธ์ย่อยทั้งสองที่จุด (x_0, y_0) ไม่ได้รับประกันการหาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0)

ตัวอย่างค้าน 1.5.5. (ตัวอย่างเดียวกันกับตัวอย่าง 1.4.6) ให้ฟังก์ชัน f นิยามโดย

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

จงแสดงว่า f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุด $(0,0)$

พิสูจน์. ในตัวอย่าง 1.4.6 เราได้แสดงให้เห็นว่า $f_x(0,0)$ และ $f_y(0,0)$ หาค่าได้ แต่ f ไม่ต่อเนื่องที่ $(0,0)$

โดยข้อความแย้งสลับที่ของทฤษฎีบท 1.5.3 กล่าวคือ

> . ให้ $f = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0) แล้ว f ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0)

ทำให้ได้ว่า f ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0)$ □

คำถามที่ตามมาหลังจากพิจารณาตัวอย่างค้าน 1.5.5 คือ เราจะสามารถเพิ่มเงื่อนไขใดได้หรือไม่ ที่จะทำให้การมีอนุพันธ์ย่อย รับประกันการหาอนุพันธ์ได้ ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยยืนยันการหาอนุพันธ์ได้จากการมีอนุพันธ์ย่อย ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.5.6. ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรซึ่งอนุพันธ์ย่อย f_x และ f_y มีความต่อเนื่องในบริเวณเปิด D แล้ว f จะหาอนุพันธ์ได้ทุกจุดในบริเวณ D

พิสูจน์. ให้ (x_0, y_0) เป็นจุดในบริเวณเปิด D จะได้ว่า มีย่านจุดเปิด N ของจุด (x_0, y_0) ซึ่ง $N \subseteq D$ ดังนั้น สำหรับตัวแปร Δx และ Δy ที่เล็กเพียงพอที่ทำให้จุด $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ อยู่ในย่านจุดเปิด N จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียวในแต่ละพจน์ด้านขวามือ จะได้ว่า

$$\Delta f = \Delta x f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) + \Delta y f_y(x, y + \theta_2 \Delta y)$$

เมื่อ $0 < \theta_1 < 1$ และ $0 < \theta_2 < 1$

เนื่องจาก f_x และ f_y ต่อเนื่องที่จุด (x,y) ในบริเวณ D ดังนั้น เมื่อให้ $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ จะได้ว่า

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f_x(x_0, y_0)$$

และ

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f_y(x_0,y_0)$$

เราจึงเลือก

$$\phi = f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) - f_x(x_0,y_0)$$

และ

$$\psi = f_y(x, y+\theta_2\Delta y) - f_y(x_0,y_0)$$

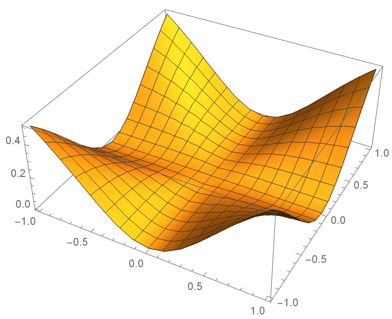
ซึ่ง $\phi \to 0$ และ $\psi \to 0$ เมื่อ $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ ดังนั้น

$$\Delta f = (f_x(x_0,y_0)+\phi)\Delta x + (f_y(x_0,y_0)+\psi)\Delta y$$

นั่นคือ เราสามารถเขียน Δf ได้เป็น

$$\Delta f = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \phi\Delta x + +\psi\Delta y$$

โดยที่ $\phi \to 0$ และ $\psi \to 0$ เมื่อ $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$
เพราะฉะนั้น f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) ตามต้องการ □



ภาพที่ 1.31. พื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x,y)$ ในตัวอย่าง 1.5.7

ตัวอย่าง 1.5.7. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน f นิยามโดย

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$$

หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0)$

พิสูจน์. ก่อนอื่น เราจะหาอนุพันธ์ย่อย $f_x(0,0)$ และ $f_y(0,0)$ ของ f ซึ่งจะเห็นว่า
<u>กรณีที่ $(x,y)=(0,0)$</u> จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0 \end{aligned}$$

<u>กรณีที่ $(x,y)\neq(0,0)$</u> จะได้ว่า

$$f_x(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(2xy^2)-(x^2y^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

จึงสรุปได้ว่า

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$$

ในทำนองเดียวกัน เราจะได้ว่า

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ต่อไป จะแสดงว่า $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$ มีความต่อเนื่องที่ $(0,0)$ โดยเราจะแสดงเฉพาะกรณี $f_x(x,y)$ เท่านั้น (กรณี $f_y(x,y)$ ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด)
จะเห็นว่า $f_x(0,0) = 0$ ต่อไปเราจึงจะแสดงว่า $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = 0$
ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = \epsilon/2 > 0$ ซึ่งสำหรับ $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ และ

$$\begin{aligned} |x| &= \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta \\ |y| &= \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta \end{aligned}$$

และ $y^4 \leq (x^2+y^2)^2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |f_x(x,y) - 0| &= \left|\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right| \\ &= \frac{2|x|y^4}{(x^2+y^2)^2} \\ &\leq 2|x| \\ &< 2\delta = \epsilon \end{aligned}$$

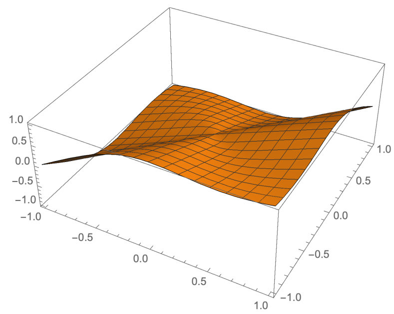
นั่นคือ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = 0 = f_x(0,0)$
ได้ว่า $f_x(x,y)$ มีความต่อเนื่องที่ $(0,0)$ ในทำนองเดียวกันกับ $f_y(x,y)$
โดยทฤษฎีบท 1.5.6 จะได้ว่า f มีความต่อเนื่องที่ $(0,0)$ □

จากทฤษฎีบท 1.5.6 จะเห็นว่า ความต่อเนื่องที่รับประกันการหาอนุพันธ์ได้ คือ ความต่อเนื่องของอนุพันธ์ย่อย อย่างไรก็ตาม หากฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด (x_0,y_0) และหาอนุพันธ์ย่อยได้ที่จุด (x_0,y_0) อาจจะไม่รับประกันการหาอนุพันธ์ได้

ตัวอย่างค้าน 1.5.8. ฟังก์ชัน

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และหาอนุพันธ์ย่อยได้ที่จุด $(0,0)$ แต่เป็นฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0)$ โดยใช้นิยาม (ซึ่งจะให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด)



ภาพที่ 1.32. พื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x,y)$ ในตัวอย่าง 1.5.8

และทำนองเดียวกัน หากฟังก์ชันที่กำหนดให้ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0,y_0) อนุพันธ์ย่อยก็ไม่จำเป็นที่จะต่อเนื่องที่จุด (x_0,y_0) เช่นกัน ดังตัวอย่างฟังก์ชันต่อไปนี้

ตัวอย่างค้าน 1.5.9. ฟังก์ชัน

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0)$ แต่อนุพันธ์ย่อย $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ (ซึ่งจะให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัดเช่นกัน)

จะเห็นว่าเงื่อนไขของความต่อเนื่องของฟังก์ชันในทฤษฎีบท 1.5.6 อาจแรงเกินไปที่ทำให้ฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น หากเราลดเงื่อนไขความต่อเนื่องของอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันจากเดิมที่อนุพันธ์ย่อยทั้งสองมีความต่อเนื่อง เป็น อนุพันธ์ย่อยตัวใดตัวหนึ่งมีความต่อเนื่อง ก็จะยังคงสรุปได้ว่า ฟังก์ชันนั้นหาอนุพันธ์ได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.5.10. ให้ (x_0,y_0) เป็นจุดในโดเมนของฟังก์ชันสองตัวแปร f ซึ่ง f_x มีความต่อเนื่องที่ (x_0,y_0) และ f_y มีค่าที่จุด (x_0,y_0) แล้ว f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0,y_0)

พิสูจน์. สมมติให้ข้อสมมติฐานของทฤษฎีบทเป็นจริง กล่าวคือ สมมติว่า f_x มีความต่อเนื่องที่ (x_0,y_0) และ f_y มีค่าที่จุด (x_0,y_0)

จากการที่ f_x มีความต่อเนื่องที่ (x_0,y_0) จะได้ว่า f_x มีค่าในย่านใกล้เคียงจุด $N(\mathbf{A};\delta)$ เมื่อ $\mathbf{A}=(x_0,y_0)$

ให้ $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ เป็นจุดในย่านใกล้เคียงจุด $N(\mathbf{A};\delta)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\ &= f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\end{aligned}$$

เนื่องจาก f_x มีค่าในย่านใกล้เคียงจุด $N(\mathbf{A};\delta)$ โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว จะได้ว่า

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)=\Delta x f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0,+\Delta y)$$

เมื่อ $0<\theta<1$ ซึ่งขึ้นอยู่กับค่า Δx และ Δy

เนื่องจาก f_x ต่อเนื่องที่จุด (x_0,y_0) ดังนั้น

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)=f_x(x_0,y_0)$$

ดังนั้น เราจะเขียนได้ว่า

$$f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)=f_x(x_0,y_0)+\phi(\Delta x,\Delta y)$$

โดยที่ $\phi(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ เมื่อ $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ ในทำนองเดียวกัน เนื่องจาก $f_y(x_0,y_0)$ มีค่า จึงได้ว่า

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=f_y(x_0,y_0)$$

นั่นคือ เราสามารถเขียนได้ในรูป

$$\frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f_y(x_0, y_0) + \psi(\Delta y)$$

โดยที่ $\psi(\Delta y) \to 0$ เมื่อ $\Delta y \to 0$

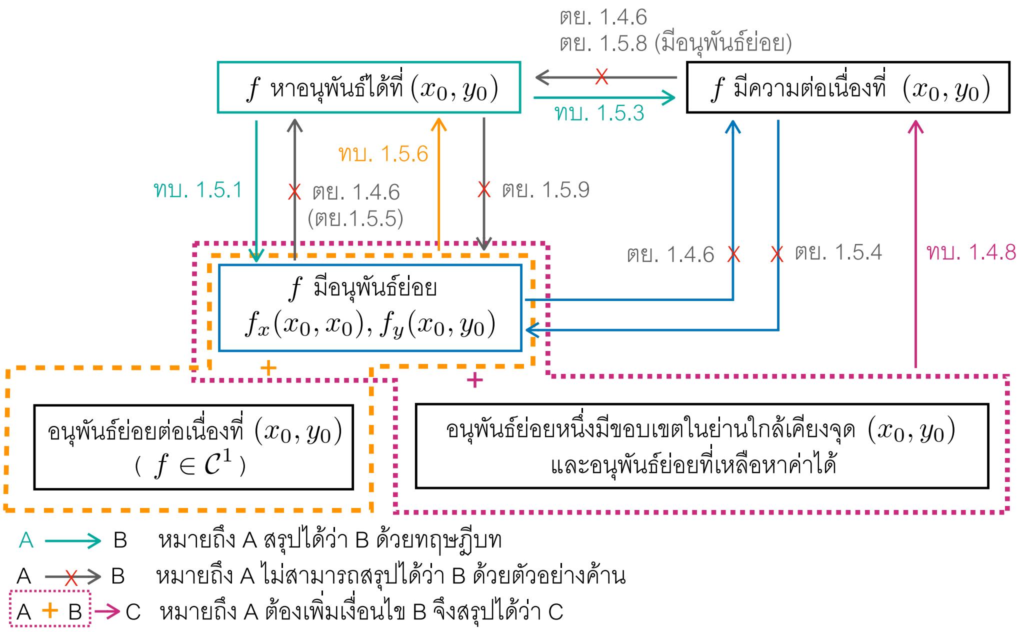
ดังนั้น เราจึงได้ว่า Δf สามารถเขียนได้เป็น

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \phi(\Delta x, \Delta y)\Delta x + +\psi(\Delta y)\Delta y$$

โดยที่ $\phi \to 0$ และ $\psi \to 0$ เมื่อ $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ นั่นคือ f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) ตามต้องการ $\square$

ในทางคณิตศาสตร์ ฟังก์ชันที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งมีความต่อเนื่อง จะเป็นฟังก์ชันในชั้น $\mathcal{C}^1$ (continuously differentiable) ซึ่งจากตัวอย่างและทฤษฎีบทที่ผ่านๆ มา จะเห็นว่า การที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งมีความต่อเนื่อง มีผลสำคัญสำหรับการหาอนุพันธ์ได้

จากทฤษฎีบท และตัวอย่างค้านที่กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปเป็นแผนผังของทฤษฎีบทได้ดังนี้



ภาพที่ 1.33. การสรุปตามทฤษฎีบทและตัวอย่างค้านเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ได้

หากพิจารณาในกรณีฟังก์ชันตัวแปรเดียวจะพบว่า ฟังก์ชัน $f(x) = |x|$ ซึ่งหาอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุด $x = 0$ มีจุดที่กราฟหักงอที่ $x = 0$ ในทำนองคล้ายกัน หากสังเกตลักษณะของพื้นผิวในตัวอย่างที่ผ่านๆ มา จะพบว่า ฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ มักมีพื้นผิวมักมีลักษณะไม่เรียบ เช่น มีการพับงอ ดังตัวอย่าง 1.5.4 หรือหากพิจารณาพื้นผิว และทำการวาดระนาบตัดกับพื้นผิวแล้ว พบว่ารอยตัดเป็นเส้นโค้งที่มีการหักงอ ดังตัวอย่าง 1.5.8

1.5.2 ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม

ในทฤษฎีบท 1.5.6 จะเห็นว่า ถ้าพื้นผิวของฟังก์ชัน f เรียบมากพอ (กล่าวคือ f_x และ f_y มีความต่อเนื่อง) จะทำให้เราสามารถหาระนาบที่สัมผัสพื้นผิวได้

สมมติให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) จะทำการสร้างฟังก์ชัน

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

เป็นฟังก์ชันใหม่ที่มีตัวแปรตามคือ ผลต่างเชิงอนุพันธ์ (differential) dz และตัวแปรต้นคือ dx และ dy ฟังก์ชันดังกล่าวนี้เรียกว่า **ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม** (total differential) ของ z ที่ (x_0, y_0)

พิจารณาส่วนเปลี่ยนแปลง

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \phi\Delta x + \psi\Delta y \tag{1.5.5}$$

จะเห็นว่า เราสามารถประมาณค่าของส่วนเปลี่ยนแปลงได้ โดยการพิจารณา

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

หากเราพิจารณาว่า Δf เล็กมากๆ เราสามารถเขียนได้ว่า $\Delta f \approx df$

หากพิจารณาฟังก์ชันตัวแปรเดียว จะพบว่า หากให้ $z = f(x, y) = x$ จะได้ว่า $dx = \Delta x$ และ $dy = \Delta y$ ดังนั้น การประมาณ Δf ที่สามารถทำได้โดยการประมาณด้วยส่วนเปลี่ยนแปลงของ Δx และ Δy สามารถประมาณค่าได้จากส่วนเปลี่ยนแปลง dx, dy นั่นคือ

$$\Delta f \approx df = dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

โดยความหมายคือ เราสามารถประมาณการเปลี่ยนแปลง Δz ได้โดยค่าผลต่างเชิงอนุพันธ์ dz โดยที่ dx คือการเปลี่ยนแปลงของ x และ dy คือการเปลี่ยนแปลงของ y และจะเห็นว่า หาก $\Delta x, \Delta y \to 0$ แล้ว ความคลาดเคลื่อน $\Delta z \approx dz$ ก็จะน้อยกว่าระยะ $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ระหว่างจุด (x_0, y_0) และ $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$

> **ตัวอย่าง 1.5.11.** กำหนดฟังก์ชัน $z = f(x, y) = xy^3$ จงประมาณการเปลี่ยนแปลงของ z จากจุด $(0.5, 1.0)$ ไปยัง $(0.501, 1.002)$

วิธีทำ. การเปลี่ยนแปลง z คือการหา dz ซึ่ง $dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$ กล่าวคือ

$$dz = y^3\,dx + 3xy^2\,dy$$

เราทราบว่า $dx = \Delta x = 0.501 - 0.5 = 0.001$ และ $dy = \Delta y = 1.002 - 1.0 = 0.002$ ดังนั้น dz ที่จุด $(0.5, 1.0)$ สามารถประมาณค่าได้จาก

$$dz = (1.0)^3(0.001) + 3(0.5)(1)^2(0.002) = 0.001 + 0.003 = 0.004$$

หากคำนวณค่าของฟังก์ชันนี้โดยตรง จะได้ $f(0.501, 1.002) = 0.504012$ ซึ่ง

$$\Delta z = f(0.501, 1.002) - f(0.5, 1.0) \approx 0.504012 - 0.5 = 0.004012$$

ซึ่งใกล้เคียงกับ dz ที่ทำการประมาณด้วยผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม

ตัวอย่าง 1.5.12. สมการ ของ แก๊ส ใน อุดมคติ สามารถ เขียน ความ สัมพันธ์ ระหว่าง ความ ดัน P, อุณหภูมิ T และ ปริมาตร V เมื่อ มวล คงที่ ได้ โดย สมการ $P = P(V,T) = kT/V$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่ สมมติว่าการทดลองเพื่อหาความดันของแก๊สที่บรรจุในภาชนะปิด นักเคมีวัดปริมาตรได้สองหน่วย และอุณหภูมิ 10 หน่วย ในการวัดปริมาตรและอุณหภูมิ มีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.01 หน่วย จงประมาณขอบเขตความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการคำนวณความดัน ในเทอมของค่าคงที่ k

วิธีทำ. จากความสัมพันธ์ เราต้องการหา dP จากความสัมพันธ์

$$dP = P_V(2,10)dV + P_T(2,10)dT$$

ซึ่งเราพบว่า ความคลาดเคลื่อน $dV = \pm 0.01$, $dT = \pm 0.01$ เราจะเห็นว่า

$$dP = (-kT/V^2)dV + (k/V)dT = k(-2.5dV + 0.5dT)$$

เพราะฉะนั้น ขอบเขตของความคลาดเคลื่อนของความดัน หาได้จาก

$$|dP| = |k(-2.5dV + 0.5dT)| \le k(2.5|dV| + 0.5|dT|) = 0.03k$$

ตามต้องการ

1.5.3 การประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่

สำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว หาก f หาอนุพันธ์ได้แล้ว ในการประมาณค่าของฟังก์ชัน f ที่จุด $x = x_0$ ถ้าเราเลือกจุดที่ใกล้เคียง $x = x_0$ เราจะสามารถประมาณค่าของฟังก์ชัน f ได้ด้วยจุดที่อยู่บนเส้นตรง $L(x)$ ที่สัมผัสกราฟ f ที่ $x = x_0$ นั่นคือทำการประมาณด้วย

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ในกรณีของฟังก์ชันสองตัวแปร เราพิจารณาส่วนเปลี่ยนแปลง Δf ซึ่ง

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

ถ้าให้ $x = x_0 + \Delta x$ และ $y = y_0 + \Delta y$ จะได้ว่า เราทำการประมาณ f ด้วย $L(x,y)$ ที่จุด (x_0, y_0) เรียกว่า การประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ (local linear approximation)

$$f(x,y) \approx L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

ซึ่งในการเขียนลักษณะนี้สื่อความหมายได้ว่า ถ้าฟังก์ชัน $f(x,y)$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) แล้ว $L(x,y)$ คือระนาบสัมผัสพื้นผิว f ที่ไม่เป็นระนาบแนวตั้ง ที่จุด $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

ตัวอย่าง 1.5.13. ให้ $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ จง ทำการ ประมาณ ค่า ของ $f(5.01, 12.02)$ โดยใช้การประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ที่จุด $(5,12)$

วิธีทำ. จากความสัมพันธ์

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

จะเห็นว่า

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, f_y(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

โดยที่ $f_x(5, 12) = 5/13$, $f_y(5, 12) = 12/13$ ดังนั้น การประมาณเชิงเส้น $L(x, y)$ หาได้จาก

$$L(x, y) = 13 + \frac{5}{13}(x - 5) + \frac{12}{13}(y - 12)$$

เพราะฉะนั้น ที่จุด $(5.01, 12.02)$ จะประมาณได้ว่า

$$L(5.01, 12.02) = 13 + \frac{5}{13}(5.01 - 5) + \frac{12}{13}(12.02 - 12) = 13.0226$$

ซึ่งค่าจากการคำนวณโดยตรงคือ

$$f(5.01, 12.02) = \sqrt{(5.01)^2 + (12.02)^2} = 13.0223$$

ซึ่งมีขอบเขตความคลาดเคลื่อนไม่เกิน $|f(5.01, 12.02) - L(5.01, 12.02)| = 0.0003$

เราสามารถขยายแนวคิดการหาอนุพันธ์ได้ และผลต่างเชิงอนุพันธ์รวมไปสู่กรณีที่ฟังก์ชันมีมากกว่าสองแปรได้

สมมติให้ $\mathbf{P} = (x_1, ..., x_n)$ และ $w = f(x_1, ..., x_n)$ จะนิยามส่วนเปลี่ยนแปลง

$$\Delta f(\mathbf{P}) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, ..., x_n)$$

โดย f จะหาอนุพันธ์ได้ ถ้าสามารถเขียน $\Delta f(\mathbf{P})$ ในรูป

$$\Delta f(\mathbf{P}) = f_{x_1}(\mathbf{P})\Delta x_1 + ... + f_{x_n}(\mathbf{P})\Delta x_n + \phi_1 \Delta x_1 + ... + \phi_n \Delta x_n$$

โดยที่ $\phi_1, ..., \phi_n \to 0$ เมื่อ $(\Delta x_1, ..., \Delta x_n) \to (0, ..., 0)$ โดยที่ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม df เขียนได้โดย

$$df = f_{x_1}(\mathbf{P})dx_1 + ... + f_{x_n}(\mathbf{P})dx_n$$

แบบฝึกหัดที่ 1.5

1. กำหนดฟังก์ชัน $z = f(x,y) = 2x^2y - 4y$
   (a) จงหาส่วนเปลี่ยนแปลง Δf
   (b) จงแสดงว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(4,3)$
   (c) จงหา dz เมื่อ $x = 4, y = 3, \Delta x = -0.01, \Delta y = 0.02$
2. จงใช้นิยามของการหาอนุพันธ์ได้ แสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้หาอนุพันธ์ได้ ณ จุดที่กำหนดให้
   (a) $f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cx^2$ ทุกจุดใน $\mathbb{R}^2$ เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงที่
   (b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ ที่จุด $(x,y,z) = (0,0,0)$
3. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^2)^\alpha} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   (a) เมื่อ $\alpha = 1$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0)$
   (b) เมื่อ $\alpha < 3/2$ หาอนุพันธ์ได้ทุกจุดใน $\mathbb{R}^2$
4. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน
$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^2yz}{x^2+y^2+z^2} & ,(x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & ,(x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$
   หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0,0)$
5. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $f(x,y) = |x| + |y|$ ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ แต่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0)$
6. ในตัวอย่างที่ 1.3.8 เราได้แสดงว่า ฟังก์ชัน
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ จงแสดงว่า f ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ $(0,0)$
7. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   มีอนุพันธ์ย่อยที่ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$
   (คำใบ้: ใช้ทฤษฎีบท 1.5.3 และทฤษฎีบท 1.5.10 ช่วยในการพิจารณา)

8. สมมติให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0,y_0) และ $z_0 = f(x_0,y_0)$ จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $g(x,y,z) = z - f(x,y)$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0,y_0,z_0)

9. จงพิจารณาว่า ฟังก์ชัน

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ หรือไม่
   (b) สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0)$ หรือไม่

10. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน

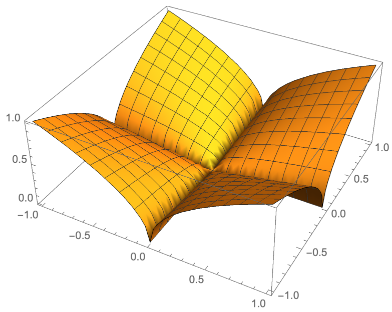
$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0)$ แต่อนุพันธ์ย่อย $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

11. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และหาอนุพันธ์ย่อยได้ที่จุด $(0,0)$ แต่เป็นฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0)$ โดยใช้นิยามการหาอนุพันธ์ได้



ภาพที่ 1.34. พื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$

12. ในแบบฝึกหัด 1.4 ข้อ 10 ผู้อ่านได้แสดงว่า เมื่อกำหนด $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ แล้ว $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ มีค่า
   จงแสดงว่า f ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(0,0)$

13. จงหาผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม เมื่อกำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้
   (a) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{6}$
   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$

14. จงประมาณค่า $f(x,y) = \ln(xy)$ ที่จุด $(1,2)$ โดยเลือกจุดที่เหมาะสมในการประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่

15. จงใช้การประมาณเชิงเส้นเฉพาะที่ แสดงว่า $f(x,y) = x^\alpha y^\beta$ ที่จุด $(1,1)$ สามารถประมาณได้โดย

$$x^\alpha y^\beta \approx 1 + \alpha(x-1) + \beta(y-1)$$

16. กรวยกลมอันหนึ่ง เมื่อทำการวัดรัศมีและความสูง พบว่า มีความคลาดเคลื่อนจากการวัดอย่างมาก 2% และ 4% ตามลำดับ จงใช้ผลต่างเชิงอนุพันธ์ทำการประมาณเปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนสูงสุดของปริมาตรที่ได้จากการคำนวณ

17. คาบ T ของการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมเมื่อมีการสั่นน้อยมาก คำนวณได้จาก $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ เมื่อ L คือความยาวของเพนดูลัม g คือค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง สมมติว่าในการวัดค่า L และ g พบว่า มีความคลาดเคลื่อนอย่างมาก 0.5% และ 0.1% ตามลำดับ จงใช้ผลต่างเชิงอนุพันธ์ทำการประมาณเปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนสูงสุดของคาบที่ได้จากการคำนวณ

18. กล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากใบหนึ่ง วัดความกว้าง ยาว และสูงได้ความคลาดเคลื่อนสูงสุดไม่เกิน 5% จงใช้ผลต่างเชิงอนุพันธ์ทำการประมาณเปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อนสูงสุดของพื้นที่ผิวของกล่องที่ได้จากการคำนวณ

1.6 ฟังก์ชันเอกพันธุ์

ในการศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชัน เรามักให้ความสนใจกับปัญหาการเป็นเชิงเส้น ซึ่งเป็นปัญหาที่เป็นพื้นฐานในพีชคณิตเชิงเส้น กล่าวคือ สำหรับเวกเตอร์ $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n), \mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ จะเป็นการส่งเชิงเส้น (linear map) f ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไข $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ สำหรับทุก $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ และ $f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ ทุก $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ และค่าคงตัว c

เราจะพิจารณาพฤติกรรมอื่น ๆ นอกจากการเป็นเชิงเส้น สมมติว่าสำหรับแต่ละส่วนประกอบ x_i ของ $\mathbf{x}$ มีตัวแปรเสริม λ คูณอยู่ ซึ่งมีความหมายคือ แต่ละส่วนประกอบถูกย่อหรือขยายด้วยตัวคูณ (factor) ซึ่งสมมติว่าเป็นตัวแปรเสริม λ เราจึงต้องการพิจารณาพฤติกรรมของการย่อขยาย (scaling) ของฟังก์ชันที่ตัวแปรต้นถูกย่อขยายด้วย กล่าวคือ หากแต่ละตัวแปร x_i ถูกคูณด้วยตัวแปรเสริมแล้ว ค่าของฟังก์ชันจะมีค่าเป็นกำลังบางค่าของตัวแปรเสริมตัวนั้น เราจะนิยามพฤติกรรมดังกล่าว ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.6.1. ให้ f เป็นฟังก์ชัน n ตัวแปร ซึ่ง $f = f(x_1, ..., x_n)$ จะเรียกว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น m (homogeneous function of degree m) ถ้า

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, ..., x_n)$$

สำหรับตัวแปรเสริม $\lambda \in \mathbb{R}$ และ m เป็นค่าคงตัวใดๆ

ตัวอย่าง 1.6.1.

1. $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - 2z^2$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 2 เนื่องจากสำหรับตัวแปรเสริม λ

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^2 - (\lambda y)^2 - 2(\lambda z)^2 \\ &= \lambda^2(x^2 - y^2 - 2z^2) \\ &= \lambda^2 f(x,y) \end{aligned}$$

2. $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}\cos^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 1

3. $f(x,y) = \dfrac{2x^2}{y^2}\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 0

4. $f(x,y,z) = \sqrt{\dfrac{z}{x^2 + 2y^2}}$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น $-1/2$

ตัวอย่าง 1.6.2. ในทางเศรษฐศาสตร์ ฟังก์ชัน Cobb-Douglas นิยามโดยค่าเฉลี่ยเรขาคณิตถ่วงน้ำหนัก ซึ่งมีโดเมนเป็น $\mathbb{R}_+^n$ เมื่อ $\mathbb{R}_+$ เป็นเซตของจำนวนจริงบวก คือ

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$$

เมื่อ $\alpha_i > 0$ สำหรับทุก i จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ที่มีระดับขั้น $\alpha_1 + ... + \alpha_n$

ในบางบริบท เราต้องการหาผลคูณระหว่างตัวแปรและอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งเมื่อเทียบกับตัวแปรนั้น เมื่อฟังก์ชันบางฟังก์ชันมีความซับซ้อน จะเห็นว่า การหาอนุพันธ์ย่อยโดยตรงอาจทำได้ไม่ง่ายนัก ทฤษฎีบทต่อไปนี้จึงจะช่วยให้เราสามารถคำนวณค่าดังกล่าวได้ง่ายขึ้น หากฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น m

ทฤษฎีบท 1.6.3. (ทฤษฎีบทออยเลอร์สำหรับฟังก์ชันเอกพันธุ์)
ถ้า $f(x_1, ..., x_n)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น m ที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งเทียบกับ $x_1, ..., x_n$ หาค่าได้แล้ว

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = mf(x_1, ..., x_n)$$

พิสูจน์. ให้ f เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น m ดังนั้น สำหรับตัวแปรเสริม λ

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, ..., x_n) \tag{1.6.1}$$

สมมติให้ $y_i = \lambda x_i$ สำหรับทุก $i = 1, ..., n$ นั่นคือ

$$f(y_1, y_2, ..., y_n) = \lambda^m f(x_1, ..., x_n) \tag{1.6.2}$$

ทำการหาอนุพันธ์เทียบกับ λ ทั้งสมการ (1.6.2) โดยอาศัยกฎลูกโซ่ของฟังก์ชันหลายตัวแปร จะได้ว่า

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial \lambda} + ... + \frac{\partial f}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial \lambda} = m\lambda^{m-1} f(x_1, ..., x_n) \tag{1.6.3}$$

เนื่องจาก $\frac{\partial y_i}{\partial \lambda} = x_i$ และ $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_i}$ สำหรับทุก i ได้ว่า $\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial x_i}$
เพราะฉะนั้น จากสมการ (1.6.3) จึงได้ว่า

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = m\lambda^m f(x_1, ..., x_n)$$

ให้ $\lambda = 1$ จึงได้ว่า

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = mf(x_1, ..., x_n)$$

ตามต้องการ $\square$

ตัวอย่าง 1.6.4. ให้ $f(x,y) = x^2 \cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$
ฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์หรือไม่ นอกจากนี้ จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันดังกล่าวสอดคล้องกับทฤษฎีบทออยเลอร์

วิธีทำ. ให้ λ เป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^2 \cos\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right) \\ &= \lambda^2 x^2 \cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= \lambda^2 f(x,y) \end{aligned}$$

ต่อไปจะแสดงว่า ฟังก์ชันดังกล่าวสอดคล้องกับทฤษฎีบทออยเลอร์ จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{x^2}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + 2x\cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x^3}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} &= x\left[-\frac{x^2}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + 2x\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right] + y\left[\frac{x^3}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right] \\ &= 2x^2\cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= 2f(x,y) \end{aligned}$$

นั่นคือ f สอดคล้องกับทฤษฎีบทออยเลอร์สำหรับฟังก์ชันเอกพันธุ์

แบบฝึกหัดที่ 1.6

1. กำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ และแสดงว่า f สอดคล้องกับทฤษฎีบทออยเลอร์สำหรับฟังก์ชันเอกพันธุ์

   (a) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}\cos^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

   (b) $f(x,y,z) = x^2y + xy^2 - 2xyz$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y}}{y}$

2. ให้ $p(x,y)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามสองตัวแปรที่แต่ละพจน์มีดีกรีรวมเท่ากับ n จงแสดงว่า ฟังก์ชันพหุนามดังกล่าวเป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ พร้อมทั้งหาระดับขั้นด้วย

3. ให้ $f(x,y) = x_1 + x_2^2$ โดยที่ $x_1, x_2 \geq 0$ จงแสดงว่า ไม่มีจำนวนจริง k ที่ทำให้ $f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^k f(x_1,x_2)$ สำหรับจำนวนจริง λ ใดๆ

   (คำใบ้ : พิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง)

4. กำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้ จงแสดงว่า f เป็นไม่ฟังก์ชันเอกพันธุ์ พร้อมให้เหตุผลประกอบ

(a) $f(x,y,z) = x^3 + x^2y^2 - 2xyz^2$

(b) $f(x,y) = e^{x^2/(3y^2+x^2)}$

(c) $f(x,y) = \ln(xy)$

5. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

> **ทฤษฎีบท** 1.6.5. ถ้า f เป็นฟังก์ชัน n ตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้ และเป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น k แล้ว อนุพันธ์ย่อย f_{x_i} เมื่อ $i = 1, ..., n$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น $k-1$

6. ให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น m และ $g(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น n จงแสดงว่า

(a) $f(x,y)g(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น $m+n$

(b) $f(x,y)/g(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น $m-n$

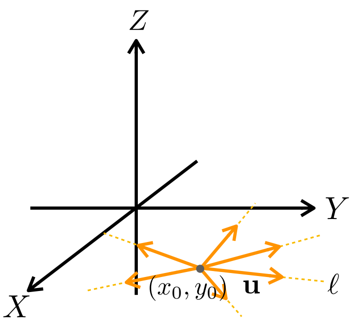
7. กำหนดฟังก์ชัน $f(x,y) = x^4y^3\sin^{-1}(y^2/x^2)$ จงแสดงว่า

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 7f(x,y)$$

8. ให้ $w = \left(\dfrac{x-y+z}{x+y+z}\right)^n$ จงแสดงว่า

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

1.7 อนุพันธ์ระบุทิศทาง



ภาพที่ 1.35. ทิศทางของเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ และเส้นตรง ℓ

ในเรื่องอนุพันธ์ย่อย เราได้ทำการศึกษาการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันภายใต้ตัวแปรต้นตัวหนึ่ง เมื่อกำหนดให้ตัวแปรต้นตัวอื่น ๆ คงที่ ในการศึกษาอนุพันธ์ย่อยดังกล่าว สำหรับกรณีฟังก์ชันสองตัวแปร เรากำหนดทิศทางมาตรฐาน คือทิศทางที่ขนานกับแกน X หรือแกน Y

หากเราต้องการศึกษาอนุพันธ์ตามทิศทางที่ต้องการ เราจะต้องกำหนดทิศทางขึ้นมาก่อน ซึ่งเราสามารถใช้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในการกำหนดทิศทางได้ ดังภาพ 1.35

สมมติให้จุด (x_0, y_0) เป็นจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ เมื่อ $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแกน X และ Y ตามลำดับ เนื่องจากเวกเตอร์สามารถกำหนดเส้นตรงในปริภูมิได้ เราจึงพิจารณาสมการอิงตัวแปรเสริม เมื่อ s เป็นตัวแปรเสริมได้ในรูป

$$x = x_0 + su_1, \qquad y = y_0 + su_2$$

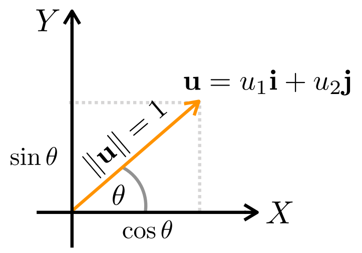
หาก $\mathbf{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย จะเห็นว่า s จะเป็นความยาวของเส้นโค้งซึ่งมีจุดเริ่มต้นอยู่ที่ (x_0, y_0) และมีทิศทางไปตามทิศที่เป็นบวกของ $\mathbf{u}$ ดังนั้น ถ้าให้ $s = 0$ จุด (x,y) คือจุดอ้างอิง (x_0, y_0) และเมื่อ s เพิ่มขึ้น จุด (x,y) ก็จะเคลื่อนที่ไปบนเส้นตรง ℓ ตามทิศทางของ $\mathbf{u}$ ดังนั้น หากพิจารณาค่าของฟังก์ชัน $z = f(x_0 + su_1, y_0 + su_2)$ บนพื้นผิวที่วิ่งไปตามเส้นโค้ง ℓ บนเวกเตอร์อ้างอิง $\mathbf{u}$ อนุพันธ์ของ dz/ds เมื่อ $s = 0$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลง ณ ขณะใดขณะหนึ่งของ $f(x,y)$ ตามระยะทางที่วัดจาก (x_0, y_0) ไปยัง (x,y) ในทิศทางของ $\mathbf{u}$ เราจึงจะกล่าวถึงนิยามของอนุพันธ์ระบุทิศทางได้ดังนี้

บทนิยาม 1.7.1. ให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของ x,y และ $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย **อนุพันธ์ระบุทิศทาง** (directional derivative) ของ f ตามทิศทางของ $\mathbf{u}$ ที่จุด (x_0,y_0) เขียนแทนด้วย $D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)$ นิยามโดย

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0) &= \lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1,y_0+su_2)-f(x_0,y_0)}{s} \qquad (1.7.1)\\ &= \frac{d}{ds}[f(x_0+su_1,y_0+su_2)]_{s=0} \end{aligned}$$

ถ้าลิมิตมีค่า

จากนิยามดังกล่าว จะเห็นว่า หากเวกเตอร์ $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งทำมุม θ กับแกน X ดังภาพ 1.36 จะได้ว่า



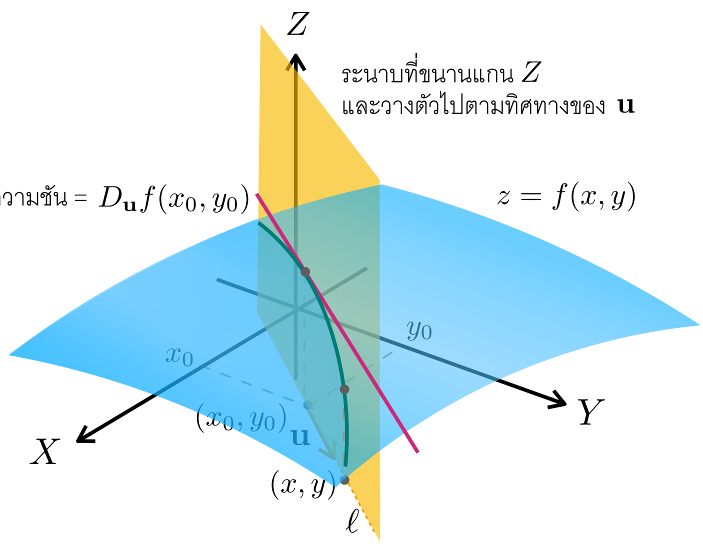
ภาพที่ 1.36. เวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ในรูปของมุม

$$u_1=\cos\theta, \qquad u_2=\sin\theta$$

นั่นคือ สมการ (1.7.1) สามารถเขียนได้ในรูปของมุมที่ทำกับแกน x ได้โดย

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)=\lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+s\cos\theta,y_0+s\sin\theta)-f(x_0,y_0)}{s}$$

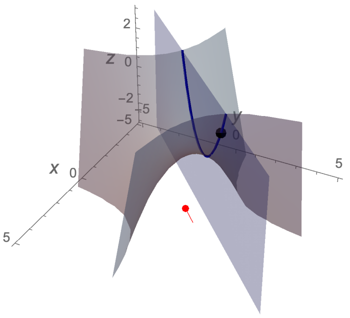
เราจึงพิจารณาความหมายทางเรขาคณิตได้ดังภาพ 1.37 กล่าวคือ ความหมายของอนุพันธ์ระบุทิศทาง $D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)$ คือความชันของพื้นผิว $z=f(x,y)$ ในทิศทางของ $\mathbf{u}$ ที่จุด $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ นั่นเอง ดังนั้น สำหรับจุด $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ ที่ตรึงไว้ อาจมีความชันได้มากมายขึ้นอยู่กับทิศทางของ $\mathbf{u}$ ที่กำหนดไว้ ดังนั้น อนุพันธ์ระบุทิศทางที่จุด (x_0,y_0) จึงมีความหมายคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใดขณะหนึ่งของ $f(x,y)$ ขึ้นกับระยะทางในทิศทางของ $\mathbf{u}$ ที่จุด (x_0,y_0)



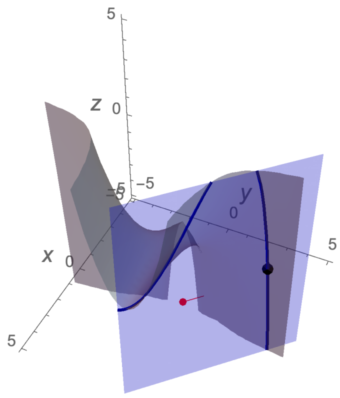
ภาพที่ 1.37. อนุพันธ์ระบุทิศทางในทางเรขาคณิต

หมายเหตุ. สังเกตว่าจากนิยาม (1.7.1)

- ถ้าเลือก $\mathbf{u}=\mathbf{i}$ ($\theta=0$) จะได้ว่า $D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)$ คือ $f_x(x_0,y_0)$



ภาพ ที่ 1.38. พื้น ผิว ของ ฟังก์ชัน และ อนุพันธ์ระบุทิศทางของ $f(x,y) = xy$ ที่ จุด $(1,2)$ เมื่อกำหนด $\mathbf{u}$ ทำมุม $\pi/4$ กับ แกน X



ภาพ ที่ 1.39. พื้น ผิว ของ ฟังก์ชัน และ อนุพันธ์ ระบุ ทิศทาง ของ $f(x,y) = y^2 \ln x$ ที่จุด $(1,2)$ เมื่อกำหนด $\mathbf{u}$ ทำมุม $\pi/4$ กับแกน X

- ถ้าเลือก $\mathbf{u} = \mathbf{j}$ $(\theta = \pi/2)$ จะได้ว่า $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ คือ $f_y(x_0, y_0)$

ตัวอย่าง 1.7.1. จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน $f(x,y) = xy$ เมื่อเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ทำมุมกับแกน X ด้วยมุม $\theta = \pi/4$ ที่จุด $(1,2)$ โดยใช้นิยาม

วิธีทำ. จากนิยามของอนุพันธ์ระบุทิศทาง จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}} f(1,2) &= \lim_{s\to 0} \frac{f(1 + s\cos(\frac{\pi}{4}), 2 + s\sin(\frac{\pi}{4})) - f(1,2)}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{f(1 + s\frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + s\frac{\sqrt{2}}{2}) - f(1,2)}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{(1 + s\frac{\sqrt{2}}{2})(2 + s\frac{\sqrt{2}}{2}) - 2}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{2 + 3s\frac{\sqrt{2}}{2} + s^2\frac{1}{2}) - 2)}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \left(3\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{s}{2}\right) \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

ซึ่งมีความหมายคือ หากเราเคลื่อนที่จากจุด $(1,2)$ ไปยังจุด (x,y) ด้วยทิศทาง $\mathbf{u}$ แล้ว ค่าของฟังก์ชัน $f(x,y) = xy$ จะเพิ่มขึ้น $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ เท่าของระยะที่เคลื่อนที่ไป

ตัวอย่าง 1.7.2. จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน $f(x,y) = y^2 \ln(x)$ เมื่อกำหนดเวกเตอร์ $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ที่จุด $(1,4)$ โดยใช้นิยาม

วิธีทำ. เนื่องจากเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ที่กำหนดให้ยังไม่เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ดังนั้นเราจึงทำเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ให้เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยก่อน โดยขนาดของเวกเตอร์คือ $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ หน่วย ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยนี้คือ

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

ดังนั้น โดยการหาอนุพันธ์จากนิยาม จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}} f(1,2) &= \frac{d}{ds}\left[f(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}, 4 + \frac{s}{\sqrt{2}})\right]_{s=0} \\
&= \left.\frac{\left(4 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2}{1 - \frac{s}{\sqrt{2}}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{2}{\sqrt{2}}\left(4 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right|_{s=0} \\
&= -8\sqrt{2}
\end{aligned}$$

นั่นคือ หากเราเคลื่อนที่จากจุด $(1,4)$ ตามทิศทาง $\mathbf{u}$ แล้ว ค่าของฟังก์ชัน $f(x,y) = y^2\ln(x)$ จะลดลง $-8\sqrt{2}$ เท่าของระยะที่เคลื่อนที่ไป

ในกรณีที่ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร เราจะสามารถนิยามอนุพันธ์ระบุทิศทางได้ในทำนองเดียวกัน ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.7.2. ให้ f เป็นฟังก์ชันของ x, y, z และ $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย อนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ตามทิศทางของ $\mathbf{u}$ ที่จุด (x_0, y_0, z_0) เขียนแทนด้วย $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0)$ นิยามโดย

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2, z_0 + su_3) - f(x_0, y_0, z_0)}{s} \\ &= \frac{d}{ds}[f(x_0 + su_1, y_0 + su_2, z_0 + su_3)]_{s=0} \end{aligned}$$

ถ้าลิมิตมีค่า

จะเห็นว่า เวกเตอร์ $\mathbf{u}$ สามารถเขียนได้ในอีกรูปแบบหนึ่งโดยใช้โคไซน์แสดงทิศทาง (directional cosine) กล่าวคือ ในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร สมมติให้ $\mathbf{u}$ ทำมุมกับแกน X, Y ด้วยมุม α, β ตามลำดับแล้ว จะได้ว่า

$$\mathbf{u} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\beta)\mathbf{j}$$

และในทำนองเดียวกัน ถ้า f เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร โดยที่ $\mathbf{u}$ ทำมุมกับแกน X, Y, Z ด้วยมุม α, β, γ ตามลำดับแล้ว จะได้ว่า

$$\mathbf{u} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\beta)\mathbf{j} + (\cos\gamma)\mathbf{k}$$

ดังนั้น เราจึงสามารถพิจารณาอนุพันธ์ระบุทิศทางได้โดยง่าย

จากนิยามของอนุพันธ์ระบุทิศทาง การหาอนุพันธ์ระบุทิศทางโดยใช้นิยามมีความยุ่งยาก ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยให้เราคำนวณอนุพันธ์ระบุทิศทางได้สะดวกขึ้น

ทฤษฎีบท 1.7.3. ให้ $f = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) และถ้า $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยแล้ว อนุพันธ์ระบุทิศทาง $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ มีค่าและกำหนดโดย

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$$

พิสูจน์. จากนิยามของอนุพันธ์ระบุทิศทาง ได้ว่า

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \frac{d}{ds}[f(x_0 + su_1, y_0 + su_2)]_{s=0}$$

ให้ $g(s) = f(x_0+su_1, y_0+su_2)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่เกิดจากการประกอบกันระหว่าง $z = f(x, y)$ กับ $x(s) = x_0 + su_1$ และ $y(s) = y_0 + su_2$
ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน g เทียบกับ s สามารถหาได้โดยใช้กฎลูกโซ่ นั่นคือ

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 \end{aligned}$$

และเนื่องจาก $g'(0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$ จึงสรุปได้ดังต้องการ $\square$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า f เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร เราสามารถขยายแนวคิดได้โดยง่าย กล่าวคือ

ทฤษฎีบท 1.7.4. ให้ $f = f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0, z_0) และถ้า $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยแล้ว อนุพันธ์ระบุทิศทาง $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0)$ มีค่า และกำหนดโดย

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)u_1 + f_y(x_0, y_0, z_0)u_2 + f_z(x_0, y_0, z_0)u_3$$

ในเวกเตอร์แคลคูลัส สำหรับฟังก์ชัน f **เกรเดียนต์** (gradient) ของ f นิยามโดย

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

ซึ่งเราสามารถพิจารณาได้ในรูปตัวดำเนินการเดล ∇ โดย $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}$

สำหรับฟังก์ชันสามตัวแปรก็จะนิยามได้ในทำนองคล้ายกัน คือ

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 1.7.3 และ 1.7.4 อนุพันธ์ระบุทิศทางที่ (x_0, y_0, z_0) สามารถพิจารณาได้จากผลคูณจุด (dot product) ระหว่างเวกเตอร์ $\nabla f(x_0, y_0)$ และทิศทางของเวกเตอร์ $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ กล่าวคือ

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}$$

และในทำนองเดียวกัน สำหรับฟังก์ชันสามตัวแปร หากกำหนดให้ $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ แล้ว

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{u}$$

เราจะมาพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.7.5. (ตัวอย่างเดียวกันกับตัวอย่าง 1.7.1) จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน $f(x, y) = xy$ เมื่อเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ทำมุมกับแกน X ด้วยมุม $\theta = \pi/4$ ที่จุด $(1, 2)$ โดยใช้ทฤษฎีบท 1.7.3

วิธีทำ. จากข้อมูลที่กำหนดให้ จะได้เวกเตอร์ $\mathbf{u} = \cos(\frac{\pi}{4})\mathbf{i} + \sin(\frac{\pi}{4})\mathbf{j}$
นั่นคือ $\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2})\mathbf{i} + (\frac{\sqrt{2}}{2})\mathbf{j}$ และจะเห็นว่า

$$\nabla f(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

นั่นคือ $\nabla f(1, 2) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u} \\ &= 2(\frac{\sqrt{2}}{2}) + 1(\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

ซึ่งคำตอบตรงกันกับตัวอย่าง 1.7.1

สมบัติของเกรเดียนต์ที่น่าสนใจ

จากความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์ระบุทิศทางและเกรเดียนต์ ดังปรากฏในทฤษฎีบท 1.7.3 จะเห็นว่า

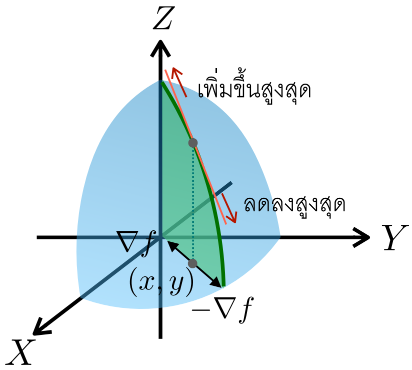
$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}$$

เนื่องจาก $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ อยู่ในรูปผลคูณจุด เราสามารถพิจารณาได้อีกนัยหนึ่งคือ

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\|\|\mathbf{u}\| \cos\theta = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos\theta \qquad (1.7.2)$$

ดังนั้น สมการ (1.7.2) จะมีค่ามากที่สุด หากมุม θ มีค่าเท่ากับ 0 และค่าอนุพันธ์ระบุทิศทางที่มากที่สุดที่จุด (x_0, y_0) คือ $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ นั่นหมายความว่า ที่จุด (x_0, y_0) พื้นผิว $z = f(x, y)$ มีค่าความชันมากที่สุดในทิศทางของเกรเดียนต์ และความชันที่มากที่สุดคือ $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาทิศทางตรงกันข้าม จะพบว่า ค่า $D_{\mathbf{u}}f$ ที่น้อยที่สุดที่จุด (x_0, y_0) คือ $-\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ ซึ่งเกิดในทิศทางตรงข้ามของ $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ ดังภาพ 1.40 ดังนั้น เราจึงสรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้



ภาพที่ 1.40. การเพิ่มขึ้นหรือลดลงสูงสุดตามทิศทางของ ∇f

ทฤษฎีบท 1.7.6. ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรหรือสามตัวแปร และ P เป็นจุด $P(x_0, y_0)$ หรือ $P(x_0, y_0, z_0)$ ในสองมิติหรือสามมิติตามลำดับ สมมติว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่ P แล้ว

1. ถ้า $\nabla f = \mathbf{0}$ แล้ว อนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่ P ทั้งหมดมีค่าเท่ากับศูนย์
2. ถ้า $\nabla f \neq \mathbf{0}$ แล้ว สำหรับอนุพันธ์ระบุทิศทางทั้งหมดที่เป็นไปได้ของ f ที่ P จะได้ว่า อนุพันธ์ตามทิศทาง ∇f ที่จุด P จะมีค่ามากที่สุด และค่าที่มากที่สุดนั้นคือ $\|\nabla f\|$ ที่ P
3. ถ้า $\nabla f \neq \mathbf{0}$ แล้ว สำหรับอนุพันธ์ระบุทิศทางทั้งหมดที่เป็นไปได้ของ f ที่ P จะได้ว่า อนุพันธ์ตามทิศทางตรงกันข้ามกับ ∇f ที่จุด P จะมีค่าน้อยที่สุด และค่าที่น้อยที่สุดนั้นคือ $-\|\nabla f\|$ ที่ P

ตัวอย่าง 1.7.7. ให้ $f(x, y) = e^x y^3$ จงหาค่าสูงสุดของอนุพันธ์ระบุทิศทางที่ $(0, -2)$ และหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางที่ค่ามากที่สุด

วิธีทำ. จากทฤษฎีบท 1.7.6 ทิศทางที่เพิ่มขึ้นสูงสุดคือทิศของ ∇f นั่นคือ

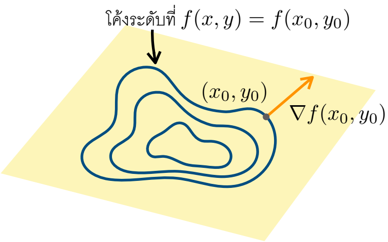
$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} = e^x y^3 \mathbf{i} + 3e^x y^2 \mathbf{j}$$

ดังนั้น เวกเตอร์ในทิศทางที่เพิ่มขึ้นสูงที่สุดที่จุด $(0, -2)$ คือ $\nabla f(0, -2) = -8\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ เพราะฉะนั้น ขนาดสูงสุดของอนุพันธ์ระบุทิศทางที่จุด $(0, -2)$ หาได้จาก

$$\|\nabla f(0, -2)\| = \sqrt{(-8)^2 + (12)^2} = 4\sqrt{13}$$

และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยนั้นคือ

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f(0, -2)}{\|\nabla f(0, -2)\|} = \frac{1}{4\sqrt{13}}(-8\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) = -\frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$$



ภาพที่ 1.41. เกรเดียนต์ $\nabla f(x_0,y_0)$ ซึ่งตั้งฉากกับโค้งระดับ $f(x,y)=f(x_0,y_0)$ ที่จุด (x_0,y_0)

จะเห็นว่า เมื่อพิจารณาพื้นผิว $z=f(x,y)$ แล้วทำการพิจารณาโค้งระดับ เมื่อให้ z เป็นค่าคงที่ กล่าวคือ สมมติว่าโค้งระดับกำหนดได้โดยสมการอิงตัวแปรเสริม $\mathbf{r}=g(t)\mathbf{i}+h(t)\mathbf{j}$ ดังนั้น โค้งระดับจะเขียนได้ในรูป $f(g(t),h(t))=c$ จะเห็นว่า เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจะมีทิศทางที่ตั้งฉากกับโค้งระดับตามภาพ 1.41 ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.7.8. ให้ $f=f(x,y)$ หาอนุพันธ์ได้ทุก (x_0,y_0) ในโดเมน D ของ f จะได้ว่า เกรเดียนต์ $\nabla f(x_0,y_0)$ ที่จุด (x_0,y_0) จะตั้งฉากกับโค้งระดับของ f ที่จุด (x_0,y_0)

พิสูจน์. สมมติว่า โค้งระดับเขียนได้ในสมการอิงตัวแปรเสริม $f(g(t),h(t))=c$ ของตัวแปร t

ทำการหาอนุพันธ์เทียบกับ t ทั้งสองข้าง จะได้ว่า

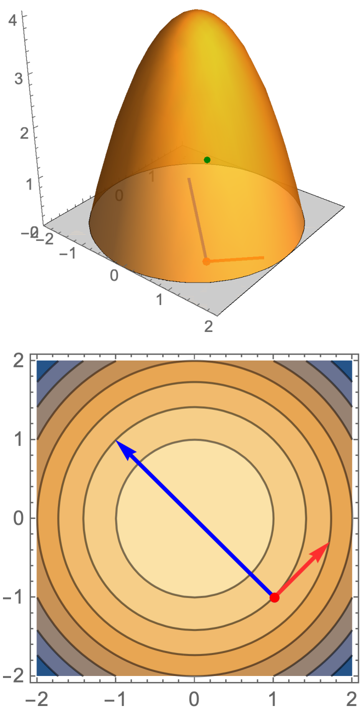
$$\frac{d}{dt}f(g(t),h(t))=\frac{d}{dt}(c)$$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt}&=0\\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\right)\cdot\left(\frac{dg}{dt}\mathbf{i}+\frac{dh}{dt}\mathbf{j}\right)&=0\end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นว่า $\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$ และ $\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{dg}{dt}\mathbf{i}+\frac{dh}{dt}\mathbf{j}$
นั่นคือ ∇f จะตั้งฉากกับเวกเตอร์สัมผัสของ $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ซึ่งมีความหมายว่า ∇f ตั้งฉากกับโค้งระดับของ f ที่ (x_0,y_0) □

จะเห็นว่า ถ้า (x_0,y_0) เป็นจุดบนเส้นโค้งระดับ $f(x,y)=c$ แล้ว ความชันของพื้นผิว $z=f(x,y)$ ที่จุดนั้น ในทิศทางของ $\mathbf{u}$ จะหาได้โดย $D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\mathbf{u}$



ภาพ ที่ 1.42. (บน) พื้น ผิว ของ f ใน ตัวอย่าง 1.7.9
(ล่าง) เส้นโค้งระดับของ f และเกรเดียนต์ของ f ที่จุด $(1,-1)$

ตัวอย่าง 1.7.9. ให้ f เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิของแผ่นโลหะแผ่นหนึ่งที่จุด (x,y) กำหนดโดย $f(x,y)=-x^2-y^2+4$

1. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ ที่จุด $(1,-1)$ เมื่อ $\mathbf{u}$ ทำมุม $\pi/3$ กับแกน X

2. จงหาขนาดและทิศทางของอัตราการเปลี่ยนแปลงที่มากที่สุดของอุณหภูมิที่จุด $(1,-1)$

วิธีทำ. 1. จากปัญหาดังกล่าว เราต้องการหาอนุพันธ์ระบุทิศทาง $D_{\mathbf{u}}f(1,-1)$ เมื่อ $\mathbf{u}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ทำมุม $\pi/3$ กับแกน X ซึ่งจะได้ว่า $\mathbf{u}=\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ และ

$$\nabla f(x,y)=-2x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}$$

นั่นคือ $\nabla f(1,-1)=-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}}f(1,-1) &= \nabla f(1,-1)\cdot\mathbf{u} \\
&= (-2)(\frac{1}{2})+(2)(\frac{\sqrt{3}}{2}) \\
&= -1+\sqrt{3}\approx 0.732
\end{aligned}
$$

นั่นคือ ที่จุด $(1,-1)$ อุณหภูมิเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็ว 0.732 หน่วยต่อหนึ่งหน่วยการเปลี่ยนแปลงของระยะที่วัดได้ตาม $\mathbf{u}$

2. เนื่องจาก ทิศทาง ที่ อัตรา การ เปลี่ยนแปลง สูง สุง เป็น ไป ตาม ทิศ ของ $\nabla f(1,-1)$ นั่นคือ $\nabla f(1,-1)$ ทำมุม $\theta = 3\pi/4$ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงสูงสุดของอุณหภูมิที่ $(1,-1)$ คือ

$$\|\nabla f(1,-1)\| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = 2\sqrt{2}$$

และจะมีค่ามากที่สุดเมื่อทำมุม $3\pi/4$ กับแกน X

จะเห็นว่า เราสามารถพิจารณาพื้นผิวของ f ได้ดังภาพ 1.42 (ด้านบน) และพิจารณาโค้งระดับดังภาพ 1.42 (ด้านล่าง) ซึ่งลูกศรสีน้ำเงินจะแสดงให้เห็นถึงเกรเดียนต์ ซึ่งตั้งฉากกับโค้งระดับที่จุด $(1,-1)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์สัมผัสของพื้นผิว (ลูกศรสีแดง)

ตัวอย่าง 1.7.10. ให้ $f(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$

1. จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่จุด $(1,1,0)$ ตามตามทิศทาง $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
2. จงหาทิศทางที่ f เปลี่ยนแปลงมากที่สุดที่จุด $(1,1,0)$ และหาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่มากที่สุด

วิธีทำ. 1. ก่อนอื่น จากทิศทาง $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ จะต้องทำเวกเตอร์ดังกล่าวให้เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยก่อน กล่าวคือ ขนาดของ $\mathbf{v} = \sqrt{2^2+(-3)^2+6^2} = \sqrt{49} = 7$ ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\mathbf{u}$ ที่มีทิศทางเดียวกับ $\mathbf{v}$ คือ

$$\mathbf{u} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

และเกรเดียนต์ที่จุด $(1,1,0)$ คือ $\nabla f(1,1,0) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
ดังนั้น อนุพันธ์ระบุทิศทาง $D_{\mathbf{u}}f(1,1,0)$ ตามทิศทางของ $\mathbf{u}$ คือ

$$
\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}}f(1,1,0) &= \nabla f(1,1,0)\cdot\mathbf{u} \\
&= \frac{4}{7}+\frac{6}{7}-\frac{6}{7} \\
&= \frac{4}{7}
\end{aligned}
$$

2. ทิศทางที่อัตราการเปลี่ยนแปลงสูงสุดเป็นไปตามทิศของ $\nabla f(1,1,0)$ คือเปลี่ยนแปลงไปตามเวกเตอร์ $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ และอัตราการเปลี่ยนแปลงสูงสุดของ f ที่ $(1,1,0)$ คือ

$$\|\nabla f(1,1,0)\| = \sqrt{(2)^2+(-2)^2+(-1)^2} = 3$$

แบบฝึกหัดที่ 1.7

1. จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน f ณ จุดและทิศทางที่กำหนดให้ต่อไปนี้โดยใช้นิยาม
   (a) $f(x,y) = 1 + x^2y + xy^2$ ณ จุด $(1,-1)$ โดยทิศทาง $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$
   (b) $f(x,y) = \sqrt{xy}$ ณ จุด $(1,4)$ เมื่อทิศทางเป็นไปตามเวกเตอร์ที่ทำมุม $\theta = \pi/3$ กับแกน X
   (c) $f(x,y,z) = x^3z - yx^2 + z^2$ ณ จุด $(2,-1,1)$ โดยทิศทาง $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

2. จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน f ณ จุดและทิศทางที่กำหนดให้ต่อไปนี้
   (a) $f(x,y) = e^x \cos y$ ณ จุด $(0,\pi/2)$ โดยทิศทาง $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
   (b) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + 2y^2 + 4z^2)$ ณ จุด $(-1,2,4)$ โดยทิศทาง $\mathbf{u} = -\frac{3}{13}\mathbf{i} - \frac{4}{13}\mathbf{j} - \frac{12}{13}\mathbf{k}$
   (c) $f(x,y,z) = e^{x+y+3z}$ ณ จุด $(-2,2,-1)$ โดยทิศทาง $\mathbf{u} = 20\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

3. จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ $f(x,y) = e^{-x}\sec y$ ที่จุด $P(0,\pi/4)$ ในทิศทางที่เข้าสู่จุดกำเนิด

4. จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ $f(x,y) = \sqrt{xy}e^y$ ที่จุด $P(1,1)$ ในทิศทางลบของแกน Y

5. กำหนดให้ $f(x,y,z) = \dfrac{y}{x+z}$ จงหา
   (a) อนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่จุด $P(2,1,-1)$ ในทิศทางจากจุด P สู่ $Q(-1,2,0)$
   (b) จงหาทิศทางที่ f เปลี่ยนแปลงมากที่สุดที่จุด $(2,1,-1)$ และหาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่มากที่สุด

6. อุณหภูมิ (หน่วยเซลเซียส) ในแท่งโลหะอันหนึ่ง ณ จุด (x,y,z) กำหนดโดยฟังก์ชัน
$$T(x,y,z) = \frac{xyz}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$$
   (a) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิเมื่อเทียบกับระยะทางที่จุด $(1,1,1)$ ในทิศทางสู่จุดกำเนิด
   (b) จงหาทิศทางที่อุณหภูมิเพิ่มขึ้นมากที่สุดที่จุด $(1,1,1)$ (ตอบในรูปเวกเตอร์หนึ่งหน่วย)
   (c) จงหาอัตราซึ่งอุณหภูมิ**ลดลง**ต่ำที่สุดที่จุด $(1,1,1)$

7. ภูเขาแห่งหนึ่ง ที่ตำแหน่ง (x,y) ความสูงจากระดับน้ำทะเล z วัดได้จากความสัมพันธ์
$$z = 2000 - 0.02x^2 - 0.04y^2$$
   เมื่อ x, y, z มีหน่วยเป็นเมตร กำหนดให้ทิศทางตามแกน X ด้านบวกเป็นทิศตะวันออก และทิศทางตามแกน Y ด้านบวกเป็นทิศเหนือ สมมติว่านักปีนเขาคนหนึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง $P(-20,5,1991)$

(a) ถ้านักปีนเขาใช้เข็มทิศและเดินทางไปตามทิศตะวันออก ณ ตำแหน่ง P นักปีนเขาจะต้องเดินขึ้นหรือเดินลงจากจุดที่ยืนอยู่

(b) ถ้านักปีนเขาใช้เข็มทิศและเดินทางไปตามทิศตะวันออกเฉียงเหนือ ณ ตำแหน่ง P นักปีนเขาจะต้องเดินขึ้นหรือเดินลงจากจุดที่ยืนอยู่ และความสูงมีการเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด

(c) ณ จุดที่นักปีนเขายืนอยู่ ทิศทางใดในเข็มทิศที่ภูเขามีการเปลี่ยนแปลงความสูงเพิ่มขึ้นสูงที่สุด และลดลงต่ำที่สุด

8. ให้ $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง อนุพันธ์ย่อย f_x, f_y หาค่าได้ที่จุด $(0,0)$ แต่อนุพันธ์ระบุทิศทางในทิศทางอื่น ๆ ไม่มีค่า

9. สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่โดเมนคือระนาบ XY ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด พร้อมทั้งอธิบายเหตุผล

(a) ถ้า $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$ แล้ว อนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ในทิศทางของ $\mathbf{v}$ ที่จุด (x_0, y_0) มีค่าเป็นสองเท่าของอนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ในทิศทางของ $\mathbf{u}$ ที่จุด (x_0, y_0)

(b) ถ้า $y = x^2$ เป็นเส้นโค้งระดับของ f แล้ว $f_x(0,0) = 0$

(c) ถ้า $\mathbf{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่เป็นเวกเตอร์คงที่ และ $D_{\mathbf{u}}f(x,y) = 0$ สำหรับทุกจุด (x,y) แล้ว f เป็นฟังก์ชันค่าคงที่

(d) ถ้าเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ (x_0, y_0) ไปยังจุด (x_1, y_1) มีค่าเป็นพหุคูณ (ที่เป็นบวก) ของ $\nabla f(x_0, y_0)$ แล้ว $f(x_0, y_0) \leq (x_1, y_1)$

1.8 จาโคเบียนของการแปลง

1.8.1 การแปลงในระนาบ

ในหัวข้อ 1.1 เราเคยกล่าวถึงการแปลงซึ่งเป็นฟังก์ชัน $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ในหัวข้อนี้ เราจะกล่าวถึงการแปลงให้ละเอียดขึ้น เพื่อนำสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการแปลงมาใช้ประโยชน์ในการศึกษาประเด็นที่สูงขึ้น

จะเห็นว่า เราได้เคยกล่าวถึงตัวอย่างของสมการอิงตัวแปรเสริม ซึ่งเป็นการส่งจาก $\mathbb{R}$ ไปเป็นเส้นโค้งใน $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ หรือการส่งจาก $\mathbb{R}^2$ ไปเป็นพื้นผิวใน $\mathbb{R}^3$ ในส่วนนี้เราจะพิจารณาสมการอิงตัวแปรเสริมในรูป

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v) \tag{1.8.1}$$

ดังนั้น สมการอิงตัวแปรเสริมนี้ จะก่อให้เกิดความสัมพันธ์ระหว่างจุดในระนาบ UV และระนาบ XY ซึ่งเราเขียนสมการที่แสดงความสัมพันธ์ดังกล่าวได้ในรูปเวกเตอร์ กล่าวคือ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j}$$

ซึ่งจะเห็นว่า $\mathbf{r}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ในเทอมของตัวแปร x, y และ $\mathbf{r}(u,v)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์อยู่ในรูปของตัวแปร u, v

จากสถานการณ์ดังกล่าว หากเราพิจารณาให้คู่ของ (u,v) เป็นตัวแปรต้น ซึ่งก่อให้เกิดคู่ของตัวแปร (x,y) ที่เป็นไปได้เพียงค่าเดียว โดยทำการนิยามให้อยู่ในรูป

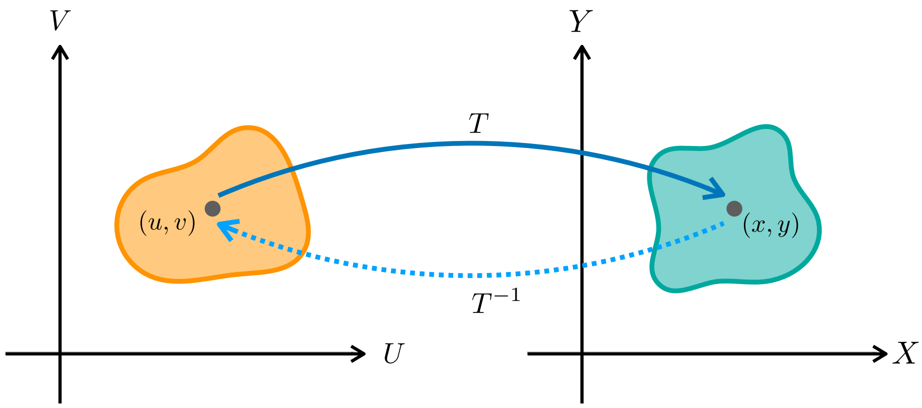
$$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

เราจะเรียก T ว่าเป็น**การแปลง** (transformation) จากระนาบ UV ไปยังระนาบ XY และเรียก (x, y) ว่า **ภาพ** (image) ของ (u, v) นั่นคือ T **ส่ง** (map) (u, v) ไปยัง (x, y) เซต R ของภาพทั้งหมดในระนาบ XY ของเซต S ในระนาบ UV จะเรียกว่า ภาพของ S ภายใต้ T ถ้าแต่ละภาพในระนาบ UV ส่งไปยัง XY แล้วได้ภาพที่แตกต่างกัน จะเรียก T ว่าเป็น**การส่งแบบหนึ่งต่อหนึ่ง** (one-to-one mapping)

ในทำนองกลับกัน หากเราพิจารณาสมการ (1.8.1) ทำการนิยาม u, v ให้เป็นฟังก์ชันของ x, y กล่าวคือ

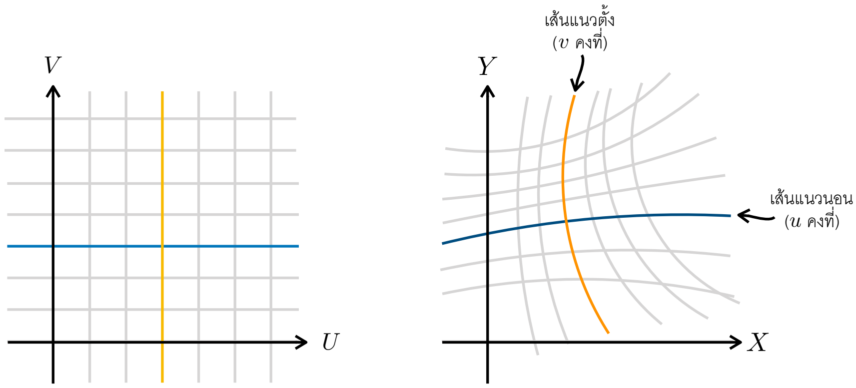
$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y) \tag{1.8.2}$$

จะได้ว่า เราสามารถสร้างการส่งที่ส่งจากระนาบ XY ไปยังระนาบ UV ซึ่งทำการส่งภาพของ (u, v) ภายใต้การส่ง T กลับมายัง (u, v) การส่งนี้จะเขียนเป็น T^{-1} และจะเรียกว่า **การส่งผกผัน** (invese map) ของ T ซึ่งความสัมพันธ์ของการส่งแสดงได้ดังภาพ 1.43



ภาพที่ 1.43. การส่งระหว่างระนาบ UV และ XY

เราสามารถพิจารณาการเปลี่ยนแปลงทางเรขาคณิตของการส่งที่เกิดภาพ (x, y) จากจุด (u, v) ได้ โดยสมมติว่าในระนาบ UV มีเส้นแนวนอน (v คงที่) ซึ่งส่งไปยังระนาบ XY ก่อให้เกิดเส้นโค้งคงที่ของ v บนระนาบ XY และทำนองเดียวกัน มีเส้นแนวตั้ง (u คงที่) ในระนาบ UV ที่ส่งไปยังระนาบ XY และก่อให้เกิดเส้นโค้งคงที่ของ u ดังภาพ 1.44

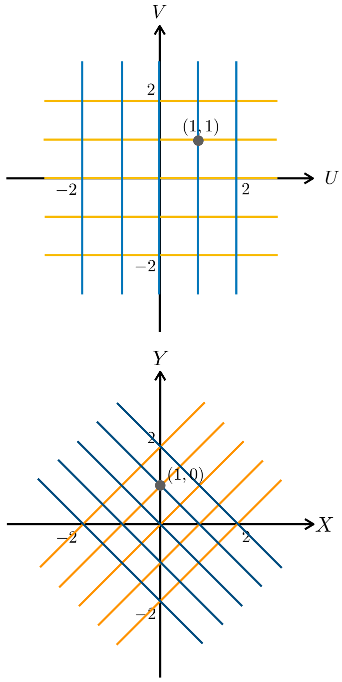


ภาพที่ 1.44. เส้นแนวนอนและแนวตั้งในระนาบ UV ส่งไปยังเส้นโค้งคงที่ในระนาบ XY

ตัวอย่าง 1.8.1. ให้ T เป็นการแปลงจากระนาบ UV ไปยังระนาบ XY กำหนดโดย

$$x = \frac{1}{2}(u+v), \qquad y = \frac{1}{2}(u-v)$$

1. จงหา $T(1,1)$
2. ให้ S เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ปิดล้อมด้วย $u=-2, u=2, v=-2$ และ $v=2$ ในระนาบ UV จงวาดภาพจากในระนาบ XY ซึ่งเกิดจากการส่ง S ในระนาบ UV ไปยังระนาบ XY



ภาพที่ 1.45. (บน) เส้นแนวตั้งและแนวนอนในระนาบ UV
(ล่าง) เส้นโค้งคงที่ในระนาบ XY

วิธีทำ. 1. จะเห็นว่า เมื่อ $(u,v)=(1,1)$ จะได้ว่า $T(1,1)=(1,0)$

2. จากการกำหนด เราจะพิจารณาว่า ในระนาบ XY จะมีความสัมพันธ์อย่างไรกับระนาบ UV ซึ่งจากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

$$x+y=u \qquad \text{และ} \qquad x-y=v$$

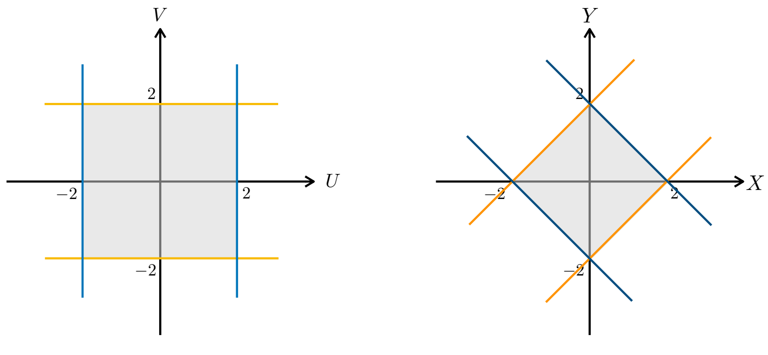
ดังนั้น สำหรับแต่ละเส้นแนวนอนเมื่อ $u=-2,-1,0,1,2$ จะได้ความสัมพันธ์คือ

$$x+y=-2, \quad x+y=-1, \quad x+y=0, \quad x+y=1, \quad x+y=2$$

และสำหรับแต่ละเส้นแนวตั้งเมื่อ $v=-2,-1,0,1,2$ จะได้ความสัมพันธ์คือ

$$x-y=-2, \quad x-y=-1, \quad x-y=0, \quad x-y=1, \quad x-y=2$$

โดยเส้นแนวนอนและเส้นแนวตั้งในระนาบ UV สามารถแสดงเป็นเส้นในระนาบ XY ได้ดังภาพ 1.45 ซึ่งจะเห็นว่า รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีถูกปิดล้อมด้วย $u=-2, u=2, v=-2$ และ $v=2$ ในระนาบ UV สามารถพิจารณาได้โดยเส้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x+y=-2, x+y=2, x-y=-2$ และ $x-y=2$ ดังภาพ 1.46



ภาพที่ 1.46. สี่เหลี่ยมจัตุรัสในระนาบ UV และสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่หมุนในระนาบ XY

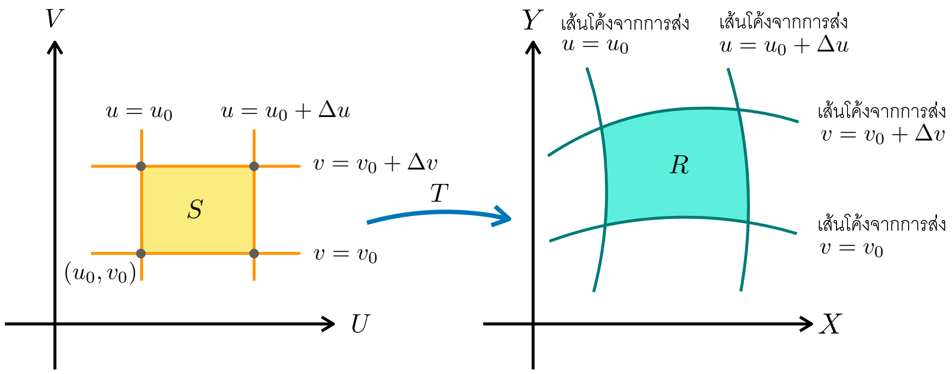
ดังที่แสดงในตัวอย่าง 1.8.1 เราสามารถพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ในระนาบ UV และระนาบ XY ได้จากการพิจารณาพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ๆ ในระนาบ UV กับพื้นที่ที่ถูกแปลงไปในระนาบ XY ภายใต้การแปลง T ก่อนอื่นสมมติให้

$$x=f(u,v), \qquad y=g(u,v)$$

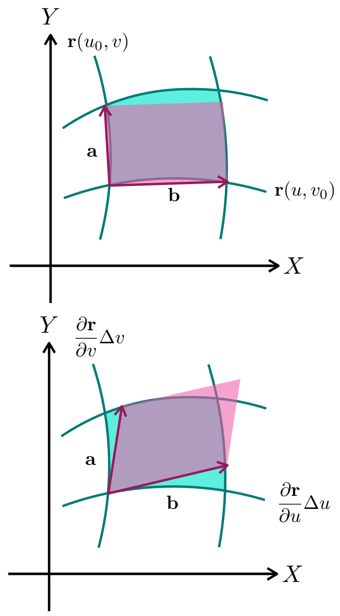
สมมติว่า Δu และ Δv เป็นจำนวนจริงบวก พิจารณาบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า S ในระนาบ UV ที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง

$$u = u_0, \quad u = u_0 + \Delta u, \quad v = v_0, \quad v = v_0 + \Delta v$$

ถ้า $f(u, v)$ และ $g(u, v)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $\Delta u, \Delta v$ ไม่ใหญ่มากแล้ว ภาพ S ที่ถูกส่งไปในระนาบ XY จะเป็นบริเวณใน R ซึ่งคล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ถูกบิด ดังภาพ 1.47 โดยที่บริเวณใน R ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้งคงที่ u และ v ที่สัมพันธ์กับด้านของ S



ภาพที่ 1.47. การส่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าจากระนาบ UV ไปยังสี่เหลี่ยมด้านขนานบิดในระนาบ XY



ภาพที่ 1.48. (บน) เวกเตอร์ $\mathbf{a}$ และ $\mathbf{b}$ สำหรับการหาพื้นที่ในระนาบ XY (ล่าง) การประมาณเวกเตอร์ $\mathbf{a}$ และ $\mathbf{b}$ ในระนาบ XY

ถ้าเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของ (u, v) ในระนาบ UV แล้ว จะได้ว่าเส้นโค้งคงที่ u และ v ในระนาบ XY เมื่อ $u = u_0$ และ $v = v_0$ จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v_0) &= f(u, v_0)\mathbf{i} + g(u, v_0)\mathbf{j} \\ \mathbf{r}(u_0, v) &= f(u_0, v)\mathbf{i} + g(u_0, v)\mathbf{j} \end{aligned}$$

ถ้าสมมติว่า Δu และ Δv เล็ก ๆ จะเห็นว่า บริเวณ R สามารถประมาณได้ด้วยสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจากเวกเตอร์ ดังภาพ 1.48 (บน)

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \\ \mathbf{b} &= \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \end{aligned}$$

ดังนั้น เวกเตอร์ $\mathbf{a}$ สามารถประมาณได้ด้วยเวกเตอร์ที่สัมผัสเส้นโค้ง คือเวกเตอร์ $\mathbf{r}'$ ดังภาพ 1.48 (ล่าง) กล่าวคือ เวกเตอร์ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ประมาณได้โดย

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}\Delta u \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u}\mathbf{j}\right)\Delta u \\ \mathbf{b} &= \frac{\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta v}\Delta v \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial v}\mathbf{j}\right)\Delta v \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานในบริเวณ R ในระนาบ XY สามารถประมาณได้โดย

$$\Delta A \approx \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v$$

ซึ่งจะเห็นว่า $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial u} & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$

จากความสัมพันธ์ดังกล่าว เราจึงนิยามดีเทอร์มิแนนต์หน้าส่วนประกอบ $\mathbf{k}$ ได้ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.8.1. ให้ $x = f(u, v)$ และ $y = g(u, v)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ในบริเวณหนึ่ง **จาโคเบียน** (Jacobian) J ของการแปลง f, g ในสองมิติ เทียบกับ u, v นิยามโดย

$$J(u, v) = \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}$$

ความสัมพันธ์ดังกล่าวทำให้เราได้ว่า เมื่อ Δu และ Δv เล็กเพียงพอ กล่าวคือ เมื่อให้ $(\Delta u, \Delta v) \to (0, 0)$ พื้นที่ของบริเวณ R ในระนาบ XY มีขนาดเป็น $|J(u, v)|$ เท่าของพื้นที่ S ในระนาบ UV นั่นคือ

$$\lim_{(\Delta u, \Delta v) \to (0,0)} \frac{A_{xy}}{A_{uv}} = |J(u, v)|$$

เมื่อ A_{xy} และ A_{uv} คือพื้นที่ในระนาบ XY และ UV ตามลำดับ ดังนั้น จากที่แสดงข้างต้น เราจึงได้ความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ในระนาบ UV และระนาบ XY ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.8.2. ให้ x, y, u, v สัมพันธ์โดย

$$\begin{aligned} x &= f(u, v) \qquad & y &= g(u, v) \\ u &= F(x, y) \qquad & v &= G(x, y) \end{aligned}$$

โดยที่ f, g, F, G เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งต่อเนื่องแล้ว

$$A_{xy} = |J(u, v)| A_{uv} \qquad \text{และ} \qquad A_{uv} = |J(x, y)| A_{xy}$$

เมื่อ A_{xy} และ A_{uv} คือพื้นที่ในระนาบ XY และ UV ตามลำดับ และ $J(u, v) = \dfrac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}, J(x, y) = \dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$

ตัวอย่าง 1.8.3. ให้ R_{uv} เป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วย

$$R_{uv} : 0 \leq u \leq 1, \qquad 0 \leq v \leq 1, \qquad u + v = 1$$

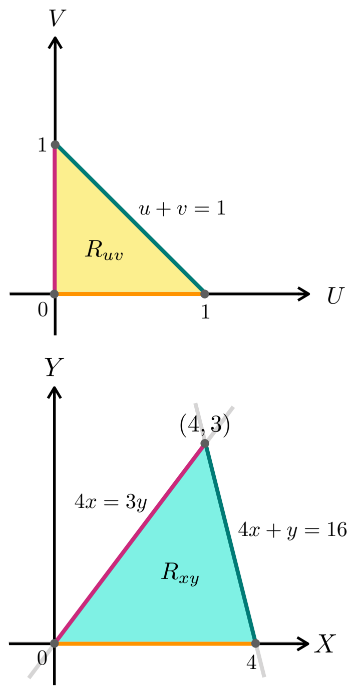
กำหนดการ แปลง ซึ่ง แปลง บริเวณ ใน ระนาบ UV ไป ยัง ระนาบ XY ด้วย ความสัมพันธ์

$$x = 3u + 4v \qquad y = 4u$$

1. จงพิจารณาบริเวณ R_{xy} ในระนาบ XY
2. จงคำนวณ $|J(u, v)|$

3. จงหาพื้นที่ A_{xy} ของบริเวณ R_{xy} ในระนาบ XY

4. จงคำนวณ $|J(x,y)|$



ภาพที่ 1.49. (บน) บริเวณในระนาบ UV (ล่าง) บริเวณในระนาบ XY หลังการส่ง

วิธีทำ. 1. บริเวณในระนาบ UV เป็นบริเวณรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จากความสัมพันธ์ที่กำหนด เราจึงพิจารณาขอบเขตของบริเวณแต่ละเส้นที่ส่งมา ซึ่งบริเวณที่ปิดล้อมสามารถแสดงได้ดังภาพ 1.49

- สำหรับเส้นตรงที่ $u=0$ จะได้เส้นตรง $y=0$
- สำหรับเส้นตรงที่ $v=0$ ทำให้ได้ว่า $x=3u$ และจาก $y=4u$ จะได้เส้นตรง $4x=3y$
- สำหรับเส้นตรง $u+v=1$ ทำให้ได้เส้นตรง $x+y=3u+4$ และจาก $y=4u$ จึงได้เส้นตรง $4x+y=16$

2. จะเห็นว่า

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 0\end{vmatrix}=-16$$

ดังนั้น $|J(u,v)|=16$

3. จากความสัมพันธ์ ทำให้ได้ว่า $A_{xy}=|J(u,v)|A_{uv}$ และเนื่องจากเราทราบว่า $A_{uv}=1/2$ ดังนั้น $A_{xy}=(16)(\frac{1}{2})=8$ หน่วย

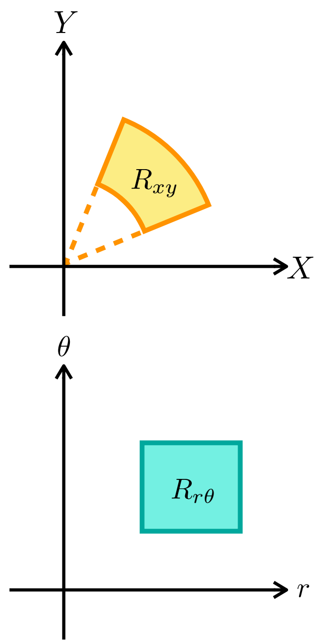
4. จากการแปลงที่กำหนดให้ จะสร้างสมการเพื่อหาความสัมพันธ์ u,v ในเทอมของ x,y ทำให้เราได้ว่า

$$u=\frac{1}{4}y \qquad v=\frac{1}{4}x-\frac{3}{16}y$$

ดังนั้น

$$J(x,y)=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{16}\end{vmatrix}=-\frac{1}{16}$$

นั่นคือ $|J(x,y)|=\dfrac{1}{16}$ ตามต้องการ



ภาพที่ 1.50. (บน) บริเวณในระนาบ XY (ล่าง) บริเวณในระนาบ $r\theta$

ตัวอย่าง 1.8.4. พิจารณาระบบพิกัดฉากในระนาบ XY และระบบพิกัดเชิงขั้ว $r\theta$ กำหนดการแปลงบริเวณระหว่างระนาบ XY และยังระนาบ $r\theta$ ด้วยความสัมพันธ์

$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta$$

จงหาความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ในระนาบ XY และระนาบ $r\theta$

วิธีทำ. จากความสัมพันธ์ของการแปลง จะเห็นว่า $r=\sqrt{x^2+y^2}$ และ $\tan\theta=\frac{y}{x}$ หากพิจารณาบริเวณสี่เหลี่ยมในระนาบ XY จะพบว่า มีความสัมพันธ์กับบริเวณในระนาบ $r\theta$ ดังภาพ 1.50 เราจึงพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ กล่าวคือ

$$A_{xy}=|J(r,\theta)|A_{r\theta}$$

ดังนั้น จึงพิจารณา

$$J(r,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

จึงได้ว่า $|J(r,\theta)|=r$ นั่นคือ

$$A_{xy}=rA_{r\theta}$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับฟังก์ชันสามตัวแปร เราสามารถนิยามจาโคเบียนได้ ดังนี้

บทนิยาม 1.8.2. ถ้า $x=f(u,v,w), y=g(u,v,w), z=h(u,v,w)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ณ บริเวณหนึ่งแล้ว จาโคเบียนการแปลง J ของการแปลง f,g,h ในสามมิติ เทียบกับ u,v,w นิยามโดย

$$J(u,v,w)=\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w}\\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w}\\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial w}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}f_u & f_v & f_w\\ g_u & g_v & g_w\\ h_u & h_v & h_w\end{vmatrix}$$

หากพิจารณาการแปลงจากปริภูมิสามมิติหนึ่งไปยังอีกปริภูมิสามมิติหนึ่ง เราจะได้ความสัมพันธ์ในแง่ของปริมาตรระหว่างสองปริภูมิ ซึ่งพิจารณาได้ในทำนองคล้ายกัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.8.5. ให้ x,y,z,u,v,w สัมพันธ์โดย

$$\begin{array}{lll} x=f(u,v,w) & y=g(u,v,w) & z=h(u,v,w)\\ u=F(x,y,z) & v=G(x,y,z) & z=H(x,y,z)\end{array}$$

โดยที่ f,g,h,F,G,H เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งต่อเนื่องแล้ว

$$V_{xyz}=|J(u,v,w)|V_{uvw} \quad \text{และ} \quad V_{uvw}=|J(x,y,z)|V_{xyz}$$

เมื่อ V_{xyz} และ V_{uvw} คือปริมาตรในระนาบ XYZ และ UVW ตามลำดับ และ $J(u,v,w)=\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}, J(x,y,z)=\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ ทำได้ในทำนองคล้ายกัน โดยในการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน (spanned parallelepiped) หากมีเวกเตอร์ $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน สามารถหาได้จากผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามมิติ (scalar triple product) นั่นคือ $V=\|(a\times b)\cdot c\|$

ตัวอย่าง 1.8.6. กำหนดฟังก์ชันแฝง

$$\begin{aligned} f(x,y,z,u,v,w) &= x - u\sin v\cos w \\ g(x,y,z,u,v,w) &= y - u\sin v\sin w \\ h(x,y,z,u,v,w) &= z - u\cos v \end{aligned}$$

จงคำนวณจาโคเบียน $\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}$ และ $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}$

วิธีทำ. จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)} &= \begin{vmatrix} f_u & f_v & f_w \\ g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\sin v\cos w & -u\cos v\cos w & u\sin v\sin w \\ -\sin v\sin w & -u\cos v\sin w & -u\sin v\cos w \\ -\cos v & u\sin v & 0 \end{vmatrix} \\ &= -u^2\sin v \end{aligned}$$

และเราได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)} &= \begin{vmatrix} f_x & f_v \\ g_x & g_v \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -u\cos v\cos w \\ 0 & -u\cos v\sin w \end{vmatrix} \\ &= -u\cos v\sin w \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.8.7. พิจารณา ระบบ พิกัด ฉาก ใน ปริภูมิ XYZ และ ระบบ พิกัด ทรงกระบอก $r\theta Z$ กำหนดการแปลงบริเวณระหว่างปริภูมิ XYZ กับปริภูมิ $r\theta Z$ ด้วยความสัมพันธ์

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z$$

จงหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรในปริภูมิ XYZ และปริภูมิ $r\theta Z$

วิธีทำ. เราจึงพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตร กล่าวคือ

$$V_{xyz} = |J(r,\theta,z)|V_{r\theta z}$$

ดังนั้น จึงพิจารณา

$$J(r,\theta,z) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta z)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

นั่นคือ

$$V_{xyz} = rV_{r\theta z}$$

1.8.2 ฟังก์ชันแฝง และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝง

ความสัมพันธ์หลาย ๆ ความสัมพันธ์ปรากฏอยู่ในรูปของฟังก์ชันแฝง ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่างๆ การเลือกว่าตัวแปรใดเป็นตัวแปรต้น อีกตัวแปรหนึ่งเป็นตัวแปรตามอาจกำหนดได้ยาก เช่น ในบางย่านจุดเปิด เราอาจสร้างความสัมพันธ์ให้ตัวแปรหนึ่งเป็นตัวแปรตาม และตัวแปรอื่น ๆ เป็นตัวแปรต้นได้ แต่เมื่อเปลี่ยนย่านจุดเปิด ความสัมพันธ์ที่กำหนดไว้แต่ต้นก็ไม่เป็นเช่นนั้น

คำถามที่เราให้ความสนใจคือ เราจะสามารถหาสูตรของอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝงนั้นได้หรือไม่ และฟังก์ชันแฝงเหล่านั้นจะสามารถหาอนุพันธ์ได้หรือไม่ เราจะมาเริ่มต้นพิจารณาสูตรของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝงต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.8.8. ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันแฝงในพจน์ของ x, y กำหนดโดย $F(x,y,u,v)=0$ และ $G(x,y,u,v)=0$ แล้วจะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

พิสูจน์. ให้ $F(x,y,u,v)=0, G(x,y,u,v)=0, u=u(x,y)$ และ $v=v(x,y)$ พิจารณารูปดิฟเฟอเรนเชียลของ F และ G ดังนี้

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv=0 \tag{1.8.3}$$

$$dG=\frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}dy+\frac{\partial G}{\partial u}du+\frac{\partial G}{\partial v}dv=0 \tag{1.8.4}$$

และทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy,\qquad dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$$

แทน du และ dv ในสมการ (1.8.3) และ (1.8.4) และรวมพจน์ dx, dy จะได้ว่า

$$dF=\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy=0$$

$$dG=\left(\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy=0$$

เพื่อความสะดวกในการเขียน ต่อจากนี้ไปจะขอใช้สัญลักษณ์ตัวพิมพ์ห้อยสำหรับอนุพันธ์ย่อย

เนื่องจาก dx และ dy เป็นอิสระเชิงเส้น กล่าวคือ สำหรับ A, B ถ้า $Adx+Bdy=0$ แล้ว $A=0$ และ $B=0$ จึงได้ว่า

$$F_x+F_uu_x+F_vv_x=0,\qquad F_y+F_uu_y+F_vv_y=0$$

$$G_x+G_uu_x+G_vv_x=0,\qquad G_y+G_uu_y+G_vv_y=0$$

ดังนั้น เราจึงได้ระบบสมการในพจน์ของ u_x, v_x และ u_y, v_y สองระบบสมการ คือ

$$\begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_x \\ -G_x \end{bmatrix} \text{ และ } \begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_y \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_y \\ -G_y \end{bmatrix}$$

โดยกฎของคราเมอร์ ทำให้ได้ว่า

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$v_x = \frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_x \\ G_u & -G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} -F_y & F_v \\ -G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$v_x = \frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_y \\ G_u & -G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

ตามต้องการ □

สำหรับฟังก์ชันแฝง มีทฤษฎีบทหนึ่งที่สำคัญที่ช่วยรับประกันการมีอนุพันธ์ ทฤษฎีบทนี้มีชื่อว่า ทฤษฎีบทฟังก์ชันแฝง (implicit function theorem) ซึ่งครอบคลุมผลของทฤษฎีบทที่ได้กล่าวมาข้างต้น เราจะยกทฤษฎีบทนี้มาโดยละการพิสูจน์ไว้ ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.8.9. (ทฤษฎีบทฟังก์ชันแฝง) ให้ $f(x,y,u,v)$ และ $g(x,y,u,v)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (เมื่อเทียบกับแต่ละตัวในสี่ตัวแปร) ต่อเนื่องในย่านจุดเปิดของจุด $\hat{P}_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ โดยที่ $f(x,y,u,v) = 0$ และ $g(x,y,u,v) = 0$ แล้ว

1. ถ้า $\left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right|_{\hat{P}_0} \neq 0$ แล้ว สำหรับฟังก์ชันแฝง $f(x,y,u,v) = 0$ และ $g(x,y,u,v) = 0$ จะสามารถนิยามฟังก์ชันต่อเนื่อง $u = u(x,y)$ และ $v = v(x,y)$ ซึ่งอนุพันธ์ย่อยแต่ละตัวต่อเนื่องในย่านจุดเปิดของจุด $P_0(x_0,y_0)$ โดยที่ฟังก์ชันเหล่านี้มีสมบัติว่า

$$u_0 = u(x_0,y_0) \text{ และ } v_0 = v(x_0,y_0)$$

2. อนุพันธ์ย่อยของ u และ v ที่ P_0 จะหาได้จากอัตราส่วนของจาโคเบียน

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

ตัวอย่าง 1.8.10. กำหนด

$$u^2 - v = 3x + y, \qquad u - 2v^2 = x - 2y$$

จงหา $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$

วิธีทำ. เราสมมติให้ $F(x,y,u,v) = u^2 - v - 3x - y = 0$ และ $G(x,y,u,v) = u - 2v^2 - x + 2y = 0$ โดยทฤษฎีบท 1.8.8 จะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -4v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -1 \\ 1 & -4v \end{vmatrix}} = \frac{1-12v}{1-8uv}$$

และทำนองเดียวกัน เราได้ว่า

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2u & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -1 \\ 1 & -4v \end{vmatrix}} = \frac{-4u-1}{1-8uv}$$

เมื่อ $1 - 8uv \neq 0$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถขยายผลของจาโคเบียนไประบบสมการซึ่งมีสมการสามสมการ และมีตัวแปรต้นอย่างน้อยสองตัวแปรได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ สำหรับการพิสูจน์ทำได้ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 1.8.8

ทฤษฎีบท 1.8.11. ให้ u, v และ w เป็นฟังก์ชันแฝงในพจน์ของ x, y กำหนดโดย $F(x,y,u,v,w) = 0$, $G(x,y,u,v,w) = 0$ และ $H(x,y,u,v,w) = 0$ แล้วจะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(y,v,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,x,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,x)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,y)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$

ตัวอย่าง 1.8.12. ให้ u, v, w เป็นฟังก์ชันแฝงของตัวแปร x, y จงหา u_x เมื่อกำหนดฟังก์ชันดังระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} xy^2 + u^2v + w &= 5 \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + w^2 &= 0 \\ xu + yv + xyw &= 0 \end{aligned}$$

จงหา u_x ที่ $x = 1, y = 0, u = 0, v = 1, w = 0$

วิธีทำ. เราสมมติให้

$$\begin{aligned} F(u, v, w, x, y) &= xy^2 + u^2v + w - 5 \\ G(u, v, w, x, y) &= x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + w^2 \\ H(u, v, w, x, y) &= xu + yv + xyw \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v & F_w \\ G_x & G_v & G_w \\ H_x & H_v & H_w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{vmatrix}} &= -\frac{\begin{vmatrix} y^2 & u^2 & 1 \\ 2x & 2v & 2w \\ u+yw & y & xy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2uv & u^2 & 1 \\ 2u & 2v & 2w \\ x & y & xy \end{vmatrix}} \\ &= \frac{uv - u^3w + vwy - u^2w^2y - xy + u^2x^2y + wy^3 - vxy^3}{vx - u^2wx - uy + 2uvwy + u^3xy - 2uv^2xy} \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อ $x = 1, y = 0, u = 0, v = 1, w = 0$ จะได้ว่า $u_x = 0$ ตามต้องการ

1.8.3 สมบัติของจาโคเบียน

เราพิจารณาสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับจาโคเบียน ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.8.13. (กฎลูกโซ่สำหรับจาโคเบียน)
ให้ $x = f(u, v), y = g(u, v)$ เป็นการแปลง โดยที่ u, v มีความสัมพันธ์กับตัวแปร s, t ดังการแปลง $u = \phi(s, t), v = \psi(s, t)$ และ f, g, ϕ, ψ หาอนุพันธ์ได้แล้ว

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}$$

พิสูจน์. เราสามารถเขียน x, y ในรูปการประกอบการแปลงได้ คือ

$$x = f(u, v) = f(\phi(s, t), \psi(s, t)) \qquad y = g(u, v) = g(\phi(s, t), \psi(s, t))$$

จากนิยามของจาโคเบียน จะได้ว่า

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f(\phi(s,t),\psi(s,t))}{\partial s} & \dfrac{\partial f(\phi(s,t),\psi(s,t))}{\partial t} \\ \dfrac{\partial g(\phi(s,t),\psi(s,t))}{\partial s} & \dfrac{\partial g(\phi(s,t),\psi(s,t))}{\partial t} \end{vmatrix}$$

ซึ่งสำหรับแต่ละพจน์ โดยใช้กฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\phi(s,t),\psi(s,t))}{\partial s} &= f_u\phi_s + f_v\psi_s = x_u u_s + x_v v_s \\ \frac{\partial f(\phi(s,t),\psi(s,t))}{\partial t} &= f_u\phi_t + f_v\psi_t = x_u u_t + x_v v_t \\ \frac{\partial g(\phi(s,t),\psi(s,t))}{\partial s} &= g_u\phi_s + g_v\psi_s = y_u u_s + y_v v_s \\ \frac{\partial g(\phi(s,t),\psi(s,t))}{\partial t} &= g_u\phi_t + g_v\psi_t = y_u u_t + y_v v_t \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} &= \begin{vmatrix} x_u u_s + x_v v_s & x_u u_t + x_v v_t \\ y_u u_s + y_v v_s & y_u u_t + y_v v_t \end{vmatrix} \\ &= (x_u u_s + x_v v_s)(y_u u_t + y_v v_t) - (y_u u_s + y_v v_s)(x_u u_t + x_v v_t) \\ &= x_u u_s y_u u_t + x_u u_s y_v v_t + x_v v_s y_u u_t + x_v v_s y_v v_t \\ &\qquad - y_u u_s x_u u_t - y_u u_s x_v v_t - y_v v_s x_u u_t - y_v v_s x_v v_t \\ &= x_u u_s y_v v_t + x_v v_s y_u u_t - y_u u_s x_v v_t - y_v v_s x_u u_t \\ &= u_s v_t(x_u y_v - x_v y_u) - u_t v_s(x_u y_v - x_v y_u) \\ &= (x_u y_v - x_v y_u)(u_s v_t - u_t v_s) \\ &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} \end{aligned}$$

ตามต้องการ □

จากทฤษฎีบท 1.8.13 เราจะสามารถขยายกฎลูกโซ่ไปสู่กรณีฟังก์ชันหลายตัวแปรได้เช่นกัน และสำหรับทฤษฎีบทต่อไปนี้จะกล่าวถึงการเป็นส่วนกลับซึ่งกันและกันของจาโคเบียนของการแปลงที่เป็นการแปลงผกผันซึ่งกันและกัน เมื่อจาโคเบียนไม่เป็นศูนย์

ทฤษฎีบท 1.8.14. (ตัวผกผันของจาโคเบียน)
ให้ $x = f(u,v), y = g(u,v)$ เป็นการแปลงโดยที่มีความสัมพันธ์ผกผันกับตัวแปร u, v ดังการแปลง $u = \phi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$ ซึ่ง $J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ และ $J(x,y) = \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$ แล้ว $J(u,v) = \dfrac{1}{J(x,y)}$

พิสูจน์. เนื่องจาก $u = \phi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$ เป็นการแปลงผกผันของ $x = f(u,v), y = g(u,v)$ จึงได้ว่า $s = x$ และ $t = y$ ดังนั้น จากทฤษฎีบท 1.8.13 จะ

ได้
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$
เนื่องจาก $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = 1$ และ $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0, \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$ จึงได้ว่า
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$$
นั่นคือ $J(u,v) = \dfrac{1}{J(x,y)}$ ตามต้องการ □

สมบัติดังกล่าวนี้ทำให้ได้ทฤษฎีบทที่สำคัญอีกทฤษฎีบทหนึ่ง คือ ทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผัน (inverse function theorem) ซึ่งมีประโยชน์ในการศึกษาประเด็นต่างๆ เช่น ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยบางประเภท ในบางครั้ง สมการเดิมอาจแก้ได้ไม่ง่ายนัก แต่หากมีการแปลงสมการดังกล่าวไปยังสมการอื่นที่แก้ได้ง่ายขึ้น ซึ่งทฤษฎีบทดังกล่าวจะช่วยให้เรายืนยันว่า เราสามารถทำการแปลงระหว่างระบบพิกัดสองระบบพิกัดได้ ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.8.15. (ทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผัน)
ให้ x, y เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้และอนุพันธ์ต่อเนื่องในเทอมของ u, v ในบางย่านจุดเปิด $P_0(u_0, v_0)$ ในระนาบ UV นิยามโดย
$$x = f(u,v), \qquad y = g(u,v)$$
แล้ว ถ้า ณ จุด P_0 จาโคเบียน $J(x,y) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} \neq 0$ แล้ว การแปลง $x = f(u,v), y = g(u,v)$ สามารถหาตัวผกผัน $u(x,y), v(x,y)$ ได้ในบางย่านจุดเปิด $P_0(u_0, v_0)$ ซึ่งอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งเทียบกับ x, y ต่อเนื่องในบางย่านจุดเปิดของจุด $(x_0, y_0) = (f(u_0, v_0), g(u_0, v_0))$ ในระนาบ XY

พิสูจน์. นิยามฟังก์ชัน F และ G โดย
$$F(x,y,u,v) = f(u,v) - x, \qquad G(x,y,u,v) = g(u,v) - y$$
ดังนั้นฟังก์ชัน F, G มีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งที่ต่อเนื่องเทียบกับตัวแปรทั้งสี่ และ F, G มีค่าเป็นศูนย์ที่จุด $\hat{P}_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$

โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันแฝง ถ้า
$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{\hat{P}_0} = \left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right|_{\hat{P}_0} = J(x,y)$$
มีค่าไม่เป็นศูนย์แล้ว สำหรับ $F = G = 0$ จะสามารถหาฟังก์ชัน u, v ในเทอมของ x, y ได้ ซึ่งจะได้การแปลง $x = f(u,v), y = g(u,v)$ ตามต้องการ □

แบบฝึกหัดที่ 1.8

1. กำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้ จงหาจาโคเบียน $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

   (a) $x = u + 4v, y = 3u - 5v$

   (b) $x = \sin u + \cos v, y = -\cos u + \sin v$

   (c) $u = 2x - 5y, v = x + 2y$

   (d) $u = x^2 + y^2, y = x^2 + y^2 (x > 0, y > 0)$

2. กำหนดการแปลง $x = 2u, y = 3v$ โดยที่บริเวณ S ในระนาบ UV คือวงกลมรัศมี 1 หน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$

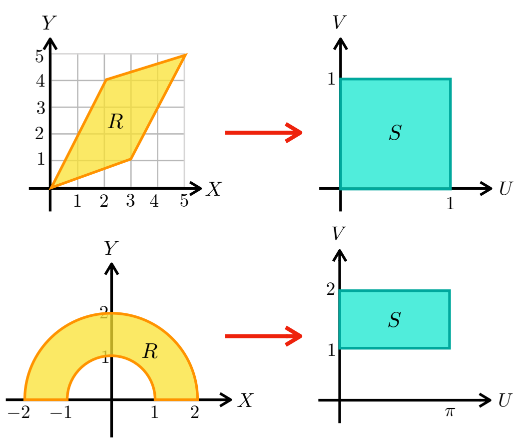
   (a) จงวาดบริเวณในระนาบ XY

   (b) จงหาความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ในระนาบ UV และระนาบ XY

3. กำหนดบริเวณ R ในระนาบ XY สมมติว่าบริเวณ R ถูกส่งไปเป็นบริเวณ S ในระนาบ UV

   (a) จงหาการแปลงที่สอดคล้องกับภาพที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ พร้อมทั้งตรวจสอบความถูกต้อง

   (b) จงหาความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ในระนาบ XY และระนาบ UV



4. กำหนดฟังก์ชัน

$$
\begin{aligned}
f(x,y,u,v,w) &= x^2y + u\sin v + wy^3 \\
g(x,y,u,v,w) &= e^{xy} + w\ln(1+v+y^2) + xu^2 \\
h(x,y,u,v,w) &= \sin(x+y+u+v)
\end{aligned}
$$

   จงคำนวณจาโคเบียนต่อไปนี้

   (a) $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$

   (b) $\dfrac{\partial(f,h)}{\partial(v,w)}$

   (c) $\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}$

   (d) $\dfrac{\partial(f,h,g)}{\partial(u,x,v)}$

5. กำหนดฟังก์ชัน

$$
\begin{aligned}
F(x,y,u,v) &= xu + yu - uv \\
G(x,y,u,v) &= u\sin(xy) \\
H(x,y,u,v) &= x^2 - y^2 + u^2 + v^2
\end{aligned}
$$

จงคำนวณจาโคเบียนต่อไปนี้ ที่จุด $(x,y,u,v) = (0,1,1,2)$

(a) $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$

(b) $\dfrac{\partial(G,F)}{\partial(u,x)}$

(c) $\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,u)}$

(d) $\dfrac{\partial(G,F,H)}{\partial(u,v,y)}$

6. กำหนดการแปลงเชิงเส้นที่นิยามโดย $x = u+v+w$, $y = u-v+w$, $z = u+v-w$

(a) จงพิจารณาบริเวณ R_{uvw} ในปริภูมิ UVW เมื่อบริเวณ R_{xyz} ในปริภูมิ XYZ คือลูกบาศก์ ซึ่ง $0 \le x,y,z \le 1$

(b) จงใช้การหาปริมาตรโดยตรงเพื่อแสดงว่า

$$
|J(x,y,z)| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \frac{V_{xyz}}{V_{uvw}}
$$

เมื่อ V_{xyz} คือปริมาตรของลูกบาศก์ R_{xyz} ในปริภูมิ XYZ และ V_{uvw} คือปริมาตรของบริเวณ R_{uvw}

7. พิจารณาระบบพิกัดทรงกลม ซึ่งมีการแปลงคือ $x = u\sin v\cos w, y = u\sin v\sin w$ และ $z = u\cos v$

(a) จงพิจารณาบริเวณ R_{xyz} ในปริภูมิ XYZ เมื่อบริเวณ R_{uvw} ในปริภูมิ UVW คือลูกบาศก์ ซึ่งปิดล้อมด้วย $u_0 \le u \le u_0 + \Delta u$, $v_0 \le v \le v_0 + \Delta v$, $w_0 \le w \le w_0 + \Delta w$ โดยที่ $u_0 \ne 0, v_0 \ne n\pi$ และ $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ เป็นจำนวนจริงบวกที่เล็กๆ

(b) จงใช้การหาปริมาตรโดยตรงเพื่อแสดงว่า

$$
\lim_{(\Delta u,\Delta v,\Delta w)\to(0,0,0)} \left(\frac{\text{ปริมาตรของ } R_{xyz}}{\text{ปริมาตรของลูกบาศก์ } R_{uvw}}\right) = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|
$$

8. ถ้า $u = \dfrac{x+y}{1-xy}$ และ $v = \tan^{-1} x + \tan^{-1} y$ แล้ว

(a) จงหา $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$

(b) จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง u และ v เมื่อ $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 0$

9. ถ้า $x = f(u,v), y = g(u,v), z = h(u,v)$ และ $F(x,y,z) = 0$ จงพิสูจน์ว่า

$$
\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}dx + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}dy + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dz = 0
$$

10. ถ้า x, y, z เป็นฟังก์ชันของ u, v, w และ u, v, w เป็นฟังก์ชันของ r, s, t จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,s,t)} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \cdot \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(r,s,t)}$$

11. สมมติให้ $F(u,v,w,x,y) = 0, G(u,v,w,x,y) = 0, H(u,v,w,x,y) = 0$ จากสมการดังกล่าว เราสามารถพิจารณาให้ตัวแปรสามตัวแปรในห้าตัวแปร เป็นตัวแปรตาม โดยมีอีกสองตัวแปรที่เหลือเป็นตัวแปรต้น เช่น หากพิจารณา $\frac{\partial v}{\partial y}$ เราจะเห็นว่า v เป็นตัวแปรตาม โดยที่ y เป็นตัวแปรต้น แต่เรายังไม่ทราบว่าตัวแปรอิสระที่เหลือเป็นตัวแปรอะไร เราจึงกำหนดสัญลักษณ์ $\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x$ หมายถึง การหา $\frac{\partial v}{\partial y}$ โดยที่ x เป็นค่าคงที่ และเป็นตัวแปรต้นอีกตัวหนึ่ง

    จงหา $\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x, \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_w, \left.\frac{\partial w}{\partial u}\right|_y$

12. ในทางเทอร์โมไดนามิกส์ ความสัมพันธ์ระหว่างความดัน P ปริมาตร V และอุณหภูมิ T กำหนดโดย $F(P,V,T) = 0$

    (a) จงหา $\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_V \left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_P$

    (b) จงแสดงว่า $\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_V \left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_P \left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T = -1$

1.9 การเปลี่ยนตัวแปรของปริพันธ์หลายชั้น

ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราเคยทำการเปลี่ยนตัวแปรของการหาปริพันธ์

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} (f(g(u))g'(u)du \tag{1.9.1}$$

เมื่อ g เป็นฟังก์ชันทางเดียวที่หาอนุพันธ์ได้ และเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งไม่ว่า g เป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือฟังก์ชันลด เราสามารถเขียนสมการ (1.9.1) ให้อยู่ในรูป

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta (f(g(u))|g'(u)|du \tag{1.9.2}$$

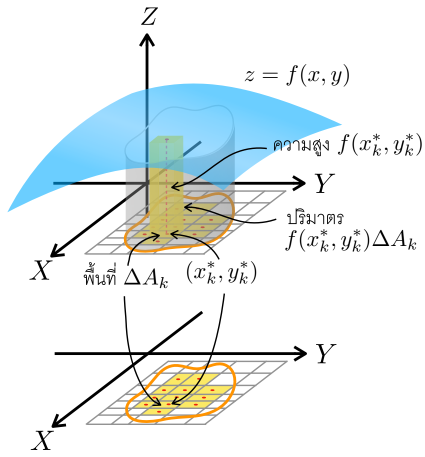
เมื่อ α, β เป็นขอบเขตของปริพันธ์ โดยที่ $\alpha < \beta$

จะเห็นว่า การเปลี่ยนตัวแปรดังกล่าวมีพจน์ $|g'(u)|$ ซึ่งทำให้เกิดการเปลี่ยนตัวแปรได้ ดังนั้น สำหรับกรณีปริพันธ์หลายชั้น การเปลี่ยนระบบพิกัดก็ควรดำเนินการสอดคล้องกัน ซึ่งเราได้พัฒนาแนวคิดของจาโคเบียนการแปลงแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา

จากสมบัติที่เกี่ยวข้องกับพื้นที่และปริมาตรระหว่างสองระบบพิกัดดังปรากฏในทฤษฎีบท 1.8.2 และ 1.8.5 ทำให้เราสามารถเปลี่ยนระบบพิกัดการอินทิเกรตของปริพันธ์หลายชั้นได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.9.1. (การเปลี่ยนตัวแปรของปริพันธ์สองชั้น)
ถ้าการแปลง $x = x(u,v), y = y(u,v)$ ส่งบริเวณ S ในระนาบ UV ไปยังบริเวณ R ในระนาบ XY และจาโคเบียน $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ ไม่เป็นศูนย์ และไม่เปลี่ยนเครื่องหมายใน S แล้ว จะได้ว่า

$$\iint_R f(x,y)dA_{xy} = \iint_S f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dA_{uv}$$



ภาพที่ 1.51. นิยามของปริพันธ์สองชั้นและบริเวณพื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉาก

ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราทราบว่าปริพันธ์สองชั้น $\iint_R f(x,y)dA_{xy}$ เปรียบเสมือนกับการหาปริมาตรที่มีพื้นที่ฐานคือ R และปิดล้อมด้านบน ซึ่งเป็นความสูงด้วย $f(x,y)$ โดยขั้นตอนโดยคร่าวๆ ในการหาปริพันธ์สองชั้นตามปกติ ดังภาพ 1.51 คือ

1. แบ่งบริเวณ R ออกเป็นตารางช่องเล็กๆ n ช่อง สมมติให้พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ ช่องที่ k คือ ΔA_k

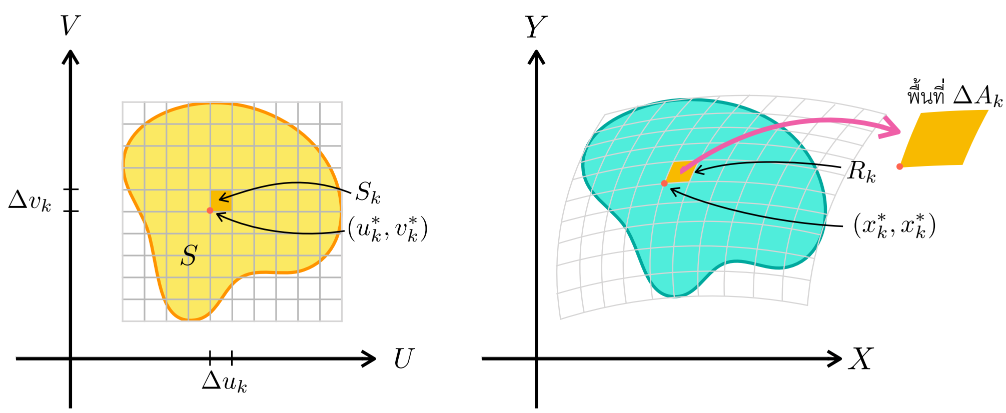
2. ในพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าช่องที่ k เลือกจุด (x_k^*, y_k^*) ซึ่งจะได้ความสูงของแท่งปริซึมฐานสี่เหลี่ยมนี้ ณ จุด (x_k^*, y_k^*) คือ $f(x_k^*, y_k^*)$ ทำให้ได้ปริมาตรของปริซึมฐานสี่เหลี่ยมคือ $f(x_k^*, y_k^*)\Delta k$ และผลรวมของปริมาตรของปริซึม n แท่งคือ

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$$

3. เมื่อเพิ่มจำนวนแท่งปริซึมให้ $n \to \infty$ จะทำให้ได้ปริมาตรที่ใกล้เคียงตามที่ต้องการนั่นคือ

$$\iint_R f(x,y)dA_{xy} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$$

ในกรณีที่มีการเปลี่ยนตัวแปรของการหาปริพันธ์สองชั้น เราสามารถพิจารณาปัญหาดังกล่าวได้ในทำนองคล้ายกัน ดังภาพ 1.52 กล่าวคือ



ภาพที่ 1.52. การส่งสี่เหลี่ยมบริเวณจากระนาบ UV ไปยังบริเวณในระนาบ XY

1. จากตารางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในระนาบ UV สมมติให้ช่องที่ k คือ S_k มีความกว้าง Δu_k และความสูง Δv_k ในที่นี้ เราจะเลือกจุด (u_k^*, v_k^*) โดยไม่เสียนัยทั่วไป เราจะเลือกจุด (u_k^*, v_k^*) เป็นจุดมุมซ้ายล่างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

2. การแปลง T ในสมมติฐานของทฤษฎีบท 1.9.1 ซึ่งแปลง $x = x(u,v), y = y(u,v)$ จะส่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า S_k ไปยังรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเชิงโค้ง R_k ในระนาบ XY และจุด (u_k^*, v_k^*) จะถูกส่งไปยังจุด $(x_k^*, y_k^*) = (x(u_k^*, v_k^*), y(u_k^*, v_k^*))$ ในบริเวณ R_k สมมติว่าพื้นที่ R_k แทนด้วย ΔA_k

3. จากความสัมพันธ์ของการแปลงของพื้นที่ ทำให้เราสามารถพิจารณาได้ว่า

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)dA_{xy} &\approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} f(x(u_k^*, v_k^*), y(u_k^*, v_k^*)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u_k \Delta v_k\end{aligned}$$

   โดยที่จาโคเบียนคำนวณที่จุด (u_k^*, v_k^*)

4. เมื่อให้ $n \to \infty$ ทำให้เราได้ว่า

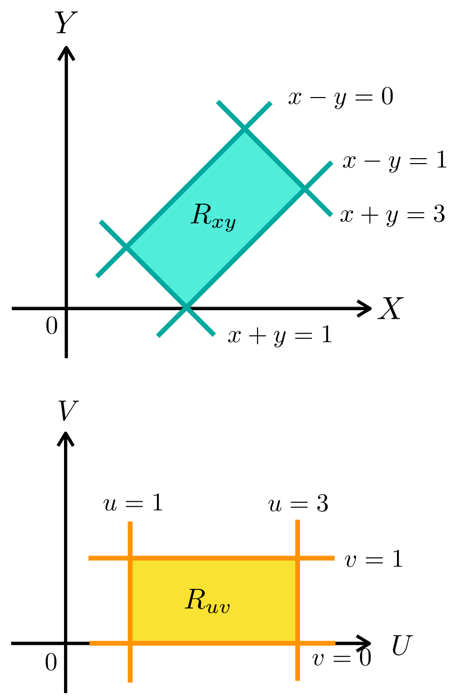
$$\iint_R f(x,y)dA_{xy} = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dA_{uv}$$

   ตามต้องการ

ตัวอย่าง 1.9.2. จงคำนวณ

$$\iint_R \frac{x-y}{x+y}\, dA$$

เมื่อ R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $x - y = 0, x - y = 1, x + y = 1, x + y = 3$



ภาพที่ 1.53. (บน) บริเวณในระนาบ XY (ล่าง) บริเวณในระนาบ UV

วิธีทำ. จะเห็นว่า การหาปริพันธ์โดยวิธีปกติทำได้ไม่ง่ายนัก เนื่องจากบริเวณที่หาปริพันธ์ไม่สามารถระบุขอบเขตได้ง่าย อย่างไรก็ตาม หากสังเกตจากตัวถูกปริพันธ์และขอบเขตของบริเวณที่หาปริพันธ์ จะเห็นว่า เราสมมติให้

$$u = x + y, \qquad v = x - y$$

ทำให้ขอบเขตของบริเวณในระนาบ XY เปลี่ยนแปลงเป็น $u = 1, u = 3, v = 0, v = 1$ ดังภาพ 1.53

เพื่อจะใช้ทฤษฎีบท 1.9.1 เราจะหาจาโคเบียนการแปลง $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ ดังนั้น เราจึงสร้างความสัมพันธ์ x, y ในพจน์ของ u, v นั่นคือ เราได้ว่า

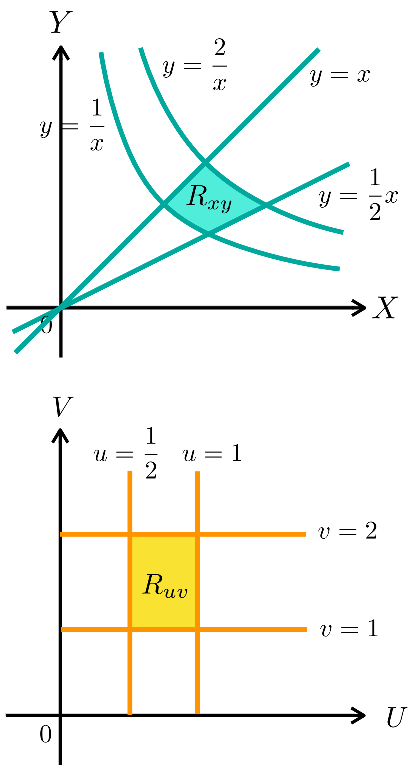
$$x = \frac{1}{2}(u+v), \qquad y = \frac{1}{2}(u-v)$$

ซึ่งเราได้ว่า

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

ดังนั้น เราจึงได้ปริพันธ์สองชั้น คือ

$$\begin{aligned}\iint_R \frac{x-y}{x+y} dA &= \iint_S \frac{u}{v}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dA_{uv} \\ &= \iint_S \frac{u}{v}\left|-\frac{1}{2}\right| dA_{uv} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_1^3 \frac{u}{v}\, du\, dv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 v \ln|u|\Big|_{u=1}^{3} dv \\ &= \frac{1}{2}\ln 3 \int_0^1 v\, dv = \frac{1}{4}\ln 3\end{aligned}$$



ภาพที่ 1.54. (บน) บริเวณในระนาบ XY (ล่าง) บริเวณในระนาบ UV

ตัวอย่าง 1.9.3. จงคำนวณ

$$\iint_R e^{xy}\, dA$$

เมื่อ R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$

วิธีทำ. เราจะเห็นว่า ตัวถูกปริพันธ์เป็นพจน์ของ e^{xy} ซึ่งการหาปริพันธ์บนบริเวณที่ปิดล้อมสามารถพิจารณาโดยวิธีปกติได้ยาก แต่หากเราทำการแปลง โดยพิจารณาขอบที่ปิดล้อม เขียนได้ในรูป

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{y}{x} = 1, \qquad xy = 1, \qquad xy = 2$$

ดังนั้น เราสามารถแปลงขอบเขต โดยให้

$$u = \frac{y}{x}, \qquad v = xy$$

ดังนั้น ขอบเขตในระนาบ UV จะเปลี่ยนแปลงเป็น $u = 1/2, u = 1, v = 1, v = 2$ ดังภาพ 1.54 ซึ่งเราสามารถหาความสัมพันธ์ x, y ในพจน์ของ u, v ได้โดย

$$x = \sqrt{u/v}, \qquad y = \sqrt{uv}$$

ซึ่งเราสามารถหาจาโคเบียนได้โดย

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2u}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2u}$$

ดังนั้น เราจึงได้ปริพันธ์สองชั้น คือ

$$\begin{aligned}\iint_R e^{xy}\, dA &= \iint_S e^{v}\left|-\frac{1}{2u}\right| dA_{uv} \\ &= \frac{1}{2}\iint_S \frac{1}{u}e^{v}\, dA_{uv} \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 \int_{1/2}^1 \frac{1}{u}e^{v}\, du\, dv\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 e^u \ln|u|\Big|_{u=1/2}^{1} dv$$
$$= \frac{1}{2}\ln 2\int_1^2 e^v\, dv = \frac{1}{2}(e^2 - e)\ln 2$$

หมายเหตุ. สังเกตว่า เราอาจใช้ทฤษฎีบท 1.8.14 ช่วยในการคำนวณจาโคเบียนได้ หากทราบว่าจาโคเบียนไม่เป็นศูนย์ เพื่อที่จะได้ไม่ต้องจัดรูป u, v ในเทอมของ x, y

ในทำนองเดียวกันกับปริพันธ์สองชั้น ทำให้เราสามารถได้ผลสำหรับปริพันธ์สามชั้นได้ตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.9.4. (การเปลี่ยนตัวแปรของปริพันธ์สามชั้น)
ถ้าการแปลง $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ ส่งบริเวณ S ในปริภูมิ UVW ไปยังบริเวณ R ในปริภูมิ XYZ และจาโคเบียน $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ ไม่เป็นศูนย์ และไม่เปลี่ยนเครื่องหมายใน S แล้ว จะได้ว่า

$$\iiint_R f(x, y, z)dR_{xyz} = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| dR_{uvw}$$

ดังนั้น จะเห็นว่า ในการศึกษาแคลคูลัสพื้นฐานที่มีการเปลี่ยนระบบพิกัดจากระบบพิกัดฉาก เป็นระบบพิกัดอื่นๆ เช่น ระบบพิกัดเชิงขั้ว ระบบพิกัดทรงกระบอก หรือระบบพิกัดทรงกลม การเปลี่ยนระบบพิกัดนั้นต้องใช้จาโคเบียนการแปลงทั้งสิ้น ซึ่งผู้อ่านได้เห็นความสัมพันธ์ดังกล่าวแล้วในตัวอย่าง 1.8.4, 1.8.7 และ 1.8.6

แบบฝึกหัดที่ 1.9

1. จงใช้การแปลง $u = x - 2y, v = 2x + y$ สำหรับคำนวณ
$$\iint_R \frac{x - 2y}{2x + y}\, dA$$
เมื่อ R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x - 2y = 1, x - 2y = 4, 2x + y = 1, 2x + y = 3$

2. จงใช้การแปลง $u = x + 2y, v = x - y$ สำหรับคำนวณ
$$\iint_R (x - y)e^{x^2 - y^2}\, dA$$
เมื่อ R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x + y = 0, x + y = 1, x - y = 1, x - y = 4$

3. จงใช้การแปลง $u = x^2 - y^2, v = x^2 + y^2$ สำหรับคำนวณ

$$\iint_R xy\, dA$$

เมื่อ R เป็นบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งที่ปิดล้อมด้วย $x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 4, x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 16$

4. จงใช้การแปลง $u = x, v = z - y, w = xy$ สำหรับคำนวณ

$$\iiint_G (z-y)^2 xy\, dV$$

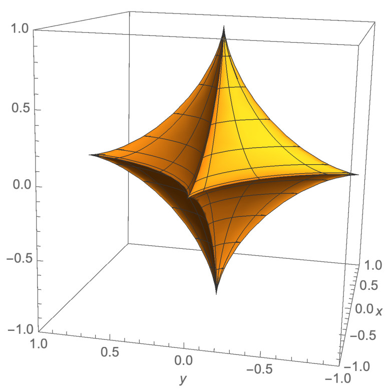
เมื่อ G เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิว $x = 1, x = 3, z = y, z = y + 1, xy = 2, xy = 4$

5. จากกฎลูกโซ่ของจาโคเบียน กล่าวคือ

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \cdot \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = 1$$

จงหาปริมาตร V ของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งปิดล้อมด้วยระนาบ $x + y + 2z = \pm 3, x - 2y + z = \pm 2, 4x + y + z = \pm 6$

6. จงเลือกการแปลงที่เหมาะสมสำหรับการเปลี่ยนตัวแปรการหาปริพันธ์สองชั้น เมื่อกำหนดบริเวณให้ดังนี้
   (a) $\displaystyle\iint_R \frac{y-4x}{y+4x}\, dA$ เมื่อ R ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = 4x, y = 4x + 2, y = 2 - 4x, y = 5 - 4x$
   (b) $\displaystyle\iint_R \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)}\, dA$ เมื่อ R ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = 0, y = x, x + y = \pi/4$
   (c) $\displaystyle\iint_R e^{(y-x)/(y+x)}\, dA$ เมื่อ R เป็นบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งซึ่งปิดล้อมด้วยสี่เหลี่ยมคางหมูที่มีจุดยอดคือ $(0,1), (1,0), (0,4), (4,0)$



ภาพที่ 1.55. ทรงกลมดาวเคราะห์น้อย

7. "ทรงกลมดาวเคราะห์น้อย" (asteroidal sphere) ดังภาพ 1.55 กำหนดดังสมการ

$$x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$$

จงหาปริมาตรของทรงกลมดาวเคราะห์น้อยโดยใช้ปริพันธ์สามชั้น เมื่อกำหนด

$$x = \rho(\sin\phi\cos\theta)^3, \quad y = \rho(\sin\phi\sin\theta)^3, \quad z = \rho(\cos\phi)^3$$

โดยที่ $0 \le \rho \le a, 0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi$

1.10 อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

จากนิยามของอนุพันธ์ย่อย หาก f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรของ x, y อนุพันธ์ย่อยเทียบกับแต่ละตัวแปรก็เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรเช่นเดียวกัน หากอนุพันธ์ย่อยของ $f_x(x, y)$ และ $f_y(x, y)$ หาค่าได้แล้ว เราจะเรียกอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ว่า อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง ซึ่งเราสามารถหาอนุพันธ์ย่อยของอนุพันธ์ย่อยได้เช่นเดียวกันกับฟังก์ชันตัวแปรเดียว โดยใช้นิยาม

บทนิยาม 1.10.1. ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และ f_x และ f_y มีค่าแล้ว อนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ f สามารถหาได้โดย

1. อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง f เทียบกับ x เขียนแทนด้วย f_{xx}, $\partial^2 f/\partial x^2$, $D_{xx}f(x, y)$ หรือ $f_{xx}(x, y)$ นิยามโดย

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_x(x + \Delta x, y) - f_x(x, y)}{\Delta x}$$

2. อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง f เทียบกับ y เขียนแทนด้วย f_{yy}, $\partial^2 f/\partial y^2$, $D_{yy}f(x, y)$ หรือ $f_{yy}(x, y)$ นิยามโดย

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_y(x, y + \Delta y) - f_y(x, y)}{\Delta y}$$

3. อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง f เทียบกับ x ก่อน แล้วจึงเทียบกับ y เขียนแทนด้วย f_{xy}, $\partial^2 f/\partial y \partial x$, $D_{xy}f(x, y)$ หรือ $f_{xy}(x, y)$ นิยามโดย

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(x, y + \Delta y) - f_x(x, y)}{\Delta y}$$

4. อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง f เทียบกับ y ก่อน แล้วจึงเทียบกับ x เขียนแทนด้วย f_{yx}, $\partial^2 f/\partial x \partial y$, $D_{yx}f(x, y)$ หรือ $f_{yx}(x, y)$ นิยามโดย

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(x + \Delta x, y) - f_y(x, y)}{\Delta x}$$

ถ้าลิมิตดังกล่าวมีค่า

สำหรับอนุพันธ์ย่อยอันดับสองในแบบที่ 3 และ 4 ตามนิยาม 1.10.1 จะเรียกว่า **อนุพันธ์ย่อยผสม** (mixed second-order partial derivatives) ทั้งนี้ อนุพันธ์ย่อยปกติ $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ อาจเรียกว่า อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง

เราสามารถหาอนุพันธ์อันดับที่สูงกว่าสองได้ในทำนองเดียวกัน ซึ่งจะเห็นว่า สำหรับอนุพันธ์ย่อยอันดับสาม จะมีอนุพันธ์ย่อยอันดับสามทั้งหมดแปดแบบ (2^3 รูปแบบที่เป็นไปได้นั่นเอง)

ตัวอย่าง 1.10.1. กำหนดให้ $f(x, y) = e^x \cos y + 2xy + y^2$ จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองทั้งหมดที่เป็นไปได้

วิธีทำ. จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} f_x &= e^x \cos y + 2y & \qquad f_y &= -e^x \sin y + 2x + 2y \\ f_{xx} &= e^x \cos y & f_{yy} &= -e^x \cos y \\ f_{xy} &= -e^x \sin y + 2 & f_{yx} &= -e^x \sin y + 2 \end{aligned}$$

1.10.1 เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการเท่ากันของอนุพันธ์อันดับสูง

จากตัวอย่าง 1.10.1 จะเห็นว่า อนุพันธ์ย่อยผสม $f_{xy} = f_{yx}$ คำถามที่น่าสนใจ คือ อนุพันธ์ย่อยผสม f_{xy} และ f_{yx} เท่ากันเสมอในทุกกรณีหรือไม่ ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า **ไม่**เสมอไปที่อนุพันธ์ย่อยผสมจะเท่ากัน

ตัวอย่างค้าน 1.10.2. (ฟังก์ชันเดียวกันกับตัวอย่าง 1.4.4) จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง f_{xy} และ f_{yx} เมื่อกำหนดฟังก์ชัน

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

วิธีทำ. จากตัวอย่าง 1.4.4 เราได้แสดงแล้วว่า

$$f_x(0,y) = \begin{cases} -y & ,y \neq 0 \\ 0 & ,y = 0 \end{cases}$$

และ

$$f_y(x,0) = \begin{cases} x & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$$

ดังนั้น อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง f_{xy} และ f_{yx} หาได้จาก

$$\begin{aligned} f_xy(0,0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(0, 0+\Delta y) - f_x(0,0)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = -1 \end{aligned}$$

และทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_yx(0,0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(0+\Delta x, 0y) - f_x(0,0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1 \end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า $f_{xy}(0,0) = -1 \neq 1 = f_{yx}(0,0)$

ก่อนอื่น จะขอนิยามชั้น (class) ของฟังก์ชัน ดังนี้

บทนิยาม 1.10.2. ให้ $V \subseteq \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิดที่ไม่เป็นเซตว่าง โดยที่ $f : V \to \mathbb{R}$ และ $p \in \mathbb{N}$ แล้ว

1. f จะเป็นฟังก์ชันในชั้น $\mathcal{C}^p$ บนเซต V ก็ต่อเมื่อ อนุพันธ์ย่อยอันดับ $k \leq p$ ของ f แต่ละตัว มีค่าและต่อเนื่องบนเซต V
2. f จะเป็นฟังก์ชันในชั้น $\mathcal{C}^\infty$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันในชั้น $\mathcal{C}^p$ บนเซต V สำหรับทุก $p \in \mathbb{N}$

ตัวอย่าง 1.10.3. ฟังก์ชัน $f(x,y) = e^{xy}$ เป็นฟังก์ชันในชั้น $\mathcal{C}^\infty$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า อนุพันธ์ย่อยแบบผสมของฟังก์ชันมีค่าเท่ากัน หาก อนุพันธ์ย่อยแบบผสมมีความต่อเนื่องบนเซตเปิด

ทฤษฎีบท 1.10.4. (ทฤษฎีบทของยัง : Young's Theorem)
ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่นิยามบนย่านจุดเปิดจุด $N((x_0, y_0); r)$ และอนุพันธ์ย่อย f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} หาค่าได้ใน $N((x_0, y_0); r)$

ถ้า f_{xy} และ f_{yx} มีความต่อเนื่องใน $N((x_0, y_0); r)$ แล้ว

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

พิสูจน์. ให้ (x_0, y_0) เป็นจุดในย่านจุดเปิดจุด $N((x_0, y_0); r)$ พิจารณา

$$D = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0) \quad (1.10.1)$$

เราจะนิยามฟังก์ชัน

$$\phi(x, y) = f(x + h, y) - f(x, y) \quad (1.10.2)$$
$$\psi(x, y) = f(x, y + k) - f(x, y) \quad (1.10.3)$$

ดังนั้น จะเห็นว่า D สามารถเขียนได้ในรูปของฟังก์ชัน ϕ, ψ ได้โดย

$$D = \phi(x_0, y_0 + k) - \phi(x_0, y_0)$$
$$D = \psi(x_0 + h, y_0) - \psi(x_0, y_0)$$

โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว (ทฤษฎีบท 1.4.2) จะได้ว่า มี $0 < \theta_1 < 1$ และ $0 < \theta_2 < 1$ ที่ทำให้

$$D = k\phi_y(x_0, y_0 + \theta_1 k) = k[f_y(x_0 + h, y_0 + \theta_1 k) - f_y(x_0, y_0 + \theta_1 k)]$$
$$D = h\psi_x(x_0 + \theta_2 h, y_0) = h[f_x(x_0 + \theta_2 h, y_0 + k) - f_x(x_0 + \theta_2 h, y_0)]$$

จากนั้น ใช้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมฟังก์ชันตัวแปรเดียวอีกครั้ง จะได้ว่า มี $0 < \theta_3 < 1$ และ $0 < \theta_4 < 1$ ที่ทำให้

$$D = hk[f_{yx}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_1 k)] \quad (1.10.4)$$
$$D = hk[f_{xy}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_4 k)] \quad (1.10.5)$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$f_{yx}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_1 k) = f_{xy}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_4 k)]$$

เนื่องจากข้อสมมติฐานที่ว่า f_{xy} และ f_{yx} มีความต่อเนื่องใน $N((x_0, y_0); r)$ จะได้ว่าเมื่อให้ $h \to 0$ และ $k \to 0$ แล้ว

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

ตามต้องการ $\square$

เราอาจลดเงื่อนไขการต่อเนื่องของอนุพันธ์ย่อยอันดับสองตัวใดตัวหนึ่งได้โดยที่อนุพันธ์ย่อยตัวใดตัวหนึ่งมีค่า ก็จะสามารถสรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ สำหรับรายละเอียดการพิสูจน์สามารถทำได้ในทำนองคล้ายกันโดยใช้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิม

ทฤษฎีบท 1.10.5. (ทฤษฎีบทของชวาซ : Schwarz's Theorem)
ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่นิยามบนย่านจุดเปิดจุด $N((x_0, y_0); r)$ ในโดเมนของ f ถ้าอนุพันธ์ย่อย f_y มีค่าใน $N((x_0, y_0); r)$ และ f_{yx} ต่อเนื่องที่ (x_0, y_0) แล้ว $f_{xy}(x_0, y_0)$ มีค่า และเท่ากับ $f_{yx}(x_0, y_0)$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถพิจารณาการสลับลำดับของอนุพันธ์ย่อยอันดับสูงได้หากอนุพันธ์ย่อยสอดคล้องกับเงื่อนไขในทฤษฎีบท 1.10.4 เช่น หากจะพิจารณาว่า

$$f_{xxy}(x, y) = f_{xyx}(x, y) = f_{yxx}(x, y)$$

ถ้าพิจารณาได้ว่า อนุพันธ์ย่อย f ต่อเนื่องในย่านจุดเปิดจุด $N((x_0, y_0); r)$ สำหรับบาง r เราสามารถใช้ทฤษฎีบท 1.10.4 แสดงได้ว่า $f_{xxy}(x, y) = f_{yxx}$ นั่นคือ

$$f_{yxx} = f_x(f_{yx}) = f_x(f_{xy}) = f_x(f_y(f_x)) = f_y(f_x(f_x)) = f_y(f_{xx}) = f_{xxy}$$

1.10.2 ปัญหาการเปลี่ยนตัวแปร

ในเรื่องจาโคเบียนของการแปลง เราสามารถใช้จาโคเบียนในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝงได้ดังทฤษฎีบท 1.8.8 กล่าวคือ ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร x, y ทำการเปลี่ยนตัวแปร x, y ในเทอมของตัวแปร u, v โดยความสัมพันธ์ $x = \phi(u, v), y = \psi(u, v)$ หากต้องการหาอนุพันธ์ของ z เทียบกับ u, v ผ่านตัวแปร x, y หรือหาอนุพันธ์ของ z เทียบกับ x, y ในเทอมของ u, v ได้

เราทราบเคยทราบว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned}$$

ดังนั้นโดยการแก้ระบบสมการ ทำให้เราสามารถแก้สมการเพื่อหา $\partial z/\partial x$ และ $\partial z/\partial y$ กล่าวคือ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v} \tag{1.10.6}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = C\frac{\partial z}{\partial u} + D\frac{\partial z}{\partial v} \tag{1.10.7}$$

เมื่อ $A = \dfrac{\partial y}{\partial v}\Big/ J$, $B = -\dfrac{\partial y}{\partial u}\Big/ J$, $C = -\dfrac{\partial x}{\partial v}\Big/ J$, $D = \dfrac{\partial x}{\partial u}\Big/ J$ โดยที่ J คือจาโคเบียน $J = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$

จะเห็นว่า สมการ (1.10.6) และ (1.10.7) เป็นสมการในพจน์ของ A, B, C, D และ $\partial z/\partial u, \partial z/\partial v$ ซึ่งไม่ปรากฏตัวแปร x, y

สร้างตัวดำเนินการจาก (1.10.6) และ (1.10.7) กำหนดโดย

$$\frac{\partial}{\partial x} = A\frac{\partial}{\partial u} + B\frac{\partial}{\partial v}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = C\frac{\partial}{\partial u} + D\frac{\partial}{\partial v}$$

เมื่อแทน z ในสมการ (1.10.6) ด้วย $\partial z/\partial x$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}\right) \\
&= \left(A\frac{\partial}{\partial u} + B\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}\right) \\
&= A\frac{\partial}{\partial u}\left(A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}\right) + B\frac{\partial}{\partial v}\left(A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}\right) \\
&= A^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2AB\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + B^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \left(A\frac{\partial A}{\partial u} + B\frac{\partial A}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial u} + A\left(B\frac{\partial B}{\partial u} + B\frac{\partial B}{\partial v}\right)
\end{aligned}$$

และเมื่อแทน z ในสมการ (1.10.7) ด้วย $\partial z/\partial y$ ก็จะได้ผลสำหรับ $\partial^2 z/\partial y^2$ เช่นกัน

เมื่อมีการเปลี่ยนตัวแปร ปัญหาที่เรามักสนใจคือ อนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชันที่ถูกเปลี่ยนตัวแปรไป จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรเมื่อเทียบกับตัวแปรเดิม ปัญหาเหล่านี้มีความสำคัญในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) เพื่อแปลงปัญหาให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น

ตัวอย่าง 1.10.6. ให้ V เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x, y และ $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ จงแสดงว่า

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}$$

พิสูจน์. พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial r} &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial V}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial V}{\partial y} \\
\frac{\partial V}{\partial \theta} &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = -r\sin\theta\frac{\partial V}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial V}{\partial y}
\end{aligned}$$

จากนั้น ทำการแก้ระบบสมการเพื่อหา $\partial V/\partial x$ และ $\partial V/\partial y$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\
\frac{\partial V}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

นิยามตัวดำเนินการ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\\ &= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\ &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\\ &\quad + \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\end{aligned}$$

และทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \sin^2\theta\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\\ &\quad - \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}$$

□

หมายเหตุ. .

1. สำหรับฟังก์ชัน V ในพจน์ของ x, y **ลาปลาเซียน** (Laplacian) ของ V เขียนแทนด้วย $\nabla^2 V$ นิยามโดย

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

   สมการ $\nabla^2 V = 0$ เรียกว่า สมการลาปลาเซียน (Laplacian equation) และฟังก์ชัน V ที่สอดคล้องกับ $\nabla^2 V = 0$ จะเรียกว่า ฟังก์ชันฮาร์โมนิค (harmonic function)

2. ถ้าฟังก์ชัน V สอดคล้องกับ $\nabla^4 V = 0$ แล้ว จะเรียก f ว่า ฟังก์ชันไบฮาร์โมนิค (biharmonic function) โดยที่กำหนดตัวดำเนินการ

$$\nabla^4 = \nabla^2(\nabla^2), \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}, \nabla^2 = \nabla(\nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

3. สมการ (1.10.6) ด้านขวา ซึ่งเกิดจากการแปลงพิกัดฉากเป็นพิกัดเชิงขั้ว จะเรียกว่า รูปเชิงขั้วของสมการลาปลาซ (the polar form of Laplacian equation)

แบบฝึกหัดที่ 1.10

1. กำหนดให้ $\phi(x, y) = x^4 y + e^{x^2 y}$
   (a) จงหา $\phi_{xx}, \phi_{xy}, \phi_{yx}, \phi_{yy}$
   (b) $\phi_{xy} = \phi_{yx}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

2. ให้ $z = f(u)$ และ $u = g(x, y)$ จงแสดงว่า
   (a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{dz}{du}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{d^2 z}{du^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2$
   (b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{dz}{du}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{d^2 z}{du^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$
   (c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{dz}{du}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \dfrac{d^2 z}{du^2}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}$

3. กำหนดให้ $z = x^2 \arctan(y/x)$ จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ที่ $(1, 1)$

4. กำหนดให้ $w = \ln(e^r + e^s + e^t + e^u)$ จงแสดงว่า $w_{rstu} = -6e^{r+s+t+u-4w}$
   (คำใบ้: ใช้ความสัมพันธ์ $e^w = e^r + e^s + e^t + e^u$)

5. กำหนดให้ $U = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ จงแสดงว่า U เป็นไม่ฟังก์ชันฮาร์โมนิค

6. กำหนดให้ $z = \arctan\left(\dfrac{2xy}{x^2 - y^2}\right)$
   (a) จงแสดงว่า z เป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิค
   (b) จงใช้การแปลง $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ เพื่อแสดงว่า การแปลงดังกล่าวสอดคล้องกับรูปเชิงขั้วของสมการลาปลาซ

7. กำหนดฟังก์ชัน $u(x, y), v(x, y)$ **สมการโคชี่-รีมันน์** (Cauchy-Riemann equations) คือสมการที่สอดคล้องกับ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

   (a) จงแสดงว่า $u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy$ สอดคล้องกับสมการโคชี่-รีมันน์
   (b) กำหนดการแปลง $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ จงหา**รูปเชิงขั้วของสมการโคชี่-รีมันน์** (the polar form of the Cauchy-Riemann equations)

8. กำหนดให้ $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ จงแสดงว่า

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

9. กำหนดฟังก์ชัน

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) จงแสดงว่า f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่เพียงพอของทฤษฎีบท 1.10.4 (คำใบ้: แสดงว่า f_{yx} ไม่ต่อเนื่องที่ $(0,0)$

(b) จงแสดงว่า f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่เพียงพอของทฤษฎีบท 1.10.5 (คำใบ้: แสดงว่า f_x หรือ f_y หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $(0,0)$

(c) จงแสดงว่า $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$

10. ถ้า $F(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 2 แล้ว จงแสดงว่า

$$x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2F$$

11. กำหนดการแปลง $u = x - ct, v = x + ct$ สำหรับค่าคงที่ c จงแสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} + c^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ สามารถลดรูปได้เป็นสมการ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$

12. กำหนดให้ V เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x, y และ $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

(a) จงหา $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ ในเทอมของ $\partial V/\partial r$ และ $\partial V/\partial \theta$

(b) จงแสดงว่า $\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = -\dfrac{\cos 2\theta}{r^2} = \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial x}$

(c) จงแสดงว่า $\dfrac{\partial^2 r}{\partial y \partial x} = -\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{r} = \dfrac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}$

1.11 อนุกรมเทเลอร์สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปร

ในแคลคูลัสของฟังก์ชันตัวแปรเดียว สมมติให้ f หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับที่จุด x_0 แล้ว **อนุกรมเทเลอร์** (Taylor series) ของ f กระจายรอบจุด $x = x_0$ สามารถเขียนได้เป็น

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+...$$

ทั้งนี้ เมื่อกระจายพหุนามเทเลอร์รอบจุด $x = x_0$ ถึงพจน์ที่ n จะได้ว่า

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n+R_{n+1}$$

โดยที่ R_{n+1} คือพจน์เศษเหลือ นั่นคือ $R_{n+1} = \dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h)$ สำหรับบาง $0 < \theta < 1$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถขยายแนวคิดของอนุกรมเทเลอร์จากฟังก์ชันตัวแปรเดียว ไปสู่อนุกรมเทเลอร์ของฟังก์ชันหลายตัวแปรได้ ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.11.1. ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรซึ่งอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ $n+1$ มีความต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0) โดยที่จุด (x_0+h, y_0+k) อยู่ในโดเมนแล้ว มีจำนวนจริงบวก $0 < \theta < 1$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) &+ \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) + \dots \\ &+ \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) + R_{n+1} \end{aligned}$$

เมื่อ $\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f = hf_x + kf_y, \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}$ โดยที่ $\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$ อยู่ในรูปการกระจายทวินาม และ**พจน์เศษเหลือ** (remainder term)

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$$

พิสูจน์. ให้ $x = x_0 + th, y = y_0 + tk$ สำหรับตัวแปรเสริม t ซึ่ง $0 \le t \le 1$ นิยามฟังก์ชัน

$$f(x, y) = f(x_0+th, y_0+tk) = \phi(t)$$

เนื่องจากอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ n ของ f ต่อเนื่องในโดเมน ดังนั้น $\phi^(n)$ ต่อเนื่องบน $[0, 1]$ และได้ว่า

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f \\ \phi''(t) &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f \\ &\vdots \\ \phi^{(n)}(t) &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อพิจารณาอนุกรมเทเลอร์ของ $\phi(t)$ รอบ $t = 0$ จะได้ว่า

$$\phi(t) = \phi(0) + t\phi'(0) + \frac{t^2}{2!}\phi''(0) + \dots + \frac{t^n}{n!}\phi^{(0)}(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\phi^{(n+1)}(\theta t)$$

สำหรับบาง $0 < \theta < 1$ ถ้าให้ $t = 1$ จะได้ว่า

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \frac{1}{2!}\phi''(0) + \dots + \frac{1}{n!}\phi^{(0)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}\phi^{(n+1)}(\theta)$$

แต่เนื่องจาก $\phi(1) = f(x_0 + h, y_0 + k)$ และ $\phi(0) = f(x_0, y_0)$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
\phi'(0) &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) \\
\phi''(0) &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) \\
&\vdots \\
\phi^{(n+1)}(\theta) &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)
\end{aligned}$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) &+ \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) \\
&+ \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) + \dots \\
&+ \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) + R_{n+1}
\end{aligned}$$

และมีพจน์พจน์เศษเหลือคือ

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

ซึ่ง $0 < \theta < 1$ □

ตัวอย่าง 1.11.2. จงกระจายอนุกรมเทเลอร์ของฟังก์ชัน $f(x, y) = \arctan(y/x)$ รอบจุด $(1, 1)$ จนถึงพจน์ที่มีระดับขั้น 2

วิธีทำ. จากทฤษฎีบท 1.11.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \arctan\frac{y}{x} & f(1, 1) &= \frac{\pi}{4} \\
f_x(x, y) &= -\frac{y}{x^2 + y^2} & f_x(1, 1) &= -\frac{1}{2} \\
f_y(x, y) &= \frac{x}{x^2 + y^2} & f_y(1, 1) &= \frac{1}{2} \\
f_{xx}(x, y) &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} & f_{xx}(1, 1) &= \frac{1}{2} \\
f_{xy}(x, y) &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & f_{xy}(1, 1) &= 0 \\
f_{yy}(x, y) &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} & f_{yy}(1, 1) &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

สมมติให้ $x = 1 + h, y = 1 + k$ โดยทฤษฎีบท 1.11.1 จะได้ว่า

$$\arctan\frac{y}{x} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2!}\left[\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(y-1)^2)\right] + \dots$$

ทั้งนี้ หากกระจายถึงพจน์ที่มีระดับขั้น 2 จะสามารถหาพจน์เศษเหลือได้คือ

$$R_3 = \frac{1}{3!}\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(1+\theta(x-1), 1+\theta(y-1))$$

โดยที่ $0 < \theta < 1$

เราอาจแทนตัวดำเนินการ $D^n = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$ ดังนั้น อนุกรมเทเลอร์ในทฤษฎีบท 1.11.1 สามารถเขียนได้ในรูป

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) &+ Df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}D^2 f(x_0,y_0) \\ &+ \ldots + \frac{1}{n!}D^n f(x_0,y_0) + R_{n+1} \end{aligned}$$

โดยที่ $\frac{1}{(n+1)!}D^{(n+1)}f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$

ทั้งนี้ เราสามารถขยายแนวคิดของอนุกรมเทเลอร์ดังกล่าวในกรณีที่มีฟังก์ชันมากกว่า 2 ตัวแปรได้ โดยใช้การเขียนสัญลักษณ์แบบการกระจายทวินามเช่นกัน

นอกจากรูปแบบที่ได้กล่าวมาข้างต้นแล้ว เราอาจเขียนอนุกรมเทเลอร์ได้อีกรูปแบบ กล่าวคือ เมื่อให้ $x = x_0 + h, y = y_0 + k$ จะได้ว่า อนุกรมเทเลอร์ของ f รอบจุด (x_0, y_0) เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right] f(x_0,y_0) \\ &+ \frac{1}{2!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(x_0,y_0) + \ldots \\ &+ \frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0,y_0) + R_{n+1} \end{aligned}$$

โดยที่

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(x_0+(x-x_0)\theta, y_0+(y-y_0)\theta)$$

ซึ่ง $0 < \theta < 1$

ตัวอย่าง 1.11.3. จงเขียนพหุนาม $x^2y + 3y - 2$ ในพจน์ของ $x - 1$ และ $y + 2$ โดยกระจายอนุกรมเทเลอร์รอบจุด $(x_0, y_0) = (1, -2)$

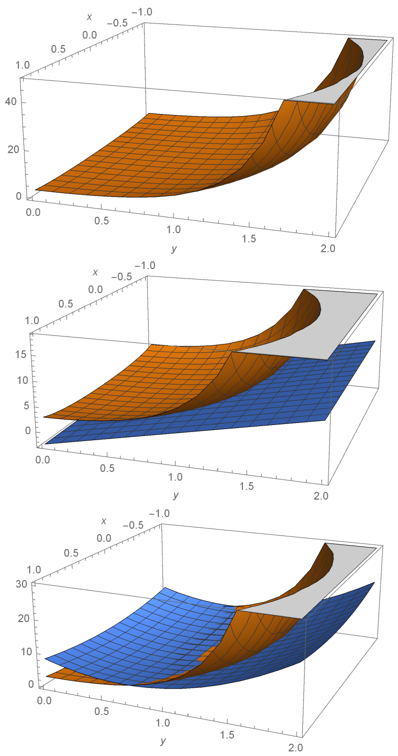
วิธีทำ. จากทฤษฎีบท 1.11.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2y + 3y - 2 & f(1,-2) &= -10 \\ f_x(x,y) &= 2xy & f_x(1,-2) &= -4 \\ f_y(x,y) &= x^2 + 3 & f_y(1,-2) &= 4 \\ f_{xx}(x,y) &= 2y & f_{xx}(1,-2) &= -4 \\ f_{xy}(x,y) &= 2x & f_{xy}(1,-2) &= 2 \\ f_{yy}(x,y) &= 0 & f_{yy}(1,-2) &= 0 \end{aligned}$$

$$f_{xxx}(x,y) = 0 = f_{yyy}(x,y)$$
$$f_{yxx}(1,-2) = 2 = f_{xxy}(1,-2)$$

ซึ่งจะเห็นว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับสี่เป็นต้นไปทั้งหมด มีค่าเป็นศูนย์ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
x^2y+3y-2 &= -10-(x-1)\ +4(y+2)+\frac{1}{2}[-4(x-1)^2+4(x-1)(y+2)] \\
&\quad +\frac{1}{3!}3(x-1)^2(y+2)(2)+0 \\
&= -10-(x-1)\ +4(y+2)-2(x-1)^2+2(x-1)(y+2) \\
&\quad +(x-1)^2(y+2)
\end{aligned}$$



ภาพที่ 1.56. (บน) กราฟของ f,(กลาง) กราฟของ f และการประมาณด้วยระนาบ, (ล่าง) กราฟของ f และการประมาณด้วยพาราโบลอยด์

ในกรณีของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราสามารถทำการประมาณค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วยพหุนามเทเลอร์ได้ ซึ่งมีความหมายคือ การหาเส้นโค้งพหุนามที่จุด $x = x_0$ ซึ่งถ้าเราเลือกจุดที่อยู่ใกล้ๆ x_0 ก็จะได้เส้นกราฟของ $p_n(x)$ ที่ใกล้เคียง $f(x)$ ในย่านใกล้ๆ x_0 ในทำนองเดียวกัน สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร เราสามารถหาพื้นผิวที่ใช้ในการประมาณค่าของพื้นผิวเดิมได้เช่นกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.11.4. จงประมาณพื้นผิวของฟังก์ชัน $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ ในย่านใกล้เคียงจุด $P_0(0,1,e)$

วิธีทำ. พื้นผิวของ f แสดงดังภาพ 1.56 (บน) จะเห็นว่าฟังก์ชัน $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ มีอนุพันธ์ย่อยที่ต่อเนื่องสำหรับทุกอันดับ ดังนั้น เราจึงสามารถประมาณค่าของ f รอบจุด $(x,y) = (0,1)$ ได้โดยใช้อนุกรมเทเลอร์ กล่าวคือ ถ้าทำการประมาณค่าด้วยพหุนามเทเลอร์ระดับขั้น 1 จะได้ว่า

$$z = f(x,y) \approx f(0,1) + xf_x(0,1) + (y-1)f_y(0,1)$$

นั่นคือ พื้นผิวของ f ใกล้ๆ จุด P สามารถประมาณได้โดยระนาบ

$$z = e + 2e(y-1)$$

ดังภาพ 1.56 (กลาง) และทำนองเดียวกัน ถ้าทำการประมาณ $f(x,y)$ ด้วยพหุนามเทเลอร์ระดับขั้น 2 จะทำให้ได้พื้นผิวประมาณ

$$\frac{z}{e} = \frac{2}{3} + x^2 + 3(y-\frac{2}{3})^2$$

ดังภาพ 1.56 (ล่าง)

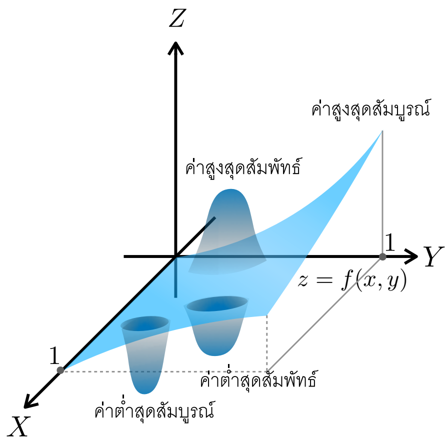
แบบฝึกหัดที่ 1.11

1. จงกระจายพจน์ $x^4 + x^2y^2 - y^4$ รอบจุด $(1,1)$ จนถึงระดับขั้น 2 พร้อมทั้งหา R_3
2. จงกระจายพจน์ $\sqrt{1-x^2-y^2}$ รอบจุด $(0,0)$ จนถึงระดับขั้น 2 พร้อมทั้งหา R_3
3. จงกระจายอนุกรมเทเลอร์ของ $\sin x \sin y$ รอบจุด $(0,0)$ จนถึงระดับขั้น 4) และเปรียบเทียบผลกับการหาผลคูณระหว่างอนุกรมเทเลอร์ของ $\sin x$ และ $\sin y$
4. จงแสดงว่า การกระจาย $\sin xy$ ในรูปของกำลังของ $x-1$ และ $y - \frac{\pi}{2}$ จนถึงระดับขั้น 2 อยู่ในรูป
$$1 - \frac{1}{8}\pi^2(x-1)^2 - \frac{1}{2}\pi(x-1)\left(y-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2$$
5. จงกระจาย $e^x \arctan y$ รอบจุด $(1,1)$ จนถึงระดับขั้น 2 ในรูปของกำลังของ $(x-1)$ และ $(y-1)$
6. จงแสดงว่า สำหรับ $0 < \theta < 1$ แล้ว
$$\sin x \sin y = xy - \frac{1}{6}[(x^3+3xy^2)\cos\theta x \sin\theta y + (y^3+3x^2y)\sin\theta x \cos\theta y]$$
7. จงแสดงว่า
$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{x+y-2}{2+\theta(x+y-2)}$$
เมื่อ $0 < \theta < 1, x > 0, y > 0$ (คำใบ้ : กระจายอนุกรมเทเลอร์ โดยให้พจน์เศษเหลือเป็นพจน์ที่มีอนุพันธ์อันดับหนึ่ง)

1.12 ค่าสูงสุดและต่ำสุด

หนึ่งในการประยุกต์ที่สำคัญในทางคณิตศาสตร์ คือการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดจากฟังก์ชันที่กำหนดให้ ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราได้ศึกษาวิธีการหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์และค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน ทั้งฟังก์ชันตัวแปรเดียวและฟังก์ชันหลายตัวแปร

ในหัวข้อนี้เราจะเริ่มต้นจากการทบทวนนิยามพื้นฐาน จากนั้นจะทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เคยศึกษาในแคลคูลัสพื้นฐาน และศึกษาการหาค่าเหมาะที่สุดโดยวิธีพื้นฐาน โดยในที่นี้เราจะศึกษาค่าสุดขีดของฟังก์ชันสองตัวแปรและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง



ภาพ ที่ 1.57. ค่า สุดขีด สัมพัทธ์ และสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน

บทนิยาม 1.12.1. ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรของ x, y

1. จะกล่าวว่า f มี**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์** (relative maximum) ที่จุด (x_0, y_0) ถ้ามีย่านจุดเปิด $N((x_0, y); r)$ ซึ่ง $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ สำหรับทุก $(x, y) \in N((x_0, y); r)$
2. จะกล่าวว่า f มี**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์** (absolute maximum) ที่จุด (x_0, y_0) ถ้า $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ สำหรับทุก (x, y) ในโดเมนของ f
3. จะกล่าวว่า f มี**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** (relative minimum) ที่จุด (x_0, y_0) ถ้ามีย่านจุดเปิด $N((x_0, y); r)$ ซึ่ง $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ สำหรับทุก $(x, y) \in$

$N((x_0, y); r)$

4. จะกล่าวว่า f มี**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์** (absolute minimum) ที่จุด (x_0, y_0) ถ้า $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ สำหรับทุก (x, y) ในโดเมนของ f

ถ้า f มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ จะเรียกว่า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (relative extremum) และถ้า f มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมบูรณ์ จะเรียกว่า f มีค่าสุดขีดสัมบูรณ์ (absolute extremum) ภาพ 1.57 แสดงให้เห็นถึงค่าสุดขีดต่าง ๆ ในบริเวณที่กำหนด

การพิจารณาค่าสุดขีดสัมบูรณ์จำเป็นที่จะต้องพิจารณาค่าของฟังก์ชันบริเวณขอบของบริเวณที่สนใจด้วย เราจะยกทฤษฎีดังกล่าวโดยไม่พิสูจน์

ทฤษฎีบท 1.12.1. (ทฤษฎีบทค่าสุดขีด Extremum-value Theorem)
ถ้า $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณ R ซึ่งเป็นบริเวณปิดและมีขอบเขตแล้ว f มีทั้งค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์บน R

เราจะเริ่มต้นหาค่าสุดขีดจากการหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ ซึ่งก่อนอื่นเราจะพิจารณาสมบัติที่เกี่ยวข้อง เมื่อฟังก์ชันมีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.12.2. ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่จุด (x_0, y_0) และอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ f มีค่าที่จุดดังกล่าวแล้ว จะได้ว่า

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{และ} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

พิสูจน์. เราจะพิสูจน์กรณี f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ สำหรับกรณีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์สามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน

สมมติว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด (x_0, y_0) ดังนั้น จะมีย่านจุดเปิด $N((x_0, y); r)$ ที่ทำให้ $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ สำหรับทุก $(x, y) \in N((x_0, y); r)$ จะแสดงว่า $f_x(x_0, y_0) = 0$

ดังนั้น สำหรับจุด $(x_0 + \Delta x, y_0) \in N((x_0, y); r)$ จะได้ว่า $f(x_0 + \Delta x, y_0) \leq f(x_0, y_0)$ นั่นคือ

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \leq 0 \tag{1.12.1}$$

ต่อมา หารอสมการ (1.12.1) ด้วย Δx ทั้งอสมการ ทำให้ต้องแบ่งกรณีดังนี้
<u>ถ้า $\Delta x > 0$</u> จะได้อสมการ

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \leq 0$$

ดังนั้น เมื่อให้ $\Delta x \to 0^+$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \leq 0$$

<u>ถ้า $\Delta x < 0$</u> จะได้อสมการ

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \geq 0$$

ดังนั้น เมื่อให้ $\Delta x \to 0^-$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} \geq 0$$

แต่เนื่องจาก $f_x(x_0,y_0)$ หาค่าได้ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

จากอสมการทั้งสอง จึงได้ว่า

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} = 0$$

นั่นคือ $f_x(x_0,y_0) = 0$ ตามต้องการ

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถแสดงได้ว่า $f_y(x_0,y_0) = 0$ รวมถึงกรณีที่ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ก็สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันว่า $f_x(x_0,y_0) = 0$ และ $f_y(x_0,y_0) = 0$ $\square$

เราทราบว่าสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว จุดวิกฤติ $x = x_0$ ของฟังก์ชัน f คือจุด x_0 ที่ทำให้ $f'(x_0) = 0$ หรือ f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $x = x_0$ ดังนั้นเราจึงสามารถขยายไปสู่กรณีฟังก์ชันสองตัวแปร ดังนี้

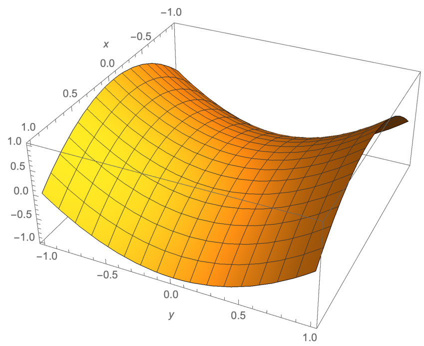
บทนิยาม 1.12.2. จุด (x_0,y_0) ในโดเมนของฟังก์ชัน $f(x,y)$ จะเรียกว่า **จุดวิกฤติ** (critical point) ถ้า $f_x(x_0,y_0) = 0$ และ $f_y(x_0,y_0) = 0$ หรืออนุพันธ์ย่อยตัวใดตัวหนึ่งหรือทั้งหมดของ f ที่จุด (x_0,y_0) ไม่มีค่า

จากทฤษฎีบท 1.12.2 จะเห็นว่า ค่าสุดขีดสัมพัทธ์เกิดขึ้นที่จุดวิกฤติ อย่างไรก็ตาม หากเราพิจารณาจุดวิกฤติ อาจมีบางสุดวิกฤติที่ไม่ให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ นั่นคือบทกลับของทฤษฎีบท 1.12.2 ไม่จริงเสมอไป ดังตัวอย่างค้านต่อไปนี้

ตัวอย่างค้าน 1.12.3. พิจารณาไฮเพอร์โบลิคพาราโบลอยด์ ดังภาพ 1.58 กำหนดดังสมการ

$$f(x,y) = y^2 - x^2$$

จะเห็นว่า อนุพันธ์ย่อย $f_x(x,y) = -2x$ และ $f_y(x,y) = 2y$ ซึ่งจะพบว่า $f_x(0,0) = 0$ และ $f_y(0,0) = 0$ แต่ f ไม่เกิดทั้งค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(0,0)$



ภาพที่ 1.58. กราฟของ $f(x,y) = y^2 - x^2$ ซึ่งเกิดจุดอานม้า

จุดที่เกิดเหตุการณ์ดังกล่าวตามตัวอย่างค้าน 1.12.3 จะนิยามดังนี้

บทนิยาม 1.12.3. สำหรับฟังก์ชัน $z = f(x,y)$ แล้ว จุด (x_0,y_0) เป็น**จุดอานม้า** (saddle point) ของฟังก์ชัน f ถ้ามีระนาบแนวตั้งสองระนาบที่ต่างกันที่ผ่านจุด (x_0,y_0) ซึ่งรอยตัดระหว่างพื้นผิว z กับระนาบหนึ่งมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ (x_0,y_0) และอีกระนาบหนึ่งมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ (x_0,y_0)

ดังนั้น จุด $(0,0)$ ในตัวอย่าง 1.12.3 เป็นจุดวิกฤติที่เป็นจุดอานม้า

คำถามที่น่าสนใจคำถามหนึ่งคือ เราจะสามารถจำแนกลักษณะของค่าของฟังก์ชันที่

เกิดจากจุดวิกฤติได้หรือไม่ ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะตอบคำถามดังกล่าว

ทฤษฎีบท 1.12.4. ให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรโดยที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งและสองต่อเนื่องในย่านจุดเปิด $N((x_0,y);r)$ และสมมติว่า $f_x(x_0,y_0) = 0 = f_y(x_0,y_0)$ แล้ว

1. ถ้า $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) > 0$ และ $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ แล้ว $f(x_0,y_0)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f
2. ถ้า $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) > 0$ และ $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ แล้ว $f(x_0,y_0)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f
3. ถ้า $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) < 0$ แล้ว จุด (x_0,y_0) เป็นจุดอานม้าของ f
4. ถ้า $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) = 0$ แล้ว ไม่สามารถสรุปได้

แนวคิด. ในส่วนนี้เราจะแสดงว่า $f(x_0,y_0)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หรือสูงสุดสัมพัทธ์ ดังนั้น เราจึงหยิบจุด (x_0+h, y_0+k) ใด ๆ ในย่านจุดเปิด $N((x_0,y);r)$ เพื่อจะแสดงว่า ถ้า $f(x_0,y_0) \geq f(x_0+h,y_0+k)$ แล้ว $f(x_0,y_0)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และทำนองเดียวกันก็จะแสดงว่า ถ้า $f(x_0,y_0) \leq f(x_0+h,y_0+k)$ แล้ว $f(x_0,y_0)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

พิสูจน์. สมมติให้จุด (x_0+h,y_0+k) เป็นจุดในย่านจุดเปิด $N((x_0,y);r)$ จากการกระจายอนุกรมเทเลอร์จนถึงพจน์ที่มีระดับขั้น 1 พร้อมพจน์เศษเหลือ จะได้ว่าสำหรับ $0<\theta<1$

$$\begin{aligned}f(x_0+h,y_0+k) = \;& f(x_0,y_0) + [hf_x(x_0,y_0) + kf_y(x_0,y_0)]\\ &+\frac{1}{2!}\left[h^2 f_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\right.\\ &\left.+2hkf_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k) + k^2 f_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\right]\end{aligned}$$

เนื่องจาก $f_x(x_0,y_0) = 0 = f_y(x_0,y_0)$ และเนื่องจากอนุพันธ์ย่อยอันดับสองมีความต่อเนื่องที่ (x_0,y_0) จึงได้ว่า มี ρ_1,ρ_2,ρ_3 ที่เป็นฟังก์ชันของ h,k ซึ่ง $\rho_1,\rho_2,\rho_3 \to 0$ เมื่อ $(h,k)\to(0,0)$ ที่ทำให้

$$\begin{aligned}f_{xx}(x_0+\theta h,y_0+\theta k) - f_{xx}(x_0,y_0) &= \rho_1\\ f_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k) - f_{xy}(x_0,y_0) &= \rho_2\\ f_{yy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k) - f_{yy}(x_0,y_0) &= \rho_3\end{aligned}$$

ดังนั้น เราเขียน $f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0)$ ได้ในรูป

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}[f_{xx}(x_0,y_0)h^2+2f_{xy}(x_0,y_0)hk+f_{yy}(x_0,y_0)k^2+\rho] \tag{1.12.2}$$

เมื่อ $\rho = \rho_1+\rho_2+\rho_3 \to 0$ เมื่อ $(h,k)\to(0,0)$ และไม่ทราบเครื่องหมายของ ρ ดังนั้น เราจึงจะพิจารณาเครื่องหมายตามแต่ละกรณีของ $f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0)$ ซึ่ง จะ ขึ้น อยู่ กับ เครื่องหมาย ของ พจน์ $f_{xx}(x_0,y_0)h^2 +$

$2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2 + \rho$ ดังนี้

สมมติให้ $G = f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2$ ดังนั้น สมการ (1.12.2) จะพิจารณาได้เป็น

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}[G + \rho] \tag{1.12.3}$$

สมมติให้ $f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$ จะเห็นว่า G เขียนได้อยู่ในรูป

$$G = \frac{(f_{xx}(x_0, y_0)h + f_{xy}(x_0, y_0)k)^2 + k^2(f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0))}{f_{xx}(x_0, y_0)} \tag{1.12.4}$$

สำหรับพจนทางขวามือ เราสามารถพิจารณาเป็นกรณีต่าง ๆ ได้ดังนี้

1. **กรณี G ไม่เป็นศูนย์และไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมาย** เนื่องจาก $\rho \to 0$ เมื่อ $(h, k) \to (0, 0)$ จะได้ว่า เครื่องหมายของ $G + \rho$ คือเครื่องหมายเดียวกันกับ G ดังนั้น เครื่องหมายของ $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ ก็จะขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของ G

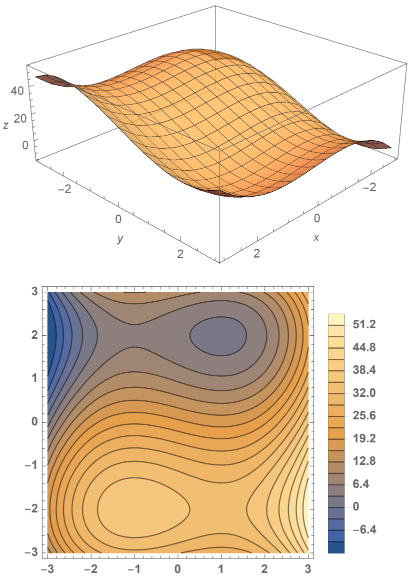
2. **กรณี G สามารถเปลี่ยนเครื่องหมายได้** เนื่องจาก $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ และ G มีเครื่องหมายเหมือนกัน เมื่อ ρ เล็กๆ ดังนั้น $f(x_0, y_0)$ ไม่เป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์

3. **กรณี G เป็นศูนย์** จะเห็นว่าเครื่องหมายของ $f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)$ ขึ้นอยู่กับ ρ เราจึงไม่สามารถสรุปได้

จาก สมการ (1.12.3) จะ พบ ว่า เครื่องหมาย ของ G ขึ้น อยู่ กับ เครื่องหมาย ของ $(f_{xx}(x_0, y_0)h+f_{xy}(x_0, y_0)k)^2+k^2(f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0)-f_{xy}^2(x_0, y_0))$ เราจึงแยกกรณีย่อยได้ต่อไปนี้

- ถ้า $\underline{f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0}$ จะได้ว่า เครื่องหมายของ G ขึ้นอยู่กับ f_{xx} เราจึงได้ว่า
  - ถ้า $f_{xx} > 0$ แล้ว $G > 0$ จะได้ว่า $f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0) \geq 0$ นั่นคือ $f(x_0, y_0)$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
  - ถ้า $f_{xx} < 0$ แล้ว $G < 0$ จะได้ว่า $f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0) \leq 0$ นั่นคือ $f(x_0, y_0)$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์
- ถ้า $\underline{f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) < 0}$ จะได้ว่า เครื่องหมายของ G อาจจะเป็นบวกหรือลบ ขึ้นอยู่กับ $(f_{xx}(x_0, y_0)h + f_{xy}(x_0, y_0)k)^2 > k^2(f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)) < 0$ หรือ $(f_{xx}(x_0, y_0)h + f_{xy}(x_0, y_0)k)^2 < k^2(f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)) < 0$ ขึ้นอยู่กับค่าของ $(h, k$ ดังนั้น G จะไม่ให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์
- ถ้า $\underline{f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) = 0}$ จะได้ว่า ตัวเศษของ G เป็น พจน์ กำลัง สอง สมบูรณ์ แต่ อาจ มี ค่า เป็น ศูนย์ ขึ้น อยู่ กับ (h, k) ที่ซึ่ง $f_{xx}(x_0, y_0)h + f_{xy}(x_0, y_0)k = 0$ ซึ่งทำให้ไม่สามารถสรุปได้

จากกรณีต่าง ๆ ทำให้สามารถสรุปทฤษฎีได้ตามต้องการ □



ภาพที่ 1.59. (บน) กราฟของ f ในตัวอย่าง 1.12.5 (ล่าง) เส้นชั้นความสูงของ f

ตัวอย่าง 1.12.5. จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$

วิธีทำ. จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะเห็นว่า

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3, \qquad f_y(x,y) = 3y^2 - 12$$

ทำการหาจุดวิกฤติ โดยให้ $f_x(x,y) = 0$ และ $f_y(x,y) = 0$ จะได้ว่า

$$x = 1, -1 \text{ และ } y = 2, -2$$

ดังนั้น จุดวิกฤติจะมี 4 จุด ประกอบด้วย $(1,2), (-1,2), (1,-2), (-1,-2)$ ต่อไปจะนำจุดวิกฤติทั้งสี่ไปตรวจสอบ พิจารณา

$$f_{xx}(x,y) = 6x, \quad f_{xy}(x,y) = 0, \quad f_{yy}(x,y) = 6y$$

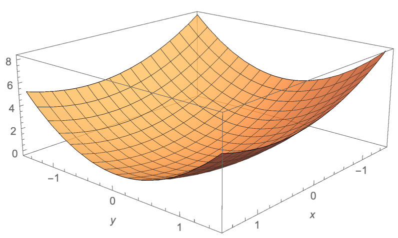
โดยใช้ทฤษฎีบท 1.12.4 จะสรุปผลการตรวจสอบ ดังนี้

จุด (x_0, y_0)	f_{xx}	$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$	**สรุปผล**
$(1,2)$	$6 > 0$	$72 > 0$	ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์, $f(1,2) = 2$
$(-1,2)$	$-6 < 0$	$-72 < 0$	เป็นจุดอานม้า
$(1,-2)$	$6 > 0$	$-72 < 0$	เป็นจุดอานม้า
$(-1,-2)$	$-6 < 0$	$72 > 0$	ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์, $f(-1,-2) = 37$

นั่นคือ f เกิดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(1,2)$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(1,2) = 2$
และ f เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $(-1,-2)$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-1,-2) = 37$

1.12.1 ค่าสุดขีดสัมบูรณ์บนบริเวณปิด

ดังนิยามของค่าสุดขีดสัมบูรณ์ดังนิยาม 1.12.1 สำหรับการหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์บนบริเวณปิด เราจำเป็นต้องหาค่าสุดขีดของทุกๆ จุด ซึ่งนอกเหนือจากจุดที่เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์แล้ว จุดที่อยู่บริเวณขอบของบริเวณที่สนใจจะต้องถูกนำมาพิจารณาเพื่อเปรียบเทียบค่า และก่อให้เกิดค่าสุดขีดสัมบูรณ์ดังตัวอย่างต่อไปนี้



ภาพที่ 1.60. กราฟของ f ในตัวอย่าง 1.12.6

ตัวอย่าง 1.12.6. จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ บนบริเวณปิด $x^2 + y^2 \leq 1$

วิธีทำ. ก่อนอื่น เราจะพิจารณาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ f ดังขั้นตอนต่อไปนี้

$$f_x(x,y) = 2x - 1, \qquad f_y(x,y) = 4y$$

ทำการหาจุดวิกฤติ โดยให้ $f_x(x,y) = 0$ และ $f_y(x,y) = 0$ จะได้ว่า

$$x = \frac{1}{2} \text{ และ } y = 0$$

ดังนั้น จุดวิกฤติจึงมีหนึ่งจุด คือ $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ต่อไป นำจุดวิกฤติไปตรวจสอบ จะเห็นว่า

$$f_{xx}(x,y) = 2, \quad f_{xy}(x,y) = 0, \quad f_{yy}(x,y) = 4$$

และเนื่องจาก $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 12 > 0$ โดยที่ $f_{xx} = 2 > 0$ จึงได้ว่า f ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$

ต่อไปเราจะพิจารณาจุดที่อยู่บนขอบของบริเวณวงกลม $x^2 + y^2 \leq 1$ พิจารณาความสัมพันธ์

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

ดังนั้น เมื่อแทน $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ ใน f นั่นคือ

$$f(x, \pm\sqrt{1-x^2}) = x^2 + 2(1-x^2) - x = 2 - x - x^2$$

สมมติให้ $g(x) = 2 - x - x^2$ พบว่า จะหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f ภายใต้เงื่อนไขของค่า x คือ $-1 \leq x \leq 1$ ดังนั้น เราจะหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียวก่อน นั่นคือ ทำการหาจุดวิกฤติของ g โดยให้ $g'(x) = 0$ นั่นคือ

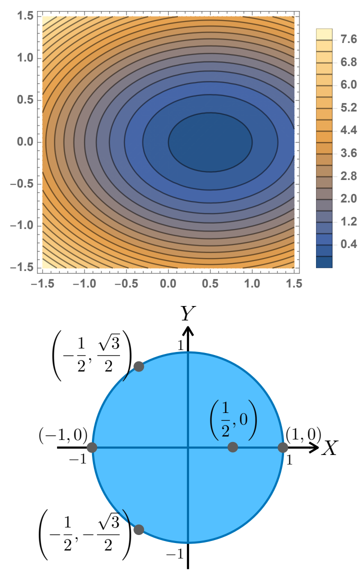
$$g'(x) = -1 - 2x = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = -\frac{1}{2}$ โดยการตรวจสอบด้วยวิธีอนุพันธ์อันดับสอง พบว่า $g''(x) = -2 < 0$ แสดงว่า $x = -\frac{1}{2}$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ g

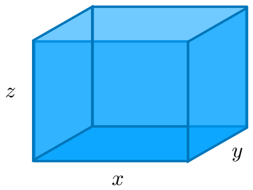
- เมื่อ $x = -\frac{1}{2}$ จะได้ว่า $y = \pm\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}^2\right)} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ นั่นคือ คู่อันดับซึ่งสอดคล้องกับ $x = -\frac{1}{2}$ และ f คือ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- พิจารณาจุดขอบของ g จะเห็นว่า เมื่อ $x = 1, -1$ จะได้ว่า $y = 0$ ดังนั้น คู่อันดับทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของจุดขอบคือ $(1,0), (-1,0)$

นำจุดทั้งหมดมาพิจารณาเพื่อเปรียบเทียบค่าของฟังก์ชัน สรุปได้ดังตาราง

จุด (x_0, y_0)	**ค่าของ** $f(x_0, y_0)$	**สรุปผล**
$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$\frac{-1}{4}$	ให้ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์
$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{9}{4}$	ให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์
$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{9}{4}$	ให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์
$(-1, 0)$	0	
$(1, 0)$	$2 < 0$	



ภาพที่ 1.61. (บน) เส้นชั้นความสูงของ f (ล่าง) จุดในบริเวณปิดทั้งหมดของโดเมนที่นำมาพิจารณา



ภาพที่ 1.62. กล่องที่ต้องการหาพื้นที่ผิว

ตัวอย่าง 1.12.7. จงหาความกว้าง ยาว และสูงของกล่องรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีฝาเปิด ซึ่งมีปริมาตร V โดยต้องการให้ใช้วัสดุในการทำกล่องที่น้อยที่สุด

วิธีทำ. ก่อนอื่น สมมติให้ V เป็นปริมาตรของกล่อง x แทนความกว้างของกล่อง y แทนความยาวของกล่อง และ z แทนความสูงของกล่อง โดยที่ S คือพื้นที่ผิวของกล่อง เราต้องการทำให้พื้นที่ผิวของกล่องมีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ ต้องการหาค่าต่ำสุดของ

$$S = xy + 2xz + 2yz$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$V = xyz$$

จากปัญหาดังกล่าว จะเห็นว่าฟังก์ชัน S เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร เมื่อ $x, y, z > 0$ อย่างไรก็ตาม เราสามารถลดตัวแปรลงได้หนึ่งตัวแปรจากเงื่อนไข $z = V/xy$ ดังนั้น S จะเขียนได้เป็น

$$S = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x} \tag{1.12.5}$$

ดังนั้น S จึงเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ y ต่อไปจะหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ โดยการหาจุดวิกฤติของ S นั่นคือ

$$S_x = -\frac{2V}{x^2} + y, \qquad S_y = -\frac{2V}{y^2} + x$$

หาจุดวิกฤติ โดยให้ $S_x = 0 = S_y$ จึงได้ว่า

$$y = \frac{2V}{x^2} \text{ และ } x = \frac{2V}{y^2}$$

แก้ระบบสมการทั้งสอง โดยการแทนค่า $y = \dfrac{2V}{x^2}$ ลงใน $x = \dfrac{2V}{y^2}$ จะได้ว่า

$$0 = x - \frac{2V}{4V^2}x^4 = x\left(1 - \frac{x^3}{2V}\right)$$

เนื่องจาก $x \neq 0$ $x = \sqrt[3]{2V}$ ดังนั้น จะได้ว่า $y = \sqrt[3]{2V}$ จะได้จุดวิกฤติคือ $(x = \sqrt[3]{2V}, x = \sqrt[3]{2V})$

ทำการทดสอบจุดวิกฤติ โดยพบว่า

$$S_{xx} = \frac{4V}{x^3}, \quad S_{xy} = 1, \quad S_{yy}(x,y) = \frac{4V}{y^3}$$

พบว่า ที่จุด $(x = \sqrt[3]{2V}, x = \sqrt[3]{2V})$ ได้ว่า

$$S_{xx} = 2, \quad S_{xy} = 1, \quad S_{yy} = 2$$

เนื่องจาก $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 3 > 0$ โดยที่ $f_{xx} = 2 > 0$ จึงได้ว่า f ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ โดยมีค่า $z = \sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$ และมีพื้นที่ผิวคือ $S(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}) = 3\sqrt[3]{4V^2}$

ต่อไป จะพิจารณาว่าที่จุด $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ ให้ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ด้วยหรือไม่ นั่นคือ ถ้า $(x, y) = (\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ ให้ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์จริง จะได้ว่า $3\sqrt[3]{4V^2} < S(x, y)$ สำหรับทุก (x, y) ในจตุภาคที่หนึ่ง

จากสมการ (1.12.5) ถ้า $3\sqrt[3]{4V^2} < S$ แล้ว จะเห็นว่า เงื่อนไขดังกล่าวจะต้องสอดคล้องกับอสมการ

$$xy > 3\sqrt[3]{4V^2}, \qquad \frac{2V}{y} > 3\sqrt[3]{4V^2}, \qquad \frac{2V}{x} > 3\sqrt[3]{4V^2}$$

อย่างน้อยหนึ่งอสมการ

ดังนั้น เพื่อที่จะแสดงว่า $3\sqrt[3]{4V^2} \le S$ บรรดาเซตของจุด (x, y) จึงสามารถลดมาพิจารณาบรรดาจุดทั้งหลายที่สอดคล้องกับระบบอสมการ

$$xy \le 3\sqrt[3]{4V^2}, \qquad \frac{2V}{y} \le 3\sqrt[3]{4V^2}, \qquad \frac{2V}{x} \le 3\sqrt[3]{4V^2}$$

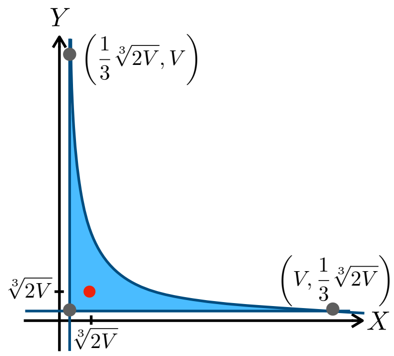
นั่นคือ อสมการดังกล่าวสามารถพิจารณาได้เป็น

$$xy \le 3\sqrt[3]{4V^2}, \qquad y \ge \frac{1}{3}\sqrt[3]{2V}, \qquad x \ge \frac{1}{3}\sqrt[3]{2V}$$

ซึ่งนิยามบริเวณปิด R ได้ดังภาพ 1.63

เนื่องจาก S เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณปิด R ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1.12.1 จะได้ว่า S มีค่าสุดขีดสัมบูรณ์ ณ จุดในบริเวณ R เนื่องจากจุด $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ อยู่ในบริเวณ R และ $3\sqrt[3]{4V^2} < S$ บนขอบของ R จึงได้ว่า ค่าต่ำสุดของ S จึงต้องเกิดบริเวณจุดภายในของ S

ดังนั้น พื้นที่ผิวสูงสุดของกล่องมีค่าเท่ากับ $3\sqrt[3]{4V^2}$ ตารางหน่วย เมื่อมีความกว้าง ยาว และสูงของกล่องเป็น $\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$ หน่วย ตามลำดับ



ภาพที่ 1.63. บริเวณ R ในการพิจารณาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

แบบฝึกหัดที่ 1.12

1. กำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้ จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือจุดอานม้า (ถ้ามี)

   (a) $f(x, y) = x^2 + xy + 4y + 2x + 3$

   (b) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x$

   (c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + \dfrac{32}{xy}$

   (d) $f(x, y) = xe^{y+1}$

   (e) $f(x, y) = e^x \cos y$

   (f) $f(x, y) = e^{-x^2+y^2+4x}$

2. จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ บนบริเวณปิดและมีขอบเขต R ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   (a) $f(x, y) = xy - x - 3y$ บนบริเวณ R รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดคือ $(0, 0), (0, 4), (5, 0)$

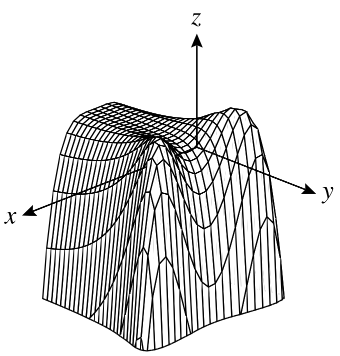
(b) $f(x,y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ บนบริเวณ R รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีจุดยอด คือ $(0,0), (0,2), (2,2), (2,0)$

(c) $f(x,y) = xy^2$ บนบริเวณ R ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$

3. จงหาจำนวนจริงบวกสามจำนวนซึ่งผลบวกสามจำนวนมีค่าเท่ากับ 36 โดยที่ผลคูณของสามจำนวนมีค่ามากที่สุด

4. จงหาจุดบนพื้นผิว $x^2 - yz = 9$ ซึ่งอยู่ใกล้กับจุดกำเนิดมากที่สุด

5. จงหาปริมาตรที่มากที่สุดของกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งมีหน้าสามหน้าของกล่องเป็นส่วนหนึ่งของระนาบ XY, YX, ZX และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ในอัฐภาคที่ 1 บนระนาบ $x + y + z = 1$



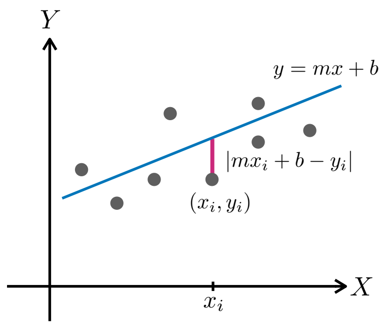
ภาพ ที่ 1.64. ฟังก์ชัน $f(x,y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$ (ภาพจากหนังสือ Anton Calculus)

6. ผลลัพธ์ต่อไปนี้เป็นผลลัพธ์สำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว

> **ทฤษฎีบท** 1.12.8. ถ้า f เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียวที่มีความต่อเนื่อง โดยที่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์สองค่าในช่วงที่พิจารณาแล้ว จะมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หนึ่งค่าที่อยู่ระหว่างค่าสูงสุดสัมพัทธ์ทั้งสองนั้น

โจทย์ต่อไปนี้ แสดงให้เห็นว่า ทฤษฎีบทดังกล่าวไม่สามารถขยายไปสู่กรณีฟังก์ชันสองตัวแปรได้

จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $f(x,y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์สองค่า แต่ไม่มีจุดวิกฤติอื่นๆ เลย



ภาพ ที่ 1.65. ความหมายทางเรขาคณิตของระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุด

7. ในทางสถิติ **ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุด** (method of least squares) เป็นวิธีที่หาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อหาเส้นโค้งที่ดีที่สุดที่ใกล้เคียงกับชุดข้อมูล

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

สมมติว่าข้อมูลชุดหนึ่งมีความสัมพันธ์คล้ายกับเส้นตรง เราต้องการทำการประมาณชุดข้อมูลนี้ด้วยสมการเส้นตรง $y = mx + b$ โดยปกติแล้ว ข้อมูลที่เก็บมาได้มักเกิดความคลาดเคลื่อน และไม่อยู่บนเส้นตรงนั้น ดังนั้น เราจึงต้องทำการหาเส้นตรงที่ดีที่สุดที่สามารถประมาณชุดข้อมูลทั้งหมด นั่นคือ เราจะหา m และ b ที่ทำให้ระยะของความคลาดเคลื่อนระหว่างชุดข้อมูลกับค่าที่ได้จากสมการที่สร้างขึ้นมีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ เราจะหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

$$g(m,b) = \sum_{i=1}^{n} (mx_i + b - y_i)^2$$

ความหมายทางเรขาคณิตของปัญหานี้ ปรากฏดังภาพ 1.65

(a) เพื่อหาค่าต่ำสุดของ g เราจะหา (m,b) ที่สอดคล้องกับ $\dfrac{\partial g}{\partial m} = 0$ และ $\dfrac{\partial g}{\partial b} = 0$ จงแสดงว่า สมการของจุดวิกฤติจะสอดคล้อง ถ้า m และ b สอดคล้องกับ

เงื่อนไข

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) m + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) m + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

(b) กำหนดให้ $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $x_1, x_2, ..., x_n$ จงใช้ความจริงที่ว่า

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \geq 0$$

แสดงว่า

$$n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geq 0$$

(c) สมมติว่า x_i แต่ละตัวแตกต่างกัน (แต่อาจซ้ำได้บางตัว) จงแสดงว่า สมการในข้อ (a) มีผลเฉลยเพียงอย่างเดียว นั่นคือ

$$m = \frac{n\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$
$$b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

(d) จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง $g_{mm}(m,b), g_{bb}(m,b), g_{mb}(m,b)$ และใช้ทฤษฎีบท 1.12.4 ในการตรวจสอบว่า g มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุดวิกฤติในข้อ (a)

1.13 ตัวคูณลากรานจ์

ปัญหาในตัวอย่าง 1.12.7 คือปัญหาที่เราหาค่าต่ำสุดของ

$$S = xy + 2xz + 2yz$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$V = xyz$$

ปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาในกรณีเฉพาะของปัญหาการหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันสามตัวแปรภายใต้เงื่อนไข (constraint) หนึ่งเงื่อนไข กล่าวคือ

หาค่าสูงสุด (maximize) หรือ หาค่าต่ำสุด (minimize) ของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ *ภายใต้เงื่อนไข (subject to)* $g(x, y, z) = 0$

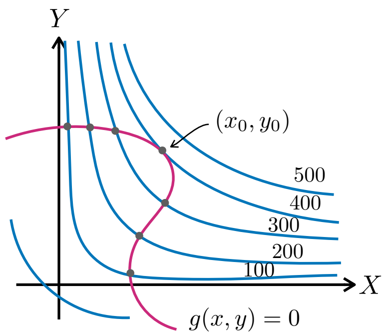
ทั้งนี้ ในกรณีของฟังก์ชันสองตัวแปร สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน กล่าวคือ

หาค่าสูงสุด (maximize) หรือ หาค่าต่ำสุด (minimize) ของฟังก์ชัน $f(x, y)$ *ภายใต้เงื่อนไข (subject to)* $g(x, y) = 0$

ฟังก์ชัน f มักจะเรียกว่า **ฟังก์ชันจุดประสงค์** (objective function) และเงื่อนไข g มักเรียกว่า **เงื่อนไข** หรือ **ข้อจำกัด** (constraint)

ในหัวข้อที่ผ่านมา เช่น ตัวอย่าง 1.12.7 เราศึกษาปัญหาของการหาค่าเหมาะที่สุดในกรณีฟังก์ชันสามตัวแปรภายใต้เงื่อนไขหนึ่งเงื่อนไข จะเห็นว่าในตัวอย่างดังกล่าว เราใช้วิธีการลดตัวแปรของฟังก์ชันจุดประสงค์ (objective funtion) ด้วยการนำเงื่อนไขไปแทนในฟังก์ชันจุดประสงค์ อย่างไรก็ตาม หากเงื่อนไขที่มีไม่สามารถเขียนได้ในรูปฟังก์ชันชัดแจ้ง การแทนค่าดังกล่าวก็อาจทำได้ยาก

เพื่อให้การแก้ปัญหาการหาค่าสุดขีดสะดวกมากยิ่งขึ้น จึงมีการเสนอ**ระเบียบวิธีตัวคูณลากรานจ์** (method of Lagrange multiplier)



ภาพที่ 1.66. ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นชั้นความสูงของ f และเส้นโค้ง $g(x, y) = 0$ ที่ให้ค่าสูงสุด

1.13.1 ระเบียบวิธีของตัวคูณลากรานจ์ที่มีหนึ่งเงื่อนไข

เราจะเริ่มกล่าวถึงกรณีฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีเงื่อนไขหนึ่งเงื่อนไขก่อน ดังนี้

สมมติว่าฟังก์ชัน $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ต้องการหาค่าสูงสุดของ f ภายใต้เงื่อนไข $g(x, y) = 0$ ปัญหานี้สามารถพิจารณาได้ว่า เราจะหาจุด (x_0, y_0) บนเส้นโค้งของ g ที่ทำให้ $f(x, y)$ มีค่ามากที่สุด พิจารณาตัวอย่างดังภาพ 1.66 โดยที่ตัวเลขแทนด้วยค่า c ของ $f(x, y) = c$ จะเห็นว่า เราสามารถหาจุดตัดระหว่างเส้นชั้นความสูง $f(x, y)$ และเส้นโค้ง $g(x, y) = 0$ ซึ่งจุดตัดเหล่านี้เป็นคำตอบที่อาจเป็นไปได้สำหรับปัญหาการหาค่ามากที่สุดนี้ ซึ่งจากภาพ จะเห็นว่า ค่าของฟังก์ชัน f ที่มากที่สุดคือ 400

จากปัญหาดังกล่าว จะพบว่า $\nabla f(x_0, y_0)$ ตั้งฉากกับเส้นชั้นความสูง $f(x, y) = 400$ ที่จุด (x_0, y_0) และทำนองเดียวกัน $\nabla g(x_0, y_0)$ ก็ตั้งฉากกับเส้นโค้ง $g(x, y) = 0$ ที่จุด (x_0, y_0) ด้วย ดังนั้น เราจึงได้ว่า เวกเตอร์ $\nabla f(x_0, y_0)$ ขนานกับเวกเตอร์ $\nabla g(x_0, y_0)$ นั่นคือ มี λ ซึ่งทำให้

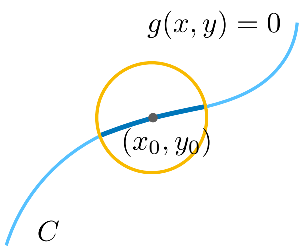
$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

เพื่อนิยามปัญหาให้รัดกุมยิ่งขึ้น จึงขอนิยามคำศัพท์พื้นฐานต่าง ๆ ดังนี้

บทนิยาม 1.13.1. ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์ ภายใต้เงื่อนไข $g(x, y) = 0$

1. จะกล่าวว่า f มี**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ภายใต้ข้อจำกัด [ต่ำสุด]** (constrained absolute maximum) [(minimum)] ที่จุด (x_0, y_0) ถ้า $f(x_0, y_0)$ เป็นค่ามากสุด [น้อยสุด] ของ f บนเส้นโค้ง $g(x, y) = 0$

2. จะกล่าวว่า f มี**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ภายใต้ข้อจำกัด [ต่ำสุด]** (constrained relative maximum) [(minimum)] ที่จุด (x_0, y_0) ถ้า $f(x_0, y_0)$ เป็นค่ามากสุด [น้อยสุด] ของ f สำหรับบางส่วนของเส้นโค้งย่อยของเส้นโค้ง $g(x, y) = 0$ ทั้งสองด้านของจุด (x_0, y_0)



ภาพที่ 1.67. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ภายใต้ข้อจำกัด เกิดขึ้นที่จุด (x_0, y_0) เนื่องจากมีเส้นโค้งย่อยทั้งสองด้านของจุด (x_0, y_0)

ภาพ 1.67 แสดงให้เห็นถึงตัวอย่างของค่าสูงสุดสัมพัทธ์ภายใต้ข้อจำกัดของ $f(x, y)$ บนเส้น $g(x, y) = 0$ ที่จุด (x_0, y_0)

สมมติว่าค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ภายใต้ข้อจำกัดเกิดขึ้น ณ จุด (x_0, y_0) และสมมติให้ $g(x, y) = 0$ เขียนได้ในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = x(s) \qquad y = y(s)$$

โดยที่ s คือตัวแปรเสริมของความยาวของส่วนโค้ง โดย $s = 0$ ที่จุด (x_0, y_0) ดังนั้น $z = f(x(s), y(s))$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $s = 0$ นั่นคือ $dz/ds = 0$ ณ จุด

(x_0, y_0) โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$0 = \frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{dy}\frac{dy}{ds} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{i}\right) \cdot \left(\frac{dx}{\partial s}\mathbf{i} + \frac{dx}{ds}\mathbf{j}\right)$$
$$= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{T}(0)$$

เมื่อ $\mathbf{T}(0)$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับเส้นโค้ง $g(x, y) = 0$ ที่จุด (x_0, y_0)

จากความสัมพันธ์ $\nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{T}(0) = 0$ ทำให้ได้ว่า เกรเดียนต์ $\nabla f(x_0, y_0)$ เป็นเวกเตอร์ $\mathbf{0}$ หรือตั้งฉากกับเส้นโค้ง $g(x, y) = 0$ ที่จุดซึ่งเป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์ภายใต้ข้อจำกัด แต่เนื่องจาก $g(x, y) = 0$ เป็นเส้นโค้งระดับหนึ่งของฟังก์ชัน $g(x, y)$ ดังนั้น ถ้า $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ แล้ว $\nabla g(x_0, y_0)$ จะตั้งฉากกับเส้นโค้งนี้ที่จุด (x_0, y_0) นั่นคือ มีสเกลาร์ $\lambda \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = 0 \tag{1.13.1}$$

สำหรับเกสลาร์ λ จะเรียกว่า **ตัวคูณลากรานจ์** (Lagrange multiplier) ดังนั้น ระเบียบวิธีตัวคูณลากรานจ์จึงเป็นวิธีการที่หาจุดบนเส้นโค้งเงื่อนไข $g(x, y) = 0$ ที่สอดคล้องกับสมการ (1.13.1) สำหรับบางสเกลาร์ λ

ดังนั้น ดังที่กล่าวมาข้างต้น จึงสามารถสรุปวิธีการหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีเงื่อนไขหนึ่งเงื่อนไขโดยระเบียบวิธีตัวคูณลากรานจ์ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.13.1. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรซึ่งอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งมีความต่อเนื่องบนเซตเปิดที่บรรจุเส้นโค้งของเงื่อนไข $g(x, y) = 0$ โดยที่ $\nabla g \neq \mathbf{0}$ ที่จุดใด ๆ บน g ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่มีเงื่อนไขแล้ว ค่าสุดขีดสัมพัทธ์เกิดขึ้นที่จุด (x_0, y_0) บนเส้นโค้งเงื่อนไขซึ่งเวกเตอร์เกรเดียนต์ $\nabla f(x_0, y_0)$ และ $\nabla g(x_0, y_0)$ ขนานกัน กล่าวคือ มี λ ที่ทำให้

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = 0 \tag{1.13.2}$$

จะเห็นว่า หากเราสร้างฟังก์ชัน

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) = \lambda g(x, y)$$

การหาจุดวิกฤติ $F_x = F_y = F_\lambda = 0$ ของ F จะทำให้ได้เงื่อนไขดังสมการ (1.13.2) ในทฤษฎีบท 1.13.1 นั่นคือ

$$\begin{aligned} F_x &= f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0 \\ F_y &= f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0 \\ F_\lambda &= g(x, y) = 0 \end{aligned}$$

กล่าวโดยสรุปแล้ว เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f ที่ต้องการหาสุดขีดภายใต้เงื่อนไข $g(x, y) = 0$ เราสามารถพิจารณาระเบียบวิธีตัวคูณลากรานจ์ได้ดังขั้นตอนต่อไปนี้

1. สร้างฟังก์ชัน F ซึ่งเป็นฟังก์ชันสามตัวแปรของ x, y, λ โดย

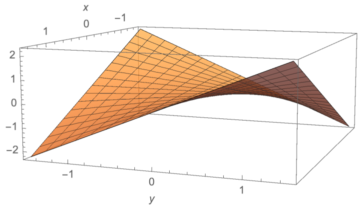
$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

2. หาจุดวิกฤติของฟังก์ชัน F นั่นคือ ทำการหา (x, y, λ) ที่ทำให้

$$F_x = F_y = F_\lambda = 0$$

3. กำจัด λ เพื่อหาจุด (x, y) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมด

4. นำจุดวิกฤติของฟังก์ชันดังกล่าวมาพิจารณาว่าเกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ด้วยการตีความหมายทางเรขาคณิตของแต่ละปัญหา



ภาพที่ 1.68. กราฟของฟังก์ชัน $f(x, y) = xy$

ตัวอย่าง 1.13.2. จงหาจุดบนวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ ซึ่งทำให้ฟังก์ชัน $f(x, y) = xy$ เกิดค่าสูงสุดสัมบูรณ์

วิธีทำ. เนื่องจากวงกลม $x^2+y^2 = 1$ เป็นเซตปิดและมีขอบเขต และ $f(x, y) = xy$ มีความต่อเนื่อง ณ จุดใด ๆ ใน $\mathbb{R}^2$ โดยทฤษฎีบท 1.12.1 จะได้ว่า f มีค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์ เราจึงจะพิจารณาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f ภายใต้เงื่อนไข $x^2 + y^2 = 1$

เราทำการสร้างฟังก์ชันเงื่อนไข

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

ดังนั้น สร้างฟังก์ชัน

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

หาจุดวิกฤติของ F จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F_x &= y + \lambda(2x) &= 0 \\ F_y &= x + \lambda(2y) &= 0 \\ F_\lambda &= x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ถ้า $x = 0$ แล้ว $y = 0$ และถ้า $y = 0$ แล้ว $x = 0$ เช่นกัน แต่เนื่องจาก $(x, y) = (0, 0)$ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข $x^2 + y^2 = 1$ จึงจะสมมติว่า $x \neq 0$

จาก $x \neq 0$ จะได้ว่า $y \neq 0$ ดังนั้นจะเขียน λ ได้ในรูป

$$\lambda = \frac{y}{2x}, \qquad \lambda = \frac{x}{2y}$$

นั่นคือ

$$\frac{y}{2x} = \frac{x}{2y}$$

ได้ว่า

$$x^2 = y^2$$

เพราะฉะนั้น จากเงื่อนไข $x^2 + y^2 = 1$ จะได้เงื่อนไข

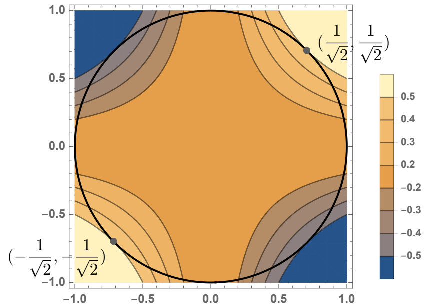
$$2x^2 - 1 = 0$$

เพราะ ฉะนั้น $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ จึงได้ ว่า $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ดัง นั้น จุด วิกฤติ ทั้งหมด คือ $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

นำจุดวิกฤติทั้งหมดไปแทนใน f เพื่อตรวจสอบ ได้ผลดังตาราง

(x,y)	$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$
xy	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

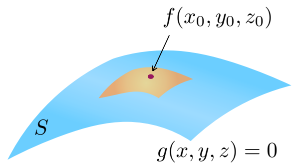
เพราะ ฉะนั้น ค่า สูงสุด สัมบูรณ์ มี ค่า เท่ากับ $\frac{1}{2}$ เกิด ขึ้น ที่ จุด $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ และ $(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ จากตัวอย่างดังกล่าว เราสามารถพิจารณาเส้นชั้นความสูงที่ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ปรากฏอยู่ดังภาพ 1.69



ภาพที่ 1.69. ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นชั้นความสูงของ f และเส้นโค้ง $g(x,y)=0$ ที่ให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ f เป็นฟังก์ชันหลายตัวแปร และ g เป็นฟังก์ชันเงื่อนไขที่มีจำนวนตัวแปรเท่ากับ f เราก็สามารถพิจารณาปัญหาดังกล่าวได้ในทำนองเดียวกันกับฟังก์ชันสองตัวแปร

สำหรับความหมายในกรณีที่ f และ g เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร จะเห็นว่า สำหรับ $g(x,y,z)=0$ คือพื้นผิว S ในสามมิติ ดังนั้น ปัญหานี้จะเป็นการพิจารณาหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของ $f(x,y,z)$ เมื่อ (x,y,z) อยู่บนพื้นผิว S ดังภาพ 1.70 ซึ่งแสดงค่าสูงสุดของ $f(x,y,z)$ กล่าวคือ $f(x_0,y_0,z_0)\geq f(x,y,z)$ สำหรับทุก (x,y,z) บน S ใกล้ ๆ $(x_0,y_0,z_0$



ภาพที่ 1.70. ค่าสูงสุดของ $f(x,y,z)$ บนพื้นผิว S

ดังนั้น สำหรับกระบวนการหาค่าเหมาะที่สุดของฟังก์ชันสามตัวแปร $f(x,y,z)$ ภายใต้เงื่อนไข $g(x,y,z)=0$ เราสามารถพิจารณาได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. สร้างฟังก์ชัน F ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x,y,z,λ โดย

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$$

2. หาจุดวิกฤติของฟังก์ชัน F นั่นคือ ทำการหา $(x,y,,z\lambda)$ ที่ทำให้

$$F_x=F_y=F_z=F_\lambda=0$$

3. กำจัด λ เพื่อหาจุด (x,y,z) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมด

4. พิจารณาจุดวิกฤติตามปัญหาที่พิจารณา

ตัวอย่าง 1.13.3. การแก้ปัญหาในตัวอย่าง 1.12.7 เมื่อกำหนดฟังก์ชัน

$$S=xy+2xz+2yz$$

ภายใต้เงื่อนไข $V=xyz$ โดยใช้ระเบียบวิธีตัวคูณลากรานจ์

วิธีทำ. จากเงื่อนไขดังกล่าว จะได้ฟังก์ชันเงื่อนไข

$$g(x,y,z)=xyz-V$$

ทำการสร้างฟังก์ชัน

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)=(xy+2xz+2yz)+\lambda(xyz-V)$$

หาจุดวิกฤติของ F จะได้ว่า

$$F_x = y + 2z + \lambda yz = 0 \tag{1.13.3}$$
$$F_y = x + 2z + \lambda xz = 0 \tag{1.13.4}$$
$$F_z = 2x + 2y + \lambda xy = 0 \tag{1.13.5}$$
$$F_\lambda = xyz - V = 0 \tag{1.13.6}$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$y + 2z = -\lambda yz, \quad x + 2z = \lambda xz, \quad 2x + 2y = \lambda xy$$

จากเงื่อนไขที่ว่า x, y, z ไม่เป็นศูนย์ จึงได้ว่า

$$\frac{1}{z} + \frac{2}{y} = -\lambda, \quad \frac{1}{z} + \frac{2}{x} = -\lambda, \quad \frac{2}{y} + \frac{2}{x} = -\lambda$$

โดยสมการที่หนึ่งและสอง จะได้ว่า

$$y = x \tag{1.13.7}$$

และจากสมการที่หนึ่งและสาม จะได้ว่า

$$z = \frac{1}{2}x \tag{1.13.8}$$

เราจึงแทน (1.13.7) และ (1.13.8) ลงใน $xyz = V$ ได้ว่า

$$\frac{x^3}{2} = V$$

เพราะฉะนั้น $x = \sqrt[3]{2V}$ โดยเงื่อนไขของ (1.13.7) และ (1.13.7) จึงได้ว่า $y = \sqrt[3]{2V}$ และ $z = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$ ซึ่งได้ผลสอดคล้องกับตัวอย่าง 1.12.7 ตามต้องการ

1.13.2 ระเบียบวิธีของตัวคูณลากรานจ์ที่มีมากกว่าหนึ่งเงื่อนไข

สมมติให้ f เป็นฟังก์ชัน $n + m$ ตัวแปร กล่าวคือ

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, ..., u_m)$$

โดยที่มีเงื่อนไข m เงื่อนไข กล่าวคือ

$$g_r(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, ..., u_m) = 0, r = 1, ..., m$$

เราทำการสร้างฟังก์ชัน

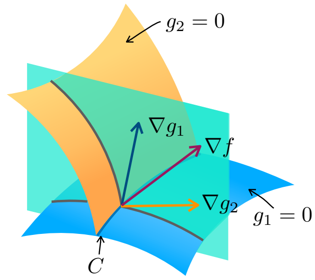
$$F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + ... + \lambda_m g_m$$

จากนั้น หาจุดวิกฤติ และทำในทำนองเดียวกันกับกรณีที่มีเงื่อนไขหนึ่งเงื่อนไข

สำหรับกรณีฟังก์ชันสามตัวแปรที่มีสองเงื่อนไข เราสามารถพิจารณาความหมายทางเรขาคณิตได้ กล่าวคือ สมมติ $f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร โดยที่มีเงื่อนไข

$$g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$$

โดยที่เกรเดียนต์ ∇g_1 และ ∇g_2 ซึ่งตั้งฉากกับพื้นผิว $g_1 = 0$ และ $g_2 = 0$ ที่จุด (x, y, z) ไม่ขนานกัน สมมติ $g_1 = 0$ และ $g_2 = 0$ ตัดกันที่เส้นโค้งเรียบ C บนเส้น C ดังกล่าว เราสามารถหาจุดบนเส้นโค้ง C ซึ่ง f มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ได้ ทั้งนี้ เราสามารถหาจุดบนเส้นโค้ง C ซึ่ง ∇f ตั้งฉากกับ C แต่เนื่องจาก $\nabla g_1, \nabla g_2$ ตั้งฉากกับ C ที่จุดนั้น เนื่องจาก C อยู่บนพื้นผิว $g_1 = 0$ และ $g_2 = 0$



ภาพที่ 1.71. เกรเดียนต์ $\nabla g_1, \nabla g_2$ และเวกเตอร์ ∇f บนระนาบเดียวกัน

ดังนั้น ∇f อยู่ในระนาบเดียวกันกับ $\nabla g_1, \nabla g_2$ นั่นคือ มี λ_1, λ_2 ที่ทำให้ $\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$ ดังภาพ 1.71 จึงได้เงื่อนไขของระเบียบวิธีตัวคูณลากรานจ์ในกรณีฟังก์ชันสามตัวแปรที่มีสองเงื่อนไขดังกล่าว

สำหรับฟังก์ชันสามตัวแปรที่มีเงื่อนไขสองเงื่อนไข เราสร้างฟังก์ชัน

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z)$$

จากนั้นทำการหาจุดวิกฤติ และแก้ระบบสมการเพื่อหาจุด (x, y, z) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมด

ตัวอย่าง 1.13.4. ระนาบ $x + y + z = 1$ ตัดกับทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$ ได้รอยตัดเป็นวงรี จงหาจุด (x, y, z) บนวงรีดังกล่าวที่ระยะระหว่างจุดนั้นกับจุดกำเนิดมีค่าน้อยที่สุดและมากที่สุด

วิธีทำ. สมมติให้ $h(x, y, z) = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2}$ เป็นฟังก์ชันที่วัดระยะทางจากจุดกำเนิดไปยังจุดบนวงรีซึ่งเป็นรอยตัดของพื้นผิวสองพื้นผิวดังกล่าว ปัญหาในตัวอย่างนี้ เราต้องการหาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน h ซึ่งจะเห็นว่า หาก h ได้ค่าสุดขีดแล้ว h^2 ก็จะได้ค่าสุดขีดด้วย ดังนั้น เพื่อความสะดวก เราจะแปลงปัญหาเป็นการหาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

โดยมีเงื่อนไขสองเงื่อนไข คือ

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ g_2(x, y, z) &= x + y + z - 1 = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น เราสร้างฟังก์ชัน

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) &= f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z - 1) \end{aligned}$$

ต่อมา หาจุดวิกฤติ โดยให้

$$F_x = 2x + \lambda_1 2x + \lambda_2 = 0 \quad (1.13.9)$$

$$F_y = 2y + \lambda_1 2y + \lambda_2 = 0 \quad (1.13.10)$$

$$F_z = 2z + \lambda_2 = 0 \quad (1.13.11)$$

$$F_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 1 \qquad = 0 \tag{1.13.12}$$
$$F_{\lambda_2} = x + y + z - 1 \qquad = 0 \tag{1.13.13}$$

จากสมการ (1.13.10) ได้ว่า $\lambda_2 = -2z$ จากสมการ (1.13.9) และ (1.13.10) จึงได้ว่า

$$2x + \lambda_1(2x) - 2z = 0 \qquad \text{ได้ว่า } (1+\lambda_1)x = z$$
$$2y + \lambda_1(2y) - 2z = 0 \qquad \text{ได้ว่า } (1+\lambda_1)y = z$$

ดังนั้น $\lambda_1 = -1$ และ $z = 0$ หรือ $\lambda_1 \neq -1$ และ $x = y = \dfrac{z}{1+\lambda_1}$ จึงแบ่งเป็นสองกรณี ดังนี้

<u>กรณี $\lambda_1 = -1$ และ $z = 0$</u>

ทำการแก้ระบบสมการ (1.13.12), (1.13.13) ทำให้ได้ว่า $x = 0, 1$ นั่นคือ จุด $(0,1,0)$ และ $(1,0,1)$ ซึ่งต่างก็อยู่บนวงรีดังกล่าว สอดคล้องกับเงื่อนไข และให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์

<u>กรณี $\lambda_1 \neq -1$ และ $x = y = \dfrac{z}{1+\lambda_1}$</u>

จากสมการ (1.13.12) และ (1.13.13) จะได้ว่า

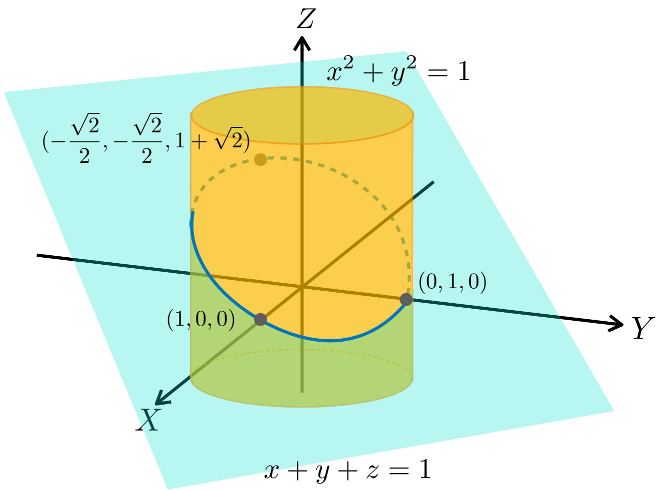
$$x^2 + x^2 = 1 \qquad x + x + z = 1$$
$$2x^2 = 1 \qquad 2x + z = 1$$
$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad z = 1 \mp \sqrt{2}$$

จึงได้ว่า มีจุดที่เป็นไปได้ คือ $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2})$ แต่จุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของวงรีมีเพียงสองจุด คือ $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2})$ และ $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2})$

นำจุดวิกฤติทั้งหมดไปแทนใน f เพื่อตรวจสอบ ได้ผลดังตาราง

(x,y)	$(0,1,0)$	$(1,0,1)$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2})$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2})$
xy	1	1	$4-2\sqrt{2}$	$4+2\sqrt{2}$

ดังนั้น จุด $(0,1,0), (1,0,0)$ บนวงรี ให้ระยะทางน้อยที่สุดจากจุดกำเนิด และจุด $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2})$ บนวงรี ให้ระยะทางมากที่สุดจากสุดกำเนิด สอดคล้องกับสถานการณ์ดังภาพ 1.72



ภาพที่ 1.72. จุดบนวงรีที่อยู่ใกล้ที่สุดและไกลที่สุดจากจุดกำเนิด

แบบฝึกหัดที่ 1.13

1. จงใช้ระเบียบวิธีตัวคูณลากรานจ์ หาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดต่อไปนี้
   (a) $f(x,y)=xy$ ภายใต้ $4x^2+8y^2=64$
   (b) $f(x,y)=x^2-y^2$ ภายใต้ $x^2+y^2=16$
   (c) $f(x,y,z)=2x+y-2$ ภายใต้ $x^2+y^2+z^2=4$
   (d) $f(x,y,z)=xyz$ ภายใต้ $x^2+y^2+z^2=1$
   (e) (ค่าสูงสุด) $f(x,y,z)=x^2+2y-z^2$ ภายใต้ $2x-y=0$ และ $y+z=0$
   (f) (ค่าต่ำสุด) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ ภายใต้ $x+2y+3z=6$ และ $x+3y+9z=9$

2. จงหาจุดบนเส้นตรง $2x-4y=4$ ที่อยู่ใกล้กับจุดกำเนิดมากที่สุด

3. จงหาจุดบนระนาบ $4x+3y+z=2$ ที่อยู่ใกล้กับจุด $(1,-1,1)$ มากที่สุด

4. จงหารัศมีและความสูงของทรงกระบอกมุมฉากซึ่งมีฐานเป็นวงกลมที่มีพื้นที่ผิวมากที่สุดที่สามารถแนบในทรงกลมรัศมี a จากนั้นจงหาพื้นที่ผิวที่มากที่สุดนั้น

5. สมมติว่าอุณหภูมิ ณ จุด (x,y) บนแผ่นโลหะ กำหนดดังสมการ

$$T(x,y)=4x^2-4xy+y^2$$

   มดตัวหนึ่งเดินบนแผ่นโลหะดังกล่าว โดยมีเส้นทางเดินเป็นวงกลมที่มีรัศมี 5 หน่วย และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด จงหาอุณหภูมิที่สูงที่สุดและต่ำที่สุดบนแผ่นโลหะในแนวเส้นทางเดินที่มดเดินผ่าน

6. จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ $f(x,y,z)=x^2yz+1$ บนรอยตัดระหว่างทรงกลม $x^2+y^2+z^2=10$ และระนาบ $z=1$

7. จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ $f(x,y,z) = xy + z^2$ บนวงกลมที่เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบ $y - x = 0$ และทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

8. จงหาจุดที่อยู่บนรอยตัดระหว่างระนาบ $y + 2z = 12$ และ $x + y = 6$ ที่อยู่ใกล้กับจุดกำเนิดมากที่สุด

9. **ปัญหาระนาบกำลังสองที่น้อยที่สุด** (a least squares plane) เป็นปัญหาที่คล้ายกับปัญหาเส้นโค้งกำลังสองมากที่สุด สำหรับข้อนี้เราจะหาระนาบ $z = Ax + By + C$ ที่ใช้ประมาณชุดข้อมูล (x_k, y_k, z_k)

   สมมติว่าชุดข้อมูลประกอบด้วย $(0,0,0), (0,1,0), (1,1,1), (1,0,-1)$ จงหาค่า A, B, C ที่ทำให้ผลรวมของความคลาดเคลื่อน

$$\sum_{k=1}^{4} (Ax_k + By_k + C - z_k)^2$$

   มีค่าน้อยที่สุด

10. พิจารณาปัญหาต่อไปนี้

   (a) จงแสดงว่า ค่าสูงสุดของ $a^2b^2c^2$ บนทรงกลมรัศมี r ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดในระบบพิกัด ABC คือ $(r^2/3)^3$

   (b) จงใช้ผลจากข้อ (a) แสดงอสมการดังกล่าวคืออสมการ AM-GM สำหรับจำนวนจริงสามจำนวน กล่าวคือ สำหรับจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ a, b, c

$$(abc)^{1/3} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

11. ในตัวอย่าง 1.6.2 เราได้กล่าวถึงสมการ Cobb-Douglas ซึ่งเป็นสมการที่นิยมในทางเศรษฐศาสตร์เพื่อใช้ในการผลิตสินค้า โดยปริมาณการผลิต P เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับจำนวนการทำงาน x หน่วย และปัจจัยทุน y หน่วย กำหนดโดย

$$P(x,y) = kx^{\alpha}y^{1-\alpha}$$

   โดยที่ k และ α เป็นค่าคงที่ที่เกี่ยวข้องกับบริษัทหรือระบบเศรษฐกิจนั้น ๆ

   (a) จงแสดงว่า หากเพิ่มแรงงานและต้นทุนเป็นสองเท่า จะได้ว่า ผลผลิต P ก็จะเพิ่มขึ้น 2 เท่าตามไปด้วย

   (b) สำหรับบริษัทแห่งหนึ่ง สมมติว่า $k = 120, \alpha = 3/4$ หากต้นทุนของแรงงานเท่ากับ 250 บาทต่อหน่วย และต้นทุนของปัจจัยทุนต่อหน่วยเท่ากับ 400 บาท โดยที่ค่าใช้จ่ายทั้งหมดไม่เกิน 100,000 บาท จงหาผลผลิตรวมมากที่สุดของบริษัทนี้

   (c) สำหรับค่าคงที่ k, α ถ้าต้นทุนต่อหน่วยของการทำงานคือ c_1 และต้นทุนต่อหน่วยของปัจจัยทุนคือ c_2 โดยที่บริษัทสามารถลงทุนได้ไม่เกิน B บาทแล้ว ฟังก์ชันผลผลิตรวมจะมีเงื่อนไขคือ $c_1x + c_2y = B$ จงแสดงว่า ระดับการผลิตสูงสุดซึ่งขึ้นอยู่กับเงื่อนไข จะเกิดขึ้นที่

$$x = \frac{\alpha B}{c_1}, \quad y = \frac{(1-\alpha)B}{c_2}$$

บทที่ 2

ปริพันธ์จำกัดเขต

ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราได้ทำการศึกษาประเด็นของแคลคูลัสของฟังก์ชันตัวแปรเดียวในเรื่องอนุพันธ์ และปริพันธ์ รวมถึงกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างสองแนวคิด สำหรับรายละเอียดที่เกี่ยวข้องในเชิงลึกของปริพันธ์ จะกล่าวถึงในกระบวนวิชา การวิเคราะห์เชิงจริง (real analysis)

สำหรับกระบวนวิชานี้ เราจะศึกษารายละเอียดที่เกี่ยวข้องกับปริพันธ์จำกัดเขตที่ขยายความมากขึ้นจากแคลคูลัสพื้นฐานในบริบทที่มีความเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันหลายตัวแปร อาทิ การหาอนุพันธ์ภายใต้เครื่องหมายปริพันธ์ เป็นต้น

2.1 บทนิยามและสมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต

ปัญหาดั้งเดิมของปริพันธ์จำกัดเขตคือ การหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งของฟังก์ชัน $y = f(x)$ บนช่วงปิด $[a, b]$ ก่อนอื่น เราจะนิยามปริพันธ์จำกัดเขตดังนี้

พิจารณาปัญหาพื้นที่ จากภาพ 2.1 สำหรับช่วงปิด $I = [a, b]$ ผลแบ่งกั้น (partition) $\mathcal{P}$ ของ I คือเซตจำกัดของจุด $\mathcal{P} := (x_0, ..., x_n)$ ใน I ซึ่ง

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

ดังนั้น บรรดาจุดใน $\mathcal{P}$ จะแบ่งช่วง I เป็น n ช่วงย่อย

$$I_1 := [x_0, x_1], \quad I_2 := [x_1, x_2], ..., \quad I_n := [x_{n-1}, x_n]$$

กำหนดให้ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ต่อไป เรานิยาม**นอร์ม** (norm) ของ $\mathcal{P}$ เขียนแทนด้วย $\|\mathcal{P}\|$ คือ ความกว้างของช่วงย่อยที่มากที่สุด กล่าวคือ

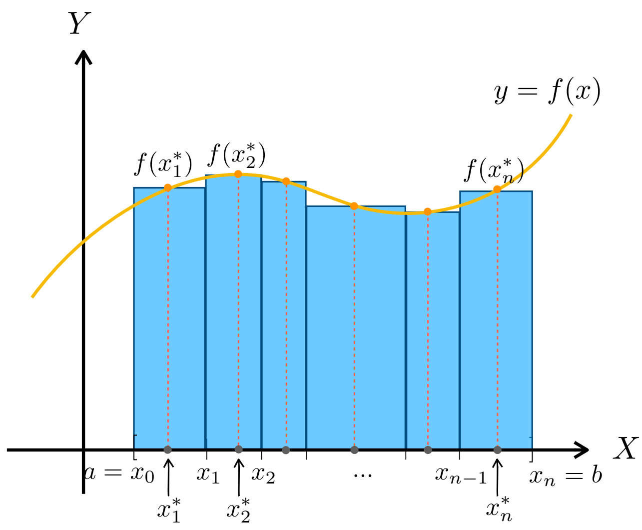
$$\|\mathcal{P}\| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}$$

เมื่อเลือกจุด x_k^* ใด ๆ ในช่วงย่อย I_k นั่นคือ $x_k^* \in I_k$ จะสร้าง**ผลบวกรีมันน์** (Riemann's sum)

$$S(f; \mathcal{P}) := \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \tag{2.1.1}$$

เมื่อแบ่งช่วงย่อย I_k ให้มีจำนวนมากขึ้นจน $n \to \infty$ จะทำให้ได้ว่า $\|\mathcal{P}\| \to 0$ นั่นคือ จะนิยาม**ปริพันธ์จำกัดเขต** (definite integral) โดย

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \tag{2.1.2}$$



ภาพที่ 2.1. การแบ่งพื้นที่ใต้ $f(x)$ บนช่วงปิด $[a, b]$

บทนิยาม 2.1.1. จะกล่าวว่า ฟังก์ชัน $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **หาปริพันธ์ได้แบบรีมันน์** (Riemann integrable) ถ้าสำหรับผลแบ่งกั้น $\mathcal{P}$ บน $[a, b]$ ลิมิตของผลบวกรีมันน์มีค่า เมื่อ $\|\mathcal{P}\| \to 0$ โดยจะนิยามปริพันธ์จำกัดเขต โดย

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} S(f; \mathcal{P})$$

โดยที่ $f(x)$ เรียกว่า **ปริพัทธ์** (integrand) หรือตัวถูกอินทิเกรต, $[a, b]$ เรียกว่า **ช่วงการหาปริพันธ์** (range of integration), a เรียกว่า **ขีดจำกัดล่าง** (lower limit) และ b เรียกว่า **ขีดจำกัดบน** ของการหาปริพันธ์

ชั้นของฟังก์ชัน f ซึ่ง f หาปริพันธ์ได้แบบรีมันน์ จะเขียนแทนด้วย $\mathcal{R}[a, b]$

หมายเหตุ. นิยามที่เป็นทางการของนิยาม 2.1.1 สามารถกล่าวได้ในรูป $\delta - \epsilon$ ได้ว่า

ฟังก์ชัน $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ หาปริพันธ์ได้แบบรีมันน์ ถ้ามีจำนวนจริง $L \in \mathbb{R}$ ซึ่งสำหรับทุก $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับผลแบ่งกั้น $\mathcal{P}$ ใด ๆ ซึ่ง $\|\mathcal{P}\| < \delta$ แล้ว

$$|S(f; P) - L| < \epsilon$$

เมื่อ $f(x) \geq 0$ ความหมายในทางเรขาคณิตของผลบวก (2.1.1) คือ การประมาณพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่แท่งสี่เหลี่ยมย่อยแต่ละแท่งมีความกว้าง Δx_k และความสูง $f(x_k^*)$ ดังภาพ 2.1 เราจึงกล่าวได้ว่า ผลบวก (2.1.1) คือการประมาณพื้นที่ใต้กราฟของ f บนช่วง $[a, b]$ และปริพันธ์จำกัดเขต $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ แสดงพื้นที่ใต้กราฟของ f บนช่วงปิด $[a, b]$

ทั้งนี้ ในช่วงที่ $f(x) < 0$ กล่าวคือ ค่าของ f เป็นลบ จะทำให้ผลบวกในส่วนที่ $f(x) < 0$ มีค่าเป็นลบ ทำให้ (2.1.1) และ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ไม่สามารถแสดงความหมายของพื้นที่ใต้ f อีกต่อไป แต่ปริพันธ์จำกัดเขตจะแสดง**พื้นที่เครื่องหมายสุทธิ** (net-signed area) ของ f บนช่วงปิด $[a, b]$

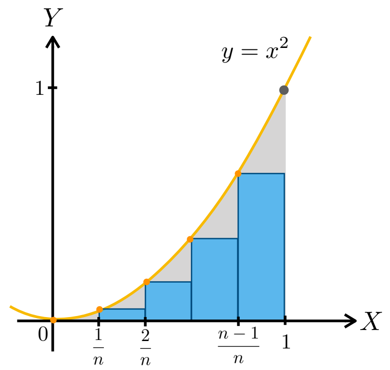
จากนิยาม 2.1.1 เราสามารถเลือกช่วงย่อยให้เท่ามีความยาวช่วงย่อยเท่ากัน และเลือกจุดในช่วงย่อยเป็นจุดใด ๆ ได้ เพื่อความสะดวกอาจเลือกเป็นจุดที่ทำให้คำนวณค่าของฟังก์ชันได้ง่าย กล่าวคือ

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)=\int_a^b f(x)\,dx$$

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นการหาคำนวณค่าปริพันธ์จำกัดเขต โดยการสร้างผลบวกรีมันน์

ตัวอย่าง 2.1.1. จงหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขต $\int_0^1 x^2\,dx$



ภาพที่ 2.2. พื้นที่ใต้กราฟ $f(x)=x^2$ บน $[0,1]$

วิธีทำ. พิจารณาปัญหาดังกล่าวดังภาพ 2.2 ก่อนอื่น ทำการแบ่งช่วงปิด $[0,1]$ ออกเป็น n ช่วงย่อย โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติว่าทำการแบ่งช่วงย่อยออกเป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน นั่นคือ เลือกผลแบ่งกั้น $\mathcal{P}=(a=x_0,x_0+\frac{1}{n},...,x_0+\frac{n-1}{n},x_n=b)$ โดยที่ $\Delta x_k=\dfrac{1}{n}$ สำหรับทุก $k=1,...,n$

ขั้นตอนต่อไป ทำการเลือกจุด x_k^* ซึ่งเราสามารถเลือกจุด x_k^* ได้อย่างอิสระ ในที่นี้ สมมติว่าเลือกจุด x_k^* เป็นจุดปลายช่วงย่อยด้านซ้ายมือของช่วงย่อย $I_k := [x_{k-1},x_k]$ จะได้ว่า แต่ละจุดในช่วงย่อย I_k เขียนได้ในรูป $x_k^* := 0+\dfrac{k-1}{n}$ ดังนั้น จะได้ผลบวกรีมันน์

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k &= f(x_1^*)\Delta x_1+...+f(x_1^*)\Delta x_n\\
&= f(0)\frac{1}{n}+f(0+\frac{1}{n})\frac{1}{n}+...+f(0+\frac{n-1}{n})\frac{1}{n}\\
&= \sum_{k=1}^{n} f\left(0+\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{n}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\frac{1}{n}\\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น เมื่อให้ $n\to\infty$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n(n+1)+n\right)=\frac{1}{3}$$

นั่นคือ $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$

ในการวิเคราะห์เชิงจริง มีการศึกษาฟังก์ชันประเภทต่าง ๆ ที่หาปริพันธ์ได้แบบรีมันน์ เราจะกล่าวอ้างผลดังกล่าวโดยไม่ทำการพิสูจน์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1.2. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $[a, b]$

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่นิยามเป็นช่วง ๆ (piecewise-defined function) แล้ว $f \in \mathcal{R}[a, b]$
2. ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องแล้ว $f \in \mathcal{R}[a, b]$
3. ถ้า f เป็นฟังก์ชันทางเดียว (monotonic function) แล้ว $f \in \mathcal{R}[a, b]$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ จะกล่าวถึงสมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1.3. ให้ f, g หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a, b]$ และ k เป็นค่าคงที่แล้ว

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
5. $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$
6. ถ้า $c \in [a, b]$ และ f หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a, c]$ และ $[c, b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

พิสูจน์. เราจะแสดงให้ดูเฉพาะข้อ 4 สำหรับข้ออื่น ๆ ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด

4. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน $[a, b]$ ทำการเลือก $\mathcal{P}$ และจุด $x_1^*, \ldots, x_n^*$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx &= \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (f(x_k^*) + g(x_k^*))\Delta x_k \\
&= \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} g(x_k^*))\Delta x_k \right) \\
&= \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k + \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} g(x_k^*))\Delta x_k \\
&= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx
\end{aligned}$$

ตามต้องการ □

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ จะกล่าวถึงอสมการที่เกี่ยวข้องกับปริพันธ์จำกัดเขต ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1.4. ให้ f, g หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a, b]$ แล้ว

1. ถ้า f มีขอบเขต กล่าวคือ $m \leq f(x) \leq M$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ แล้ว

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

2. ถ้า $f(x) \geq g(x)$ สำหรับทุก $x \in a, b]$ แล้ว $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

พิสูจน์. เราจะแสดงข้อ 1, 3 ส่วนข้อ 2 ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด

1. ให้ $m \leq f(x) \leq M$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ แบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยด้วยผลแบ่งกั้นซึ่งกำหนดโดยจุด $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$

เนื่องจาก $m \leq f(x) \leq M$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ จะได้ว่า $m \leq f(x_k^*) \leq M$ สำหรับทุก $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ เพราะฉะนั้น

$$m\Delta x_k = m(x_k - x_{k-1}) \leq f(x_k^*)\Delta x_k \leq M(x_k - x_{k-1}) = M\Delta x_k$$

เมื่อรวมผลลัพธ์สำหรับทุกช่วงย่อย $[x_{k-1}, x_k]$ จะได้ว่า

$$m(b-a) \leq \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \leq M(b-a)$$

นั่นคือ $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$ ตามต้องการ

3. สำหรับผลแบ่งกัน $\mathcal{P}$ ใด ๆ โดยอสมการสามเหลี่ยม จะได้ว่า

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k^*)|\Delta x_k$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k\right| \leq \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} |f(x_k^*)|\Delta x_k$$

เนื่องจาก $f(x) = |x|$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจุดใน $\mathbb{R}$ จึงได้ว่า

$$\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k\right| = \left|\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k\right| \leq \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} |f(x_k^*)|\Delta x_k$$

นั่นคือ $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ ตามต้องการ □

ตัวอย่าง 2.1.5. จงเขียนผลบวก $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$ ในรูปของปริพันธ์จำกัดเขต

วิธีทำ. ลิมิตของผลบวกดังกล่าวสามารถเขียนได้ในรูปลิมิตของผลบวกรีมันน์ นั่นคือ

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n(1+\frac{i}{n})}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+1/n}\end{aligned}$$

จากนิยามของผลบวกรีมันน์ จะได้ว่า ผลบวกดังกล่าวคือผลบวกรีมันน์ของฟังก์ชัน $f(x)=\frac{1}{1+x}$ บนช่วงปิด $[0,1]$ เมื่อแบ่ง $[0,1]$ เป็น n ช่วงย่อยเท่า ๆ กัน ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)=\int_0^1\frac{1}{x+1}\,dx$$

ซึ่ง $\int_0^1\frac{1}{x+1}\,dx$ สามารถคำนวณได้จากวิธีที่จะศึกษาในหัวข้อต่อไป

ตัวอย่าง 2.1.6. จงแสดงว่า $\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx=0$

วิธีทำ. โดยทฤษฎีบท 2.1.3 ข้อ 3 จะได้ว่า

$$\left|\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx\right|\le\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\right|\,dx$$

เนื่องจาก $|\sin nx|\le 1$ และ $\frac{1}{x^2+n^2}\le\frac{1}{n^2}$ และจากแคลคูลัสพื้นฐาน จะได้ว่า

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\right|\,dx\le\int_0^{2\pi}\frac{1}{n^2}\,dx=\frac{2\pi}{n^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\right|\,dx\le\int_0^{2\pi}\frac{1}{n^2}\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n^2}=0$$

นั่นคือ

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx=0$$

ตัวอย่าง 2.1.7. หากทราบว่า $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{12}$ แล้ว จงแสดงว่า

$$\left|\int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\sin x}{x^2+1}\,dx\right| \le \frac{\pi}{12e}$$

วิธีทำ. โดยทฤษฎีบท 2.1.3 ข้อ 3 จะได้ว่า

$$\left|\int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\sin x}{x^2+1}\,dx\right| \le \int_1^{\sqrt{3}} \left|\frac{e^{-x}\sin x}{x^2+1}\right|\,dx$$

เนื่องจาก $|\sin x| \le 1$ และสำหรับทุก $x \in [1, \sqrt{3}]$ ได้ว่า $-\frac{1}{e^{\sqrt{3}}} \le e^{-x} \le \frac{1}{e}$ นั่นคือ $|e^{-x}| \le \frac{1}{e}$ จะได้ว่า

$$\int_1^{\sqrt{3}} \left|\frac{e^{-x}\sin x}{x^2+1}\right| \le \frac{1}{e}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

เพราะฉะนั้น

$$\left|\int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\sin x}{x^2+1}\,dx\right| \le \frac{\pi}{12e}$$

แบบฝึกหัดที่ 2.1

1. จงใช้นิยามของปริพันธ์จำกัดเขต คำนวณค่าปริพันธ์ต่อไปนี้
   (a) $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$
   (b) $\displaystyle\int_0^2 (3x+1)\,dx$
   (c) $\displaystyle\int_3^6 (x^2-4x)\,dx$
2. จงใช้นิยามของปริพันธ์จำกัดเขต พิสูจน์ว่า $\displaystyle\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a$
3. จงเขียนผลบวกต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปปริพันธ์จำกัดเขต
   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{t}{n} + \sin\frac{2t}{n} + \dots + \sin\frac{nt}{n}\right)$
   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 4x_k^*(1-3x_k^*)\Delta x_k^*$ เมื่อกำหนด $a=-3, b=3$
4. จงแสดงว่า
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right) = \ln(1+\sqrt{2})$$
5. จงแสดงว่า
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\cos^2\frac{\theta}{n} + \cos^2\frac{2\theta}{n} + \dots + \cos^2\frac{n\theta}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4\theta}$$

6. สำหรับ $p > -1$ จงแสดงว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}}\right) = \frac{1}{m+1}$$

7. จงแสดงว่า $\left|\int_0^1 \frac{\cos nx}{x+1}\,dx\right| \le \ln 2$ สำหรับทุก n

8. จงแสดงว่า

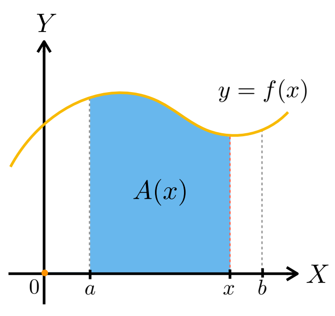
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{x\sin x}\,dx \le \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}$$

2.2 ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต และทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

จากนิยาม 2.1.1 เราจะเห็นว่า การหาปริพันธ์จำกัดเขตสามารถทำได้โดยการหาผลบวกรีมันน์ อย่างไรก็ตาม การคำนวณหาผลบวกรีมันน์นั้นมีความซับซ้อน เราจึงเริ่มต้นพิจารณาการหาปริพันธ์จำกัดเขตจากกระบวนการที่ตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ คือ การปฏิยานุพันธ์นั่นเอง

บทนิยาม 2.2.1. ให้ f เป็นฟังก์ชัน จะกล่าวว่า F เป็น**ปฏิยานุพันธ์** (antidervative) ของ f ถ้า $F'(x) = f(x)$ เขียนแทนด้วย**ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต** (indefinite integral) โดย

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$



ภาพ ที่ 2.3. ฟังก์ชัน พื้นที่ $A(x)$ เมื่อ $A'(x) = f(x)$

ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราได้ศึกษาการหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันว่า เป็นกระบวนการที่ทำย้อนกลับกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งสำหรับปัญหาพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ บนช่วงปิด $[a, b]$ เราพิจารณาปัญหาดังนี้

สมมติให้ $A(x)$ คือฟังก์ชันของพื้นที่ใต้กราฟของ $f(x)$ บนช่วงปิด $[a, x]$ ดังนั้น สำหรับปัญหาการหาพื้นที่ใต้กราฟ f บนช่วง $[a, b]$ เราจะหาฟังก์ชันซึ่งมีสมบัติว่า $A'(x) = f(x), A(0) = 0$ และ $A(b) = A$ เมื่อ A คือพื้นที่ใต้กราฟดังกล่าว ดังภาพ 2.3

จากการกำหนด $A'(x) = f(x)$ คือ A เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f ทำให้ได้ว่า ปฏิยานุพันธ์ F อื่น ๆ ของ f เขียนได้ในรูป $F(x) = A(x) + C$ ดังนั้น เมื่อพิจารณา $F(b) - F(a)$ จะได้ว่า

$$F(b) - F(a) = [A(b) + C] - [A(a) + C] = A + 0 = A$$

และเนื่องจากเราทราบว่า $\int_a^b f(x)\,dx = A$ ทำให้เราได้ความสัมพันธ์ที่สำคัญ นั่นคือ

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

กล่าวคือ ปริพันธ์จำกัดเขตของ f ตามนิยาม 2.1.1 สามารถคำนวณค่าได้จากค่าของปฏิยานุพันธ์ของขอบเขตบน ลบกับค่าของปฏิยานุพันธ์ของขอบเขตล่าง

2.2.1 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 1

จากข้อเท็จจริงดังกล่าว ทำให้เราได้ทฤษฎีบทที่มีความสำคัญมากในแคลคูลัส คือ ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ซึ่งมีอยู่สองส่วน โดยก่อนอื่นเราจะแสดงทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

(fundamental theorem of calculus) ส่วนที่หนึ่ง ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.2.1. (ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 1)
ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บน $[a,b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

พิสูจน์. ให้ $\mathcal{P} := (x_0, ..., x_n)$ เป็นจุดใน $[a,b]$ ซึ่ง

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

โดยเกิดช่วงย่อย $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ เมื่อ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

จากสมมติฐาน $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิม 1.4.2 บนช่วงย่อย $[x_{k-1}, x_k]$ จะได้ว่า มี $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ ที่ทำให้

$$\begin{aligned}
F(x_1) - F(a) &= F'(x_1^*)(x_1 - x_0) &&= f(x_1^*)\Delta x_1 \\
F(x_2) - F(x_1) &= F'(x_2^*)(x_2 - x_1) &&= f(x_2^*)\Delta x_2 \\
&\ \ \vdots &&\ \ \vdots \\
F(b) - F(x_{n-1}) &= F'(x_n^*)(x_n - x_{n-1}) &&= f(x_n^*)\Delta x_n
\end{aligned}$$

รวมสมการทุกสมการ จะได้ว่า

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ จึงได้ว่า เมื่อให้ $n \to \infty$ ทำให้ได้ว่า $\|\mathcal{P}\| \to 0$ จึงได้ว่า

$$F(b) - F(a) = \lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

ตามต้องการ $\square$

เราอาจเขียนสัญลักษณ์การคำนวณค่าของปริพันธ์ไม่จำกัดเขตได้ กล่าวคือ หากปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ คือ $F(x)$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_{x=a}^{b} = F(b) - F(a)$$

ตัวอย่าง 2.2.2. จากตัวอย่าง 2.1.1 จงใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 1 คำนวณค่าปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$

วิธีทำ. เราทราบว่า ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x^2$ คือ $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$ สำหรับค่าคงที่ C ใด ๆ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,dx &= \frac{x^3}{3}+C\Big|_{x=0}^{1}\\ &= \left[\frac{1^3}{3}+C\right]-\left[\frac{0^3}{3}+C\right]=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

2.2.2 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2

จากที่กล่าวมาข้างต้น เราทำการสร้างฟังก์ชันพื้นที่ใต้กราฟของ $f(x)$ บน $[a,x]$ และทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสในส่วนที่หนึ่งทำให้เราทราบว่า ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์จำกัดเขตมีความสัมพันธ์กัน ดังนั้น เราจึงนิยามปริพันธ์ไม่จำกัดเขตได้จากปริพันธ์จำกัดเขต ดังนี้

บทนิยาม 2.2.2. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้แบบรีมันน์บนช่วง $[a,b]$ ฟังก์ชันที่นิยามโดย

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt \qquad t\in[a,b]$$

จะเรียกว่า **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต** (indefinite integral) ของ f

เนื่องจากปริพันธ์จำกัดเขต มีค่าขึ้นอยู่กับการหาลิมิตของปริพันธ์ ดังนั้น เราจึงสามารถใช้ตัวแปรอื่น ๆ นอกเหนือจากตัวแปร x ได้ เช่น

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$$

ตัวแปรเหล่านี้ จะเรียกว่า **ตัวแปรหุ่น** (dummy variable)

เราทราบว่า F ซึ่งเป็นปฏิยานุพันธ์ของ f มีความสัมพันธ์ตามทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 1 ดังนั้น หากปฏิยานุพันธ์ของ f นิยามโดยปริพันธ์ไม่จำกัดเขตดังนิยาม 2.2.2 แล้ว คำถามที่น่าสนใจคือ $F'(x)$ จะมีความสัมพันธ์ในลักษณะอย่างไร ก่อนที่จะตอบคำถามเหล่านั้น จะขอยกทฤษฎีบทที่สำคัญที่ใช้ในการพิสูจน์ ดังนี้

ในทฤษฎีบท 1.12.1 เราได้กล่าวในกรณีของฟังก์ชันสองตัวแปร สำหรับกรณีฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราสามารถกล่าวได้เช่นกัน ในที่นี้ขอยกทฤษฎีบทดังกล่าวโดยไม่ทำการพิสูจน์ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.2.3. (ทฤษฎีบทค่าสุดขีดสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียว)
ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว f มีทั้งค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วงปิด $[a,b]$

นอกจากนี้ หาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะทำให้ได้ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง (intermediate-value theorem) ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.2.4. (ทฤษฎีบทระหว่างกลาง)
ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ k อยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ แล้วจะมี $x\in[a,b]$ ที่ทำให้ $f(x)=k$ มีทั้งค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วงปิด $[a,b]$

ในทฤษฎีบท 1.4.2 เราได้กล่าวถึงทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับอนุพันธ์ ในทำนองคล้ายกัน เราสามารถพิจารณาทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ (The mean-value theorem for integrals) ได้เช่นกัน สำหรับหัวข้อนี้ เราจะพิจารณาทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ใน

รูปอย่างอ่อน (weak form) เท่าที่เพียงพอในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไป ทั้งนี้ เราจะกล่าวถึงทฤษฎีบทค่ามัชฌิมแบบวางนัยทั่วไปในหัวข้อถัดไป

ทฤษฎีบท 2.2.5. (ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์)
ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว มีจุด $x^* \in [a, b]$ ซึ่งทำให้

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x^*)(b-a)$$

พิสูจน์. โดยทฤษฎีบท 1.12.1 สมมติว่า f มีค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์บน $[a, b]$ เท่ากับ M และ m ตามลำดับ นั่นคือ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ แล้ว $m \le f(x) \le M$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.1.4 จะได้ว่า

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

เพราะฉะนั้น

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M \tag{2.2.1}$$

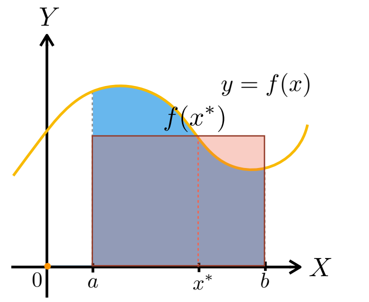
เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ซึ่ง f ให้ค่าเป็น m และ M โดยทฤษฎีบทค่าสุดสุดขีด (ทฤษฎีบท 2.2.3) และสอดคล้องกับเงื่อนไข (2.2.1) โดยทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง (ทฤษฎีบท 2.2.4) จะได้ว่า มี $x^* \in [a, b]$ ที่ทำให้

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(x^*)$$

หรือได้ว่า

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x^*)(b-a)$$

ตามต้องการ □



ภาพที่ 2.4. ความหมายทางเรขาคณิตของทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์

ความหมายทางเรขาคณิตของทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ สามารถพิจารณาได้ดังภาพ 2.4 กล่าวคือ เราสามารถหาจุด x^* ในช่วง $[a, b]$ ที่ทำให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความกว้าง $b-a$ ความสูง $f(x^*)$ เท่ากับพื้นที่ใต้กราฟของ $f(x)$ บน $[a, b]$

เราพร้อมแล้วที่จะพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2 ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2.6. (ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2)
ถ้า f มีความต่อเนื่องบนช่วง แล้ว f มีปฏิยานุพันธ์บนช่วงนั้น และถ้า a เป็นจุดในช่วงนั้นแล้ว F ซึ่งนิยามโดย

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f นั่นคือ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก x บนช่วง กล่าวคือ

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$$

พิสูจน์. ก่อนอื่นจะแสดงว่า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f ที่ทุก x บนช่วง ๆ หนึ่ง

จะเห็นว่า ถ้า $x > a$ และ x อยู่ในช่วงนั้นแล้ว พื้นที่เครื่องหมายสุทธิที่นิยามโดย $\int_a^x f(x)\,dx$ บนช่วง $[a, x]$ และ จาก f มีความต่อเนื่อง ทำให้ปฏิยานุพันธ์ $F(x)$ มีค่า ในกรณีที่ $x \leq a$ โดยทฤษฎีบท 2.1.3 ข้อ 2 ก็จะสามารถแสดงได้ว่า $F(x)$ มีค่าเช่นกัน

ต่อไปจะแสดงว่า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก x บนช่วง ถ้า x ไม่เป็นจุดปลายช่วงแล้ว โดยนิยามของอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ (ทฤษฎีบท 2.2.5) จะได้ว่า มี x^* ที่ทำให้

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{h}[f(x^*)(x+h-x)] = f(x^*)$$

โดยที่ $x \leq x^* \leq x+h$ ดังนั้น เมื่อให้ $h \to 0$ จะได้ว่า $x^* \to x$ และเนื่องจาก f มีความต่อเนื่องบนช่วง ทำให้ได้ว่า

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) = \lim_{h\to 0} f(x^*) = f(x)$$

ทั้งนี้ สำหรับกรณีที่ x เป็นจุดปลายช่วง จะแสดงได้โดยใช้ลิมิตด้านเดียวและทำได้ในทำนองเดียวกัน จึงจบการพิสูจน์ตามต้องการ □

จากทฤษฎีบท 2.2.6 แสดงให้เห็นว่า $F(x)$ ที่นิยามหาอนุพันธ์ได้ จึงสรุปได้ว่า $F(x)$ มีความต่อเนื่องบนช่วงเช่นกัน

ตัวอย่าง 2.2.7. จงหาค่า $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\sin t\,dt\right]$

วิธีทำ. เนื่องจาก $f(t) = e^{t^2}\sin t$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2 จึงได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x e^{t^2}\sin t\,dt\right] = e^{x^2}\sin x$$

จะเห็นว่า จากทฤษฎีบท 2.2.6 เราหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน F เทียบกับ x เมื่อ x เป็นตัวแปรที่อยู่ที่ขอบเขตบนของการหาปริพันธ์ ดังนั้น ในกรณีที่ขอบเขตบนอยู่ในรูปของฟังก์ชันอื่น ๆ รวมถึงขอบเขตล่างไม่ได้เป็นจุด a การหาอนุพันธ์ของปฏิยานุพันธ์ดังกล่าวจึงมีการเปลี่ยนรูป ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2.8. ให้ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ $c \in [a,b]$, u, v เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้โดยที่เรนจ์ $R_u, R_v \subset [a,b]$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

พิสูจน์. ให้ $F[a,b] \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $F(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\,dt$ โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2 จะได้ว่า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ เพราะฉะนั้น

$$(F \circ v)(x) = \int_c^{v(x)} f(t)\,dt$$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า $(F \circ v)'(x) = F'(v(x))v'(x) = f(v(x))v'(x)$ นั่นคือ

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{c} f(t)\,dt = f(v(x))v'(x)$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt &= \frac{d}{dx}\left(\int_{u(x)}^{c} f(t)\,dt + \int_c^{v(x)} f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(-\int_c^{u(x)} f(t)\,dt + \int_c^{v(x)} f(t)\,dt\right) \\
&= -\frac{d}{dx}\int_c^{u(x)} f(t)\,dt + \frac{d}{dx}\int_c^{v(x)} f(t)\,dt \\
&= -f(u(x))u'(x) + f(v(x))v'(x) \\
&= f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

ตามต้องการ □

ตัวอย่าง 2.2.9. จงหาค่า $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,dt\right]$

วิธีทำ. จากทฤษฎีบท 2.2.8 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\int_x^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,dt\right] &= \frac{\sin x^2}{x^2}\frac{d(x^2)}{dx} - \frac{\sin x}{x}\frac{dx}{dx} \\
&= \frac{2\sin x^2}{x} - \frac{\sin x}{x}
\end{aligned}$$

2.2.3 การเปลี่ยนตัวแปรการหาปริพันธ์

ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราเคยได้ศึกษาการเปลี่ยนตัวแปรการหาปริพันธ์ (integration by substitution) เมื่อเราไม่สามารถหาปริพันธ์โดยตรงได้โดยตรง ในส่วนนี้เราจะพิสูจน์การเปลี่ยนตัวแปรของปริพันธ์จำกัดเขต ดังนี้

หมายเหตุ. จะกล่าวว่า $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) < f(y)$ หรือ $f(x) > f(y)$

ทฤษฎีบท 2.2.10. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน $[a, b]$ และ ϕ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และเป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้บน $[\alpha, \beta]$ โดยที่ $\alpha = \phi(a), \beta = \phi(b)$ และ ϕ' หาอนุพันธ์ได้แบบรีมันน์บน $[\alpha, \beta]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\, dt$$

พิสูจน์. สมมติว่า ϕ เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ ดังนั้น ϕ มีตัวผกผัน กล่าวคือ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ จะได้ว่า $\alpha = \phi^{-1}(a)$ และ $\beta = \phi^{-1}(b)$

เลือกผลแบ่งกั้น $\mathcal{P} = (a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b)$ บนช่วง $[a, b]$ และ $\mathcal{Q} = (\alpha = t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n = \beta)$ บนช่วง $[\alpha, \beta]$ โดยที่ $t_i = \phi^{-1}(x_i)$

โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับอนุพันธ์ (ทฤษฎีบท 1.4.2) จะได้ว่า สำหรับแต่ละ y^* บนช่วงย่อย $[t_{k-1}, t_k]$

$$\Delta x_k = \phi(t_k) - \phi(t_{k-1}) = \phi'(t^*)\Delta t_k$$

ให้ $x_k^* = \phi(t_k^*)$ โดยที่ x_k^* อยู่ในช่วงย่อย $[x_{k-1}, x_k]$ สร้างผลบวกรีมันน์

$$S(f; \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\phi(t_k^*))\phi'(t_k^*)\Delta t_k$$

เนื่องจาก ϕ หาอนุพันธ์ได้ จึงได้ว่า ϕ มีความต่อเนื่อง และต่อเนื่องแบบเอกรูป จึงได้ว่า เมื่อ $\|\mathcal{P}\| \to 0$ แล้ว $\|\mathcal{Q}\| \to 0$ ทำให้ได้ว่า

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\, dt$$

ตามต้องการ □

ตัวอย่าง 2.2.11. จงหาค่า $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt$

วิธีทำ. ให้ $x = \phi(t) = \sqrt{t}$ สำหรับ $t \in [1, 4]$ จะเห็นว่า $\phi'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ ซึ่งมีความต่อเนื่องบน $[1, 4]$ ถ้าให้ $f(x) = 2\sin x$ แล้ว ปริพัทธ์จะอยู่ในรูป $(f \circ \phi) \cdot \phi'$

ดังนั้นสำหรับขอบเขตการหาปริพันธ์จะเปลี่ยนไป จาก $t = 1$ จะได้ $x = \phi(1) = 1$ และถ้า $t = 4$ จะได้ $x = \phi(4) = 2$ นั่นคือ

$$\int_1^4 \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt = \int_1^2 2\sin x\, dx = -\cos x|_1^2 = 2(\cos 1 - \cos 2)$$

แบบฝึกหัดที่ 2.2

1. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} 4x(1-x^2)\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{-2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

   (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_{0}^{3\pi/4} |\cos x|\,dx$

   (e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{4-3x^4}}\,dx$

2. กำหนดฟังก์ชัน $F(x)$ โดย $F(x) = \displaystyle\int_{1}^{x} (3t^2-3)\,dt$ จงหาอนุพันธ์ $\dfrac{dF(x)}{dx}$ โดย

   (a) ใช้การหาปริพันธ์โดยตรง จากนั้นหาอนุพันธ์เทียบกับ x

   (b) ใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   (a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_{1}^{x} \sin(t^2)\,dt\right]$

   (b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_{0}^{x} e^{\sqrt{t}}\,dt\right]$

   (c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_{x}^{0} t\sec t\,dt\right]$

   (d) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_{1}^{\sin x} (1-t^2)\,dt\right]$

   (e) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_{x^2}^{x^3} \sin^2 t\,dt\right]$

   (f) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_{3x}^{x^2} \frac{t-1}{t^2+1}\,dt\right]$

4. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $F(x) = \displaystyle\int_{x}^{5x} \frac{1}{t}\,dt$ เป็นฟังก์ชันค่าคงที่บนช่วง $(0,+\infty)$ พร้อมหาค่าคงที่นั้น (คำใบ้ : พิจารณาจากอนุพันธ์ของ F)

5. กำหนดให้ $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} \frac{t-3}{t^2+7}\,dt$ สำหรับ $x \in (-\infty,\infty)$

   (a) จงหาค่า x ที่ทำให้ F ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

   (b) จงหาช่วงของ F ที่ F เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด

   (c) จงหาช่วงของ F ที่ F มีความเว้าขึ้น และเว้าลง

6. ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$$

7. จงแสดงว่า สำหรับค่าคงที่ a ใด ๆ

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\frac{a}{u} + C$$

8. จงแสดงว่า สำหรับค่าคงที่ $\alpha > 1$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha - \cos x}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

9. จงหาค่าของลิมิต $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{ex^2/\pi - e\pi/4 + \int_x^{\pi/2} e^{\sin t}\,dt}{1+\cos 2x}$

10. **ฟังก์ชันลอการิทึมฐานธรรมชาติ** (natural logarithm function) $\ln x$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยปริพันธ์จำกัดเขต

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \qquad \text{เมื่อ } x > 0$$

    (a) จงใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสส่วนที่ 2 แสดงว่า $\dfrac{d}{dx}[\ln x] = \dfrac{1}{x}$

    (b) จงใช้นิยามที่กล่าวมาข้างต้น แสดงว่า สำหรับจำนวนจริงบวก a, c จะได้ว่า $\ln(ac) = \ln a + \ln c$ (คำใบ้ : สร้างฟังก์ชัน $f(x) = \ln(ax)$ แล้วพิจารณาเทียบ $\ln ax$ กับ $\ln x$)

2.3 ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราได้กล่าวถึงทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ในรูปแบบอ่อน ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงทฤษฎีบทค่ามัชฌิมฉบับสมบูรณ์ เพื่อใช้เป็นเครื่องมือช่วยในการประมาณค่าของปริพันธ์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.3.1. (ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมแบบที่หนึ่งทั่วไปสำหรับปริพันธ์)
ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ โดยที่ $g(x) \neq 0$ และ $g(x)$ ไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมายบน $[a, b]$ แล้ว จะมี $\xi \in [a, b]$ ที่ทำให้

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

พิสูจน์. เราจะแสดงในกรณีที่ $g(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ สำหรับกรณี $g(x) < 0$ จะสามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน

จาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยทฤษฎีบท 2.2.3 จะได้ว่า f มีค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์บน $[a, b]$ สมมติว่าค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์นั้นคือ M และ m ตามลำดับ ดังนั้นสำหรับทุก $x \in [a, b]$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
m \le \quad & f(x) \le M \\
mg(x) \le \quad & f(x)g(x) \le Mg(x) \\
m\int_a^b g(x)\,dx \le & \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $g(x) > 0$ จึงได้ว่า

$$m \le \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx} \le M$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $m \le f(x) \le M$ โดยทฤษฎีบท 2.2.4 จะได้ว่า มี $\xi \in [a,b]$ ที่ทำให้

$$f(\xi) = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx}$$

นั่นคือ มี $\xi \in [a,b]$ ที่ทำให้

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

ตามต้องการ $\square$

หมายเหตุ. จะเห็นว่า ในทฤษฎีบท 2.3.1 ถ้าให้ $g(x) = 1$ จะได้ว่า ทฤษฎีบท 2.3.1 ลดรูปเป็นรูปอย่างอ่อนในทฤษฎีบท 2.2.5 กล่าวคือ มี $\xi \in [a,b]$ ที่ทำให้

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

ตัวอย่าง 2.3.2. จงหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx$

วิธีทำ. เนื่องจาก $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,\frac{1}{2}]$ และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[0,\frac{1}{2}]$ ซึ่งมีค่าเป็นบวกตลอดบนช่วงดังกล่าว โดยทฤษฎีบท 2.2.5 จะได้ว่า มี $\xi \in [0,\frac{1}{2}]$ ที่ทำให้

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx = \left(\frac{1}{2} - 0\right) f(\xi) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\xi^2}$$

เนื่องจาก $1 \le f(\xi) \le \frac{4}{3}$ จึงได้ว่า $\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}f(\xi) \le \frac{2}{3}$ นั่นคือ

$$\frac{1}{2} \le {}_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx \le \frac{2}{3}$$

ตัวอย่าง 2.3.3. จงหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของปริพันธ์ต่อไปนี้

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad \text{สำหรับทุก } k^2 < 2$$

วิธีทำ. จากทฤษฎีบท 2.3.1 เลือก $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}, g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ จะเห็นว่า $g(x)$ ไม่เปลี่ยนเครื่องหมายบนช่วง $[0, \frac{1}{2}]$ จึงได้ว่า มี $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} &= \frac{1}{\sqrt{1-k^2\xi^2}} \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}[\sin^{-1} x]_0^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{\pi}{6} f(\xi)
\end{aligned}$$

ต่อไปจะพิจารณาขอบเขตของ f ที่เกิดขึ้น จะพบว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0, \frac{1}{2}]$ เมื่อ $k^2 < 2$ นั่นคือ $f(0) = 1, f(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}}$

เนื่องจาก $f(0) \le f(\xi) \le f(\frac{1}{2})$ จึงได้ว่า

$$\frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{6} f(\xi) \le \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\frac{\pi}{6} \le \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \le \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}}$$

ตามต้องการ

ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราได้ศึกษาการหาปริพันธ์ กรณีที่ปริพันธ์อยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชัน คือ การหาปริพันธ์แบบแบ่งส่วน เราจะทำการพิสูจน์ผลของการหาปริพันธ์โดยวิธีการแบ่งส่วน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3.4. (การหาปริพันธ์แบบแบ่งส่วน)
ให้ $F(x), G(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน $[a, b]$ และให้ $f(x) = F'(x)$ และ $g(x) = G'(x)$ หาปริพันธ์ได้แบบรีมันน์แล้ว

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\,dx$$

พิสูจน์. เนื่องจาก $(FG)(x)$ หาอนุพันธ์ได้บน $[a, b]$ ดังนั้น

$$(FG)'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x)$$

เนื่องจาก F, G เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ f, g หาปริพันธ์ได้ ดังนั้น fG และ Fg หาปริพันธ์ได้แบบรีมันน์ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 1 (ทฤษฎีบท 2.2.1) จะได้ว่า

$$F(x)G(x)|_a^b = \int_a^b (FG)'(x) = \int_a^b f(x)G(x)\,dx + \int_a^b F(x)g(x)\,dx$$

นั่นคือ

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\,dx$$

□

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทค่ามัชฌิมที่สองสำหรับปริพันธ์

ทฤษฎีบท 2.3.5. (ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมแบบที่สองสำหรับปริพันธ์)
ให้ f เป็นฟังก์ชันทางเดียว และ f, f', g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ แล้ว จะได้ว่า มี $\xi \in [a, b]$ ซึ่ง

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx$$

พิสูจน์. ให้ $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,dt$ จะเห็นว่า $G(a) = 0$ และเนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ส่วนที่ 2 (ทฤษฎีบท 2.2.6) จะได้ว่า $G'(x) = g(x)$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= \int_a^b f(x)G'(x)\,dx \\ &= f(x)G(x)|_a^b - \int_a^b G(x)f'(x)\,dx\end{aligned}$$

เนื่องจาก G เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง หาปริพันธ์ได้ และ f เป็นฟังก์ชันทางเดียวที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ โดยทฤษฎีบท 2.3.1 จะได้ว่า มี $\xi \in [a, b]$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= f(b)G(b) - G(\xi)\int_a^b f'(x)\,dx \\ &= f(b)G(b) - G(\xi)[f(b) - f(a)] \\ &= f(b)[G(b) - G(\xi)] + f(a)G(\xi) \\ &= f(b)\left[\int_a^b g(t)\,dt - \int_a^\xi g(t)\,dt\right] + f(a)G(\xi) \\ &= f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx + f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx\end{aligned}$$

ตามต้องการ □

ตัวอย่าง 2.3.6. ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0, 1]$ แล้ว จงแสดงว่า

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} f(0)$$

พิสูจน์. จะเห็นว่า เราสามารถเขียนปริพันธ์ในโจทย์ได้ในรูป

$$\int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx = \int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx + \int_{1/\sqrt{n}}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx$$

สำหรับ $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx$ โดยใช้ทฤษฎีบท 2.3.1 จะได้ว่า มี $\xi \in [0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}\int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx &= f(\xi) \int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx \\ &= f(\xi)\tan^{-1}\sqrt{n}\end{aligned}$$

ซึ่งจะได้ว่า เมื่อ $n \to \infty$ จะได้ $\xi \to 0$ และ $\tan^{-1}\sqrt{n} \to 0$ นั่นคือ $f(\xi)\tan^{-1}\sqrt{n} \to \frac{\pi}{2} f(0)$

ต่อไปจะพิจารณาพจน์ $\displaystyle\int_{1/\sqrt{n}}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx$ โดยทฤษฎีบท 2.3.1 จะได้ว่า มี $\xi_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ ที่ทำให้

$$\int_{1/\sqrt{n}}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx = f(\xi_1) \int_{1/\sqrt{n}}^1 \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx$$

เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องบน $[0, 1]$ จะได้ว่า f มีขอบเขต กล่าวคือ มีจำนวนจริงบวก K ซึ่ง $|f(x)| \le K$ สำหรับทุก $x \in [0, 1]$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx\right| &\le K\left|\int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx\right| \\ &= K|\tan^{-1} n - \tan^{-1}\sqrt{n}|\end{aligned}$$

เมื่อ $n \to \infty$ จะได้ $|\tan^{-1} n - \tan^{-1}\sqrt{n}| \to 0$ จึงสรุปได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} f(0)$$

ตามต้องการ $\square$

ทฤษฎีบท 2.3.5 จะเป็นกรณีเฉพาะของทฤษฎีบทต่อไปนี้ โดยเราจะยกทฤษฎีบทค่ามัชฌิมแบบที่สองทั่วไปโดยไม่ทำการพิสูจน์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.3.7. (ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมแบบที่สองทั่วไปสำหรับปริพันธ์)
ให้ f, g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$

1. ถ้า $f(x) \geq 0$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[a, b]$ แล้ว จะได้ว่า มี $\xi \in [a, b]$ ซึ่ง
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx$$
2. ถ้า $f(x) \geq 0$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a, b]$ แล้ว จะได้ว่า มี $\xi \in [a, b]$ ซึ่ง
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx$$
3. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด แต่ไม่เป็นบวกตลอดช่วง $[a, b]$ แล้ว จะได้ว่า มี $\xi \in [a, b]$ ซึ่ง
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx$$

แบบฝึกหัดที่ 2.3

1. จงหาขอบเขตบนและขอบเขตล่าง โดยใช้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ต่อไปนี้
   (a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(1+kx)^{3/2}(1+x)^{5/2}}\,dx$
   (b) $\displaystyle\int_{-1}^4 \frac{\sin^3 x}{(5+x)^{3/2}}\,dx$
   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos^2\theta}{\ln(2+\theta^3)}\,d\theta$
2. จงใช้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมแบบที่หนึ่ง และแบบที่สอง ในการพิจารณาปริพันธ์
$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx$$
   เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $f(x) = e^x$ และ $g(x) = x$ บน $[-1, 1]$
3. จงแสดงว่า มี $\xi_1, \xi_2 \in [0, 1]$ ซึ่ง
$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-\xi_1} = \frac{e-1}{e\sqrt{1-\xi_2^2}}$$

2.4 การหาอนุพันธ์ภายใต้เครื่องหมายปริพันธ์

โดยปกติ การหาอนุพันธ์ภายใต้เครื่องหมายปริพันธ์ เราสามารถใช้ทฤษฎีบท 2.2.6 หรือทฤษฎีบท 2.2.8 ในการหาอนุพันธ์ได้ อย่างไรก็ตาม บางสถานการณ์ เราต้องการหาอนุพันธ์ของปริพันธ์ที่ต้องการหาเป็นฟังก์ชันของตัวแปรเสริม α ในรูป

$$\phi(\alpha) = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$$

และต้องการหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรเสริมนั้น พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.4.1. กำหนดให้ $f(x,\alpha) = (3x+\alpha)^2$
จงหา $\dfrac{d}{d\alpha}\left[\displaystyle\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx\right]$ และ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial}{d\alpha} f(x,\alpha)\,dx$

วิธีทำ. สำหรับพจน์ $\dfrac{d}{d\alpha}\left[\displaystyle\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx\right]$ ก่อนอื่นจะหาปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx$ ก่อน โดยมองว่า α เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha}\left[\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx\right] &= \frac{d}{d\alpha}\left[\int_\alpha^{3+\alpha} \frac{u^2}{3}\,du\right] \\
&= \frac{d}{d\alpha}\left[\left.\frac{u^3}{9}\right|_\alpha^{3+\alpha} dx\right] \\
&= \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{(3+\alpha)^3}{9} - \frac{\alpha^3}{9}\right] \\
&= 3+2\alpha
\end{aligned}$$

สำหรับพจน์ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial}{d\alpha} f(x,\alpha)\,dx$ จะทำการหาอนุพันธ์ย่อยก่อน จากนั้นจึงหาปริพันธ์เทียบกับ x จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\partial}{d\alpha} f(x,\alpha)\,dx &= \int_0^1 \frac{\partial}{d\alpha}(3x+\alpha)^2\,dx \\
&= \int_0^1 2(3x+\alpha)\,dx \\
&= \left.\frac{6x^2}{2} + 2\alpha x\right|_0^1 \\
&= 3+2\alpha
\end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นว่าในกรณีนี้ $\dfrac{d}{d\alpha}\left[\displaystyle\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx\right] = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial}{d\alpha} f(x,\alpha)\,dx$

คำถามที่น่าสนใจคือ สำหรับฟังก์ชันใด ๆ เราสามารถสลับที่ระหว่างการหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรเสริม กับการหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปรหลักได้เสมอไปหรือไม่ ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า ไม่จริงเสมอไป

ตัวอย่างค้าน 2.4.2. (นำมาจากบทความ [17]) สำหรับฟังก์ชัน

$$f(x,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{x\alpha^3}{(x^2+\alpha^2)^2} & ,x\neq 0 \text{ หรือ } \alpha\neq 0\\ 0 & ,x=0 \text{ และ } \alpha=0\end{cases}$$

กำหนดให้ $\phi(\alpha)=\displaystyle\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx$

จงพิจารณาว่า $\dfrac{d}{d\alpha}\left[\displaystyle\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx\right]_{\alpha=0}=\displaystyle\int_0^1\frac{\partial}{d\alpha}f(x,\alpha)\,dx\bigg|_{\alpha=0}$ หรือไม่

วิธีทำ. จะเห็นว่า ถ้า $\alpha=0$ จะได้ว่า

$$\phi(0)=\int_0^1 f(x,0)\,dt=\int_0^1 0\,dx=0$$

เมื่อ $\alpha\neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\phi(\alpha)&=\int_0^1\frac{x\alpha^3}{(x^2+\alpha^2)^2}\,dx\\&=\int_{\alpha^2}^{1+\alpha^2}\frac{\alpha^3}{2u^2}\,du\\&=\frac{\alpha}{2(1+\alpha^2)}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{d}{d\alpha}\left[\displaystyle\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx\right]=\dfrac{d}{d\alpha}\left(\dfrac{\alpha}{2(1+\alpha^2)}\right)=\dfrac{1-\alpha^2}{2(1+\alpha^2)^2}$

และได้ว่า $\dfrac{d}{d\alpha}\left[\displaystyle\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx\right]_{\alpha=0}=\dfrac{1}{2}$

ต่อไป จะพิจารณาพจน์ $\displaystyle\int_0^1\frac{\partial}{d\alpha}f(x,\alpha)\,dx$ จะเห็นว่า เมื่อกำหนด $f(x,\alpha)$ ดังตัวอย่าง จะได้ว่า (ให้ผู้อ่านแสดงเป็นแบบฝึกหัด)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{x\alpha^2(3x^2-\alpha^2)}{(x^2+\alpha^2)^3} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

ซึ่งจะเห็นว่า $\dfrac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)\bigg|_{\alpha=0}=0$ นั่นคือ

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx\right]_{\alpha=0}\neq\int_0^1\frac{\partial}{d\alpha}f(x,\alpha)\,dx\bigg|_{\alpha=0}$$

จะเห็นว่า เงื่อนไขที่ทำให้ค่าสองค่านี้ไม่เท่ากันคือ การที่ $\dfrac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $(0,0)$ ดังนั้น เราจึงจะพิจารณาเงื่อนไขที่ทำให้การสลับที่ระหว่างอนุพันธ์ของปริพันธ์เทียบกับตัวแปรเสริม กับปริพันธ์ของอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปรเสริม มีค่าเท่ากัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.4.3. (ทฤษฎีบทของไลบ์นิตซ์ : Leibniz's Theorem)
ให้ $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$ โดยที่ $u(\alpha), v(\alpha)$ หาอนุพันธ์ได้บนช่วงปิด $[\alpha_0, \alpha_1]$ ถ้า $f(x,\alpha)$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในบริเวณซึ่ง $\alpha_0 \le \alpha \le \alpha_1$, $u(\alpha) \le x \le v(\alpha)$ แล้ว

$$\frac{d\phi(\alpha)}{d\alpha} = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx - f(u,\alpha)\frac{du}{d\alpha} + f(v,\alpha)\frac{dv}{d\alpha}$$

พิสูจน์. ก่อนอื่น สร้างฟังก์ชัน $\Delta\phi(\alpha) := \phi(\alpha+\Delta\alpha) - \phi(\alpha)$ ดังนั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\Delta\phi(\alpha) &= \int_{u(\alpha+\Delta\alpha)}^{v(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx - \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx \\
&= \int_{u(\alpha+\Delta\alpha)}^{u(\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx + \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx \\
&\quad + \int_{v(\alpha)}^{v(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx - \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx \\
&= \left(\int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} [f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)]\,dx\right) \\
&\quad - \int_{u(\alpha)}^{u(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx + \int_{v(\alpha)}^{v(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx
\end{aligned}$$

หารสมการทั้งสมการด้วย $\Delta\alpha$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta\phi(\alpha)}{\Delta\alpha} &= \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,dx \\
&\quad -\frac{1}{\Delta\alpha}\int_{u(\alpha)}^{u(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx \\
&\quad +\frac{1}{\Delta\alpha}\int_{v(\alpha)}^{v(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx
\end{aligned}$$

สำหรับพจน์แรก โดยใช้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับอนุพันธ์ (ทฤษฎีบท 1.4.2) จะได้ว่า มี $\theta \in (\alpha, \alpha+\Delta\alpha)$ ที่ทำให้

$$f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha) = \Delta\alpha\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}$$

กล่าวคือ

$$\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{\partial f(x,\theta)}{\partial \alpha}$$

สำหรับพจน์ที่สอง โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ (ทฤษฎีบท 2.2.5) จะได้ว่า มี $\xi_1 \in [u(\alpha), u(\alpha+\Delta\alpha)]$ ที่ทำให้

$$\frac{1}{\Delta\alpha}\int_{u(\alpha)}^{u(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx = f(\xi_1,\alpha+\Delta\alpha)\left[\frac{u(\alpha+\Delta\alpha) - u(\alpha)}{\Delta\alpha}\right]$$

และสำหรับพจน์ที่สาม ในทำนองคล้ายกัน โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ (ทฤษฎีบท 2.2.5) จะได้ว่า มี $\xi_2 \in [v(\alpha), v(\alpha+\Delta\alpha)]$ ที่ทำให้

$$\frac{1}{\Delta\alpha}\int_{v(\alpha)}^{v(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx = f(\xi_2,\alpha+\Delta\alpha)\left[\frac{v(\alpha+\Delta\alpha)-v(\alpha)}{\Delta\alpha}\right]$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\phi(\alpha)}{\Delta\alpha} &= \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,dx \\ &\quad -f(\xi_1,\alpha+\Delta\alpha)\left[\frac{u(\alpha+\Delta\alpha)-u(\alpha)}{\Delta\alpha}\right] \\ &\quad +f(\xi_2,\alpha+\Delta\alpha)\left[\frac{v(\alpha+\Delta\alpha)-v(\alpha)}{\Delta\alpha}\right]\end{aligned}$$

เมื่อให้ $\Delta\alpha \to 0$ จะทำให้ได้ว่า $\theta \to \alpha$ และจากการที่ u, v หาอนุพันธ์ได้ ทำให้ได้ว่า $\xi_1 \to u(\alpha), \xi_2 \to v(\alpha)$ นั่นคือ

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx - f(u,\alpha)\frac{du}{d\alpha} + f(v,\alpha)\frac{dv}{d\alpha}$$

ตามต้องการ □

หมายเหตุ. เมื่อขอบเขตบนและขอบเขตล่างของปริพันธ์เป็นค่าคงที่ กล่าวคือ สำหรับค่าคงที่ a, b นิยาม $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ เราจะได้ว่า

$$\frac{d\phi(\alpha)}{d\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx - f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha} + f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx$$

ตัวอย่าง 2.4.4. กำหนดให้ $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^{\alpha^2} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx$ โดยที่ $\alpha > 0$ แล้ว จงหา $\phi'(\alpha)$

วิธีทำ. สมมติให้ $f(x,\alpha) = \dfrac{\sin\alpha x}{x}$ โดยที่ $\alpha > 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\phi'(\alpha) &= \int_\alpha^{\alpha^2} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx - f(\alpha,\alpha)\frac{d\alpha}{d\alpha} + f(\alpha^2,\alpha)\frac{d\alpha^2}{d\alpha} \\ &= \int_\alpha^{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)dx - \left(\frac{\sin(\alpha^2)}{\alpha}\right) + \left(\frac{\sin(\alpha^3)}{\alpha^2}\right)(2\alpha) \\ &= \int_\alpha^{\alpha^2} \cos(\alpha x)\,dx - \frac{\sin(\alpha^2)}{\alpha} + \frac{2\sin(\alpha^3)}{\alpha} \\ &= \left.\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\right|_\alpha^{\alpha^2} - \frac{\sin(\alpha^2)}{\alpha} + \frac{2\sin(\alpha^3)}{\alpha} \\ &= \frac{3\sin(\alpha^3) - 2\sin(\alpha^2)}{\alpha}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.4.5. หากทราบว่า $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$ เมื่อ $\alpha > 1$ แล้ว จงหา $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{(2 - \cos x)^2}$

วิธีทำ. ให้ $\displaystyle\phi(\alpha) = \int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$

จะเห็นว่า หากกำหนดให้ $f(x, \alpha) = \dfrac{1}{\alpha - \cos x}$ โดยที่ $\alpha > 1$ จะพบว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเมื่อ $0 \leq x \leq \pi$ และ $\alpha \in (0, \infty)$ ดังนั้น

$$\phi'(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{\alpha - \cos x}\right) dx = -\int_0^\pi \frac{1}{(\alpha - \cos x)^2}\, dx$$

และจะพบว่า

$$\phi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}\right) = -\frac{\alpha\pi}{(\alpha^2 - 1)^{3/2}}$$

นั่นคือ

$$\int_0^\pi \frac{1}{(\alpha - \cos x)^2}\, dx = \frac{\alpha\pi}{(\alpha^2 - 1)^{3/2}}$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $\alpha = 2$ จึงได้ว่า

$$\int_0^\pi \frac{1}{(2 - \cos x)^2}\, dx = \frac{2\pi}{(3)^{3/2}}$$

ในทำนองเดียวกัน หากฟังก์ชันของตัวแปรเสริม กำหนดโดย $\displaystyle\phi(\alpha) = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx$ เมื่อทำการหาปริพันธ์ของ $\phi(\alpha)$ เทียบกับ α จะพบว่า ปริพันธ์ดังกล่าวอยู่ในรูปปริพันธ์ซ้อน เราสามารถสลับลำดับการหาปริพันธ์ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.4.6. ให้ $\displaystyle\phi(\alpha) = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx$ และ $f(x, \alpha)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณซึ่ง $u \leq x \leq v$ และ $a \leq \alpha \leq b$ ถ้า u และ v เป็นค่าคงที่แล้ว

$$\int_a^b \phi(\alpha)\, d\alpha = \int_a^b \int_u^v f(x, \alpha)\, dx\, d\alpha = \int_u^v \int_a^b f(x, \alpha)\, d\alpha\, dx$$

พิสูจน์. สมมติว่า $\displaystyle F(\alpha) = \int_u^v \int_a^\alpha f(x, \alpha)\, d\alpha\, dx$

เนื่องจาก $f(x, \alpha)$ ต่อเนื่อง และ $\displaystyle\int_a^\alpha f(x, \alpha)\, d\alpha$ ต่อเนื่อง โดยทฤษฎีบทไลบ์นิตซ์ (ทฤษฎีบท 2.4.3) ทำให้ได้ว่า

$$F'(\alpha) = \int_u^v \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^\alpha f(x, \alpha)\, d\alpha\, dx = \int_u^v f(x, \alpha)\, dx = \phi(\alpha)$$

นั่นคือ $F(\alpha)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $\phi(\alpha)$ ได้ว่า สำหรับค่าคงที่ C ใด ๆ ปริพันธ์ไม่

จำกัดเขตเขียนได้ในรูป

$$F(\alpha) = \int_a^\alpha \phi(\alpha)\,d\alpha + C$$

เนื่องจาก $F(a) = 0$ จึงได้ว่า $C = 0$ เพราะฉะนั้น

$$F(\alpha) = \int_u^v \int_a^\alpha f(x,\alpha)\,d\alpha\,dx = \int_a^\alpha \int_u^v f(x,\alpha)\,dx\,d\alpha$$

เพราะฉะนั้น ถ้าให้ $\alpha = b$ จึงได้ว่า

$$\int_a^b \int_u^v f(x,\alpha)\,dx\,d\alpha = \int_u^v \int_a^b f(x,\alpha)\,d\alpha\,dx$$

ตามต้องการ □

ตัวอย่าง 2.4.7. หากทราบว่า $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$ เมื่อ $\alpha > 1$ จงแสดงว่า สำหรับ $a, b > 1$ แล้ว

$$\int_0^\pi \ln\left(\frac{b - \cos x}{a - \cos x}\right)\,dx = \pi \ln\left(\frac{b + \sqrt{b^2-1}}{a + \sqrt{a^2-1}}\right)$$

วิธีทำ. เนื่องจาก $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$ เมื่อ $\alpha > 1$ หาปริพันธ์เทียบ α บนช่วง $[a, b]$ ทั้งสองข้าง ได้ว่า

$$\int_a^b \int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x}\,d\alpha = \int_a^b \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}\,d\alpha$$

สำหรับพจน์ด้านขวา โดยการหาปริพันธ์แบบแทนค่าตรีโกณมิติ จะได้ผลจากการหาปริพันธ์คือ

$$\int_a^b \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}\,d\alpha = \pi\left[\ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})\right]_a^b$$

ด้วยเหตุผลเดียวกันกับตัวอย่าง 2.4.5 โดยทฤษฎีบท 2.4.6 จะได้ว่า

$$\int_0^\pi \int_a^b \frac{dx}{\alpha - \cos x}\,d\alpha\,dx = \pi\left[\ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})\right]_a^b$$

นั่นคือ

$$\int_0^\pi \ln(\alpha - \cos x)\big|_a^b\,dx = \pi\left[\ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})\right]_a^b$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^\pi \ln\left(\frac{b - \cos x}{a - \cos x}\right)\,dx = \pi \ln\left(\frac{b + \sqrt{b^2-1}}{a + \sqrt{a^2-1}}\right)$$

แบบฝึกหัดที่ 2.4

1. จงหา $\dfrac{d\phi}{d\alpha}$ เมื่อกำหนด ϕ ดังต่อไปนี้

   (a) $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\pi} (1-\alpha\cos x)^2\,dx$

   (b) $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\alpha^2} \tan^{-1}\frac{x}{\alpha^2}\,dx$

   (c) $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\alpha} \tan(x-\alpha)\,dx$

   (d) $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \alpha x e^{-x^2}\,dx$

   (e) $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_{\alpha^2}^{\alpha^4} \ln(\alpha x)\,dx$

2. จงคำนวณค่า $\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_0^1 \sin(e^x y - y^3 + \pi - e^x)\,dx$ ที่ $y=1$

3. จงคำนวณค่า $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x^3+y^3+z^3-2}\,dz$ ที่ $(x,y)=(1,1)$

4. กำหนดให้ $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_{\sqrt{\alpha}}^{1/\alpha} \frac{\cos(\alpha x^2)}{x}\,dx$ จงหา $\dfrac{d\phi}{d\alpha}$

5. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ถ้า $\displaystyle\int_0^1 f(\sqrt{x})e^x\,dx = 6$ แล้ว จงหาค่าของ $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^1 f(y)e^{xy+y^2}\,dy$ ที่ $x=0$

6. กำหนดฟังก์ชัน

$$F(a,b) = \int_0^{\pi} [\sin x - (ax^2+bx)^2]\,dx$$

   (a) จงหาจุดวิกฤตของ $F(a,b)$ (คำใบ้ : หาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ a,b โดยใช้ทฤษฎีบท 2.4.3)

   (b) จงหาค่า a,b ที่ทำให้ F ให้ค่าต่ำสุด (คำใบ้ : ใช้ผลจากข้อ (a))

7. จงแสดงว่า

$$\int_0^1\int_1^2 (\alpha^2-x^2)\,dx\,d\alpha = \int_1^2\int_0^1 (\alpha^2-x^2)\,d\alpha\,dx = \int_1^2 \quad dx$$

8. จงแสดงว่า

$$\int_0^2\int_{-1}^0 (x^3-2y)\,dx\,dy = \int_{-1}^0\int_0^2 (x^3-2y)\,dy\,dx$$

9. หากทราบว่า $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\alpha - \sin x)\,dx = 2\pi\alpha$ จงแสดงว่า สำหรับค่าคงที่ a,b ใด ๆ

$$\int_0^{2\pi} [(b-\sin x)^2 - (a-\sin x)^2]\,dx = 2\pi(b^2-a^2)$$

10. หากทราบว่า $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$ เมื่อ $\alpha > 1$ แล้ว จงแสดงว่า

$$\int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{5+3\sin x}{5+4\sin x}\right) dx = 2\pi \ln\left(\frac{9}{8}\right)$$

11. จงคำนวณค่า $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\, dx$

(คำใบ้ : นิยาม $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}\, dx$ จากนั้นใช้ทฤษฎีบท 2.4.3 และทำในทำนองเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.4.6)

12. จงแสดงว่า สำหรับ $|\alpha| < 1$ จะได้ว่า

$$\int_0^{\pi} \ln(1+\alpha\cos x)\, dx = \pi \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\right)$$

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

บทที่

3

ในบทที่ 2 เราได้ศึกษาแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x)\,dx$ โดยที่ขีดจำกัดของปริพันธ์เป็นจำนวนจริง และปริพัทธ์เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงปิดของขอบเขตของปริพันธ์ อย่างไรก็ตาม ในการหาปริพันธ์ดังกล่าว อาจเกิดเหตุการณ์ที่ขอบเขตของปริพันธ์เป็นอนันต์ หรือฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่มีขอบเขตบนช่วง $[ab]$ หรือเกิดเหตุการณ์ดังกล่าวพร้อมกันในปริพันธ์เดียว ปริพันธ์ดังกล่าวเรียกว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ** (improper integral)

ในแคลคูลัสพื้นฐาน เราได้ศึกษาเกี่ยวกับการคำนวณปริพันธ์ไม่ตรงแบบเบื้องต้น โดยเน้นการคำนวณค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบอย่างง่าย ในกระบวนวิชานี้ เราจะศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับปริพันธ์ไม่ตรงแบบเพิ่มขึ้น ในแง่ของการตรวจสอบการลู่เข้าหรือลู่ออกของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ รวมถึงการศึกษาสมบัติของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ เช่น การลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ เพื่อนำสมบัติดังกล่าวไปใช้ในการวิเคราะห์ฟังก์ชัน อาทิ การสลับลำดับระหว่างการหาอนุพันธ์กับปริพันธ์ หรือลิมิต เป็นต้น

3.1 นิยามและการคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

ดังที่กล่าวมาข้างต้น เรากล่าวถึงปริพันธ์ไม่ตรงแบบได้ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3.1.1. จะกล่าวว่า ปริพันธ์ $\int_a^b f(x)\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (improper integral) ถ้า

1. a และ / หรือ b มีขอบเขตเป็นอนันต์ กล่าวคือ $a = -\infty$ และ / หรือ $b = \infty$
2. $f(x)$ ไม่มีขอบเขตอย่างน้อยหนึ่งจุด ณ จุด x ซึ่ง $a \leq x \leq b$ จุดเหล่านั้นเรียกว่า **จุดเอกฐาน** (singularity) ของ $f(x)$

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่สอดคล้องกับข้อ 1 ตามนิยาม 3.1.1 เรียกว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง** (improper integral of the first kind) ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่สอดคล้องกับข้อ 2 เรียกว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง** (improper integral of the second kind) และปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่สอดคล้องกับข้อ 1 และ 2 เรียกว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม** (improper integral of the third kind) ทั้งนี้ ปริพันธ์จำกัดเขตที่ไม่เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบ จะเรียกว่า **ปริพันธ์แท้** (proper integral)

ตัวอย่าง 3.1.1. พิจารณาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง เนื่องจากปริพันธ์มีขอบเขตบนซึ่งเป็นอนันต์

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง เนื่องจาก $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ มีความไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขต (infinite discontinuity) ที่ $x = 0$

3. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x-3}\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม เนื่องจากปริพันธ์มีขอบเขตบนเป็นอนันต์ และ $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ ไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = 3$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ เป็นปริพันธ์แท้ เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

หมายเหตุ. ในแคลคูลัสพื้นฐาน การที่ f มีความไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = c$ เราสามารถพิจารณาได้จากการมี**เส้นกำกับแนวยืน** (vertical asymptote) ที่ $x = c$ กล่าวคือ $x = c$ เป็นเส้นกำกับแนวยืนของ f ถ้า

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty/-\infty \text{ หรือ } \lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty/-\infty$$

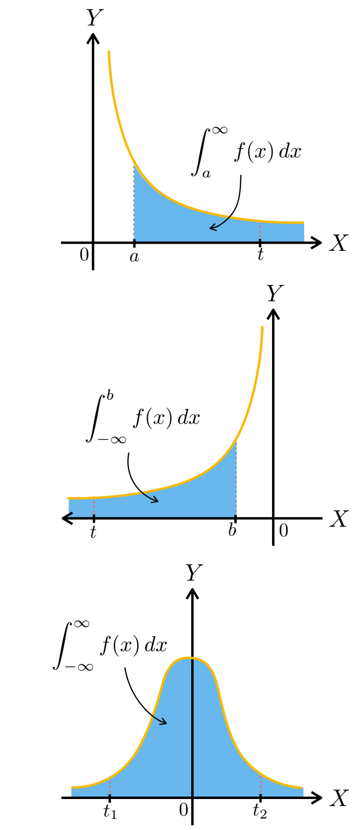
3.1.1 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง

เราจะกล่าวถึงปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง ตามนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3.1.2. ให้ $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน $[a,t]$ ทุก $t > a$ และนิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปลิมิตโดย

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

หากลิมิตมีค่า จะกล่าวว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบนี้**ลู่เข้า** (converge) โดยนิยามเป็นค่าของปริพันธ์ดังกล่าว และกรณีที่ลิมิตไม่มี จะเรียกว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบนี้**ลู่ออก** (diverge)



ภาพที่ 3.1. ภาพแสดงปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง แบบที่หนึ่ง สอง และสาม ตามลำดับ

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถนิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งที่ขอบเขตล่างเป็นอนันต์ และขอบเขตทั้งสองเป็นอนันต์ได้ในทำนองคล้ายกัน กล่าวคือ

สำหรับ $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ จะนิยาม

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$$

และสำหรับ $f : (-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}$ สำหรับจำนวนจริง c จะนิยาม

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t_1\to-\infty}\int_{t_1}^c f(x)\,dx + \lim_{t_2\to+\infty}\int_c^{t_2} f(x)\,dx$$

โดยปริพันธ์แบบที่สามนี้จะลู่เข้า ถ้าปริพันธ์ไม่ตรงแบบแต่ละปริพันธ์ลู่เข้า

เนื่องจากปริพันธ์จำกัดเขต คือพื้นที่เครื่องหมายสุทธิ เราจึงอาจพิจารณาความหมายทางเรขาคณิตของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งได้ดังภาพ 3.1

ตัวอย่าง 3.1.2. จงพิจารณาว่าปริพันธ์ต่อไปนี้ ลู่เข้าหรือลู่ออก หากลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

วิธีทำ. 1. ปริพันธ์ดังกล่าวเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง ได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x^3}\,dx\\ &= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2t^2}\right] = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

นั่นคือ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ ลู่เข้า และค่าของปริพันธ์นั้นคือ $\dfrac{1}{2}$

2. จะเห็นว่า ปริพันธ์ดังกล่าว เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^{-1} \frac{1}{x}\,dx\\ &= \lim_{t\to-\infty}[\ln|-1|-\ln|x|] = -\infty\end{aligned}$$

นั่นคือ $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$ ลู่ออก

3. เนื่องจากปริพันธ์ดังกล่าวมีขอบเขตบนและล่างเป็นอนันต์ทั้งคู่ เราจึงเลือกจุด $x=0$ เป็นจุดแบ่งปริพันธ์ จึงได้ว่า

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

และเขียนในรูปลิมิตได้เป็น

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{t_1\to-\infty}\int_{t_1}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{t_2\to+\infty}\int_{0}^{t_2} \frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi\end{aligned}$$

นั่นคือ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ ลู่เข้า และค่าของปริพันธ์นั้นคือ π

ในตัวอย่างที่ผ่านมา เราทำการพิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ จึงน่าสนใจที่จะพิจารณาว่า เงื่อนไขใดของ p ที่ทำให้ปริพันธ์ดังกล่าวลู่เข้าหรือลู่ออก รวมถึงปริพันธ์ประเภทที่คล้ายกันด้วย ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นถึงเงื่อนไขของปริพันธ์ไม่ตรงแบบของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ และฟังก์ชัน $f(x)=e^{-mx}$ ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.3. .

1. **ปริพันธ์ p ชนิดที่หนึ่ง** (The p integral of the first kind) เมื่อ p เป็นค่าคงที่และ $a > 0$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} -\dfrac{a^{1-p}}{1-p} & \text{เมื่อ } p > 1 \\ +\infty & \text{เมื่อ } p \leq 1 \end{cases}$$

2. **ปริพันธ์เรขาคณิต** (geometric integral) โดยที่ m เป็นค่าคงที่

$$\int_a^{\infty} e^{-mx}\, dx = \begin{cases} \dfrac{e^{-am}}{m} & \text{เมื่อ } m > 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ } m \leq 0 \end{cases}$$

พิสูจน์. เราจะพิสูจน์ข้อ 1 ส่วนข้อ 2 ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด

1. เราจะพิจารณาลิมิตของปริพันธ์ p พบว่า ต้องแบ่งเป็นสองกรณีใหญ่คือ ถ้า $p \neq 1$ จะได้ว่า

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_a^t = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}\right]$$

เนื่องจาก $-\dfrac{a^{1-p}}{1-p}$ เป็น ค่า คงที่ เรา จึง จะ พิจารณา เงื่อนไข ที่ เกิด ขึ้น จาก พจน์ $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1-p}}{1-p}$ ซึ่งสามารถแบ่งกรณีได้ดังนี้

- ถ้า $p > 1$ จะได้ว่า $1 - p < 0$ นั่นคือ $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1-p}}{1-p} = 0$ ทำให้ปริพันธ์ลู่เข้าและลู่เข้าหา $-\dfrac{a^{1-p}}{1-p}$
- ถ้า $p < 1$ จะได้ว่า $1 - p > 0$ นั่นคือ $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1-p}}{1-p} = +\infty$ นั่นคือ ปริพันธ์ลู่ออก

ต่อไป พิจารณากรณีที่ $p = 1$ จะได้ว่า

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \ln x|_a^t = \lim_{t\to+\infty} [\ln t - \ln a] = +\infty$$

จากทั้งสองกรณี จึงสรุปได้ว่า

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} -\dfrac{a^{1-p}}{1-p} & \text{เมื่อ } p > 1 \\ +\infty & \text{เมื่อ } p \leq 1 \end{cases}$$

ตามต้องการ $\square$

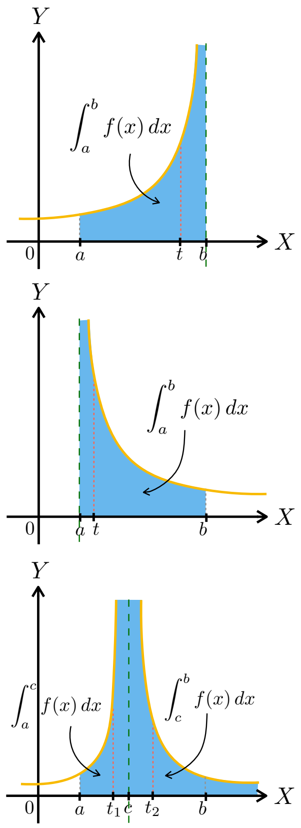
3.1.2 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง

สำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง เราจะกล่าวได้ดังนี้

บทนิยาม 3.1.3. ให้ $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง ที่จุด b ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน $[a, t]$ และ f ไม่มีขอบเขตในช่วง (t, b) ทุก $t \in (a, b)$ และนิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปลิมิตโดย

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx \tag{3.1.1}$$

หากลิมิตมีค่า จะกล่าวว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบนี้**ลู่เข้า** (converge) โดยนิยามเป็นค่าของปริพันธ์ดังกล่าว และกรณีที่ลิมิตไม่มี จะเรียกว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบนี้**ลู่ออก** (diverge)



ภาพที่ 3.2. ภาพแสดงปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง แบบที่หนึ่ง สอง และสาม ตามลำดับ

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถนิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง ซึ่งฟังก์ชัน f ณ ขอบเขตล่างไม่มีขอบเขต และกรณีที่ f ไม่มีขอบเขต ณ จุดภายในช่วง $[a, b]$ ได้ดังนี้

สำหรับ $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ โดยที่ f ไม่มีขอบเขตในช่วง (a, t) สำหรับทุก $t \in (a, b)$ จะนิยาม

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx \tag{3.1.2}$$

และสำหรับ จุด c ที่อยู่ระหว่าง $[a, b]$ โดยที่ f ไม่มีขอบเขตในช่วง (t_1, t_2) สำหรับทุก $t_1, t_2 \in [a, b]$ จะนิยาม

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t_1\to c^-} \int_a^{t_1} f(x)\,dx + \lim_{t_2\to c^+} \int_{t_2}^b f(x)\,dx \tag{3.1.3}$$

โดยปริพันธ์แบบที่สามนี้จะลู่เข้า ถ้าปริพันธ์ไม่ตรงแบบแต่ละปริพันธ์ลู่เข้า

เพื่อความสะดวก เราอาจจะเขียนปริพันธ์ในสมการ (3.1.1), (3.1.2) และ (3.1.3) ในรูป

(แบบที่ 1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$

(แบบที่ 2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$

(แบบที่ 3) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon_1\to 0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon_2\to 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^{b} f(x)\,dx$

ตัวอย่าง 3.1.4. จงพิจารณาว่าปริพันธ์ต่อไปนี้ ลู่เข้าหรือลู่ออก หากลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$
2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{2-x}\,dx$
3. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx$

วิธีทำ. 1. จะเห็นว่า ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ ไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = 1$ ที่ขอบเขตบนของปริพันธ์ (เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$) จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx &= \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx\\ &= \lim_{t\to 1^-}\left[-2\sqrt{1-t}+2\right] = 2\end{aligned}$$

นั่นคือ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ ลู่เข้า และค่าของปริพันธ์นั้นคือ 2

2. ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{2-x}\,dx$ ไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = 2$ ที่ขอบเขตล่างของปริพันธ์ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{1}{2-x}\,dx &= \lim_{t\to 2^+}\int_t^3 \frac{1}{2-x}\,dx\\ &= \lim_{t\to 2^+}\left[-\ln|-1| + \ln|2-t|\right] = -\infty\end{aligned}$$

นั่นคือ $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{2-x}\,dx$ ลู่ออก

3. ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^{2/3}}$ มีจุดที่ไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตคือ $x = 2$ ซึ่งอยู่ภายในช่วง $[1,3]$ จึงต้องแบ่งปริพันธ์ออกเป็นสองส่วน กล่าวคือ

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx$$

ทั้งนี้ สำหรับตัวอย่างนี้จะขอเขียนปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปแบบ ϵ ได้ว่า

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx = \lim_{\epsilon_1\to 0^+}\int_1^{2-\epsilon_1} \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx + \lim_{\epsilon_2\to 0^+}\int_{2+\epsilon_2}^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx$$

พิจารณาแต่ละพจน์ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon_1\to 0^+}\int_1^{2-\epsilon_1} \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx &= \lim_{\epsilon_1\to 0^+}\left[3(2-\epsilon_1-2)^{1/3} - 3(1-2)^{1/3}\right] = 3\\ \lim_{\epsilon_2\to 0^+}\int_{2+\epsilon_2}^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx &= \lim_{\epsilon_2\to 0^+}\left[3(3-2)^{1/3} - 3(2+\epsilon_2-2)^{1/3}\right] = 3\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx = 3 + 3 = 6$ นั่นคือ ปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx$ ลู่เข้าสู่ 6

สำหรับกรณีฟังก์ชัน f อยู่ในรูป $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^p}$ หรือ $f(x) = \dfrac{1}{(x-b)^p}$ โดยที่ p เป็นค่าคงที่ เราอาจพิจารณาการลู่เข้าหรือลู่ออกได้จากเงื่อนไขของ p ซึ่งกำหนดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.5. **ปริพันธ์ p ชนิดที่สอง** (The p integral of the second kind) เมื่อ $p > 0$ เป็นค่าคงที่

1. $$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p} & \text{เมื่อ } p < 1 \\ +\infty & \text{เมื่อ } p \geq 1 \end{cases}$$

2. $$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p} & \text{เมื่อ } p < 1 \\ +\infty & \text{เมื่อ } p \geq 1 \end{cases}$$

พิสูจน์. เราจะพิสูจน์ข้อ 1 ส่วนข้อ 2 สามารถทำได้ในทำนองคล้ายกัน

1. จะเห็นว่า ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^p}$ มีความไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = a$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ ทั้งนี้ เราจะแบ่งกรณีออกเป็น 2 กรณีใหญ่ คือ เมื่อ $p \neq 1$ และ $p = 1$ ดังนี้

ถ้า $p \neq 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx &= \lim_{t\to a^+} \int_t^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx \\ &= \lim_{t\to a^+} \frac{(b-a)^{1-p} - (t-a)^{1-p}}{1-p} \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถแบ่งกรณีได้ว่า

- <u>ถ้า $p < 1$</u> จะได้ว่า $1 - p > 0$ นั่นคือ $\displaystyle\lim_{t\to a^+} \frac{(t-a)^{1-p}}{1-p} = 0$ ทำให้ปริพันธ์ลู่เข้าสู่ $\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$
- <u>ถ้า $p > 1$</u> จะได้ว่า $1 - p < 0$ นั่นคือ $\displaystyle\lim_{t\to +\infty} \frac{(t-a)^{1-p}}{1-p} = -\infty$ นั่นคือ ปริพันธ์ลู่ออกไปสู่ $+\infty$

ถ้า $p = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{x-a}\,dx &= \lim_{t\to a^+} \int_t^b \frac{1}{x-a}\,dx \\ &= \lim_{t\to a^+} [\ln(b-a) - \ln(t-a)] = +\infty \end{aligned}$$

จึงสรุปได้ว่า

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p} & \text{เมื่อ } p < 1 \\ +\infty & \text{เมื่อ } p \geq 1 \end{cases}$$

ตามต้องการ □

จากทฤษฎีบท 3.1.5 จะเห็นว่า ปริพันธ์ดังกล่าวเป็นปริพันธ์แท้ ถ้า $p \leq 0$

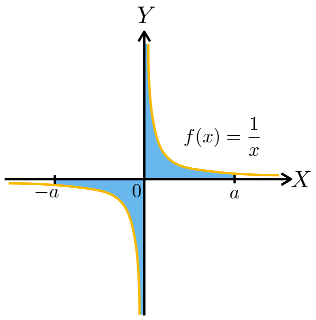
ค่ามุขสำคัญโคชี

สำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองของ f ในกรณีที่สาม เมื่อมีจุด $x = c$ อยู่ในช่วง $[a, b]$ และนิยามลิมิตในรูป

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x)\,dx$$

จะเห็นว่า ϵ_1 และ ϵ_2 ต่างเป็นอิสระซึ่งกันและกัน พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.1.6. จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{-a}^a \frac{1}{x}\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่ สำหรับ $a > 0$



ภาพที่ 3.3. พื้นที่แสดงปริพันธ์ $\displaystyle\int_{-a}^a \frac{1}{x}\,dx$

วิธีทำ. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบดังกล่าว เขียนได้ในรูป

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_{-a}^{0-\epsilon_1} \frac{1}{x}\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{0+\epsilon_2}^a \frac{1}{x}\,dx \\ &= \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} [\ln|-\epsilon_1| - \ln|-a|] + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} [\ln|a| - \ln|\epsilon_2|] \\ &= -\infty + \infty\end{aligned}$$

ซึ่งเราสรุปว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบดังกล่าวลู่ออก

ในสถานการณ์ดังกล่าว จะพบว่า $f(x) = \dfrac{1}{x}$ เป็นฟังก์ชันคี่ (กล่าวคือ $f(x) = f(-x)$) ซึ่งเมื่อพิจารณาภาพที่ 3.3 พบว่า พื้นที่ใต้กราฟจาก $-a$ ถึง 0 และพื้นที่ใต้กราฟจาก 0 ถึง a สมมาตรกัน และควรจะหักล้างกัน แต่โดยวิธีที่เราทำดังกล่าวจะพบว่า เราไม่สามารถสรุปค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบนี้ได้

แต่ถึงแม้ว่าเราไม่สามารถระบุได้ว่าลิมิตของแต่ละเทอมลู่ออกด้วยอัตราเท่าใด ในบางสถานการณ์ เราต้องการนิยามค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดนี้ในกรณีที่ลิมิตของค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบลู่ออกด้วยอัตราที่เท่ากัน ด้วยการกำหนดให้ $\epsilon_1 = \epsilon = \epsilon_2$ (ทั้งนี้ กรณีที่เรานิยามให้อัตราของของการลู่ออกไม่เท่ากัน เราอาจกำหนดค่าให้ $\epsilon_1 = k\epsilon_2$ ได้ตามต้องการ)

หากลิมิตที่เกิดจากการกำหนด $\epsilon_1 = \epsilon = \epsilon_2$ มีค่า จะกล่าวว่า ลิมิตดังกล่าวเรียกว่า **ค่ามุขสำคัญโคชี** (Cauchy principal value) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.1.7. จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{-a}^a \frac{1}{x}\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่ในแบบค่ามุขสำคัญของโคชี สำหรับ $a > 0$

วิธีทำ. จากปริพันธ์ไม่ตรงแบบดังกล่าว เขียนได้ในรูป

$$\int_{-a}^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_{-a}^{0-\epsilon_1} \frac{1}{x}\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{0+\epsilon_2}^a \frac{1}{x}\,dx$$

หากสมมติให้ $\epsilon_1 = \epsilon = \epsilon_2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_{-a}^{0-\epsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{0+\epsilon}^a \frac{1}{x}\,dx\right] &= \lim_{\epsilon \to 0^+} [(\ln|-\epsilon| - \ln|-a|) + (\ln|a| - \ln|\epsilon|)] \\ &= 0\end{aligned}$$

นั่นคือ ปริพันธ์ $\displaystyle\int_{-a}^a \frac{1}{x}\,dx$ ลู่เข้าสู่ 0 ในแบบค่ามุขสำคัญของโคชี

หมายเหตุ. การใช้ค่ามุขสำคัญแบบโคชี สามารถใช้ได้สำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ลู่เข้า ถ้าปริพันธ์ที่ลู่เข้านั้นไม่ทำให้ค่าของปริพันธ์ดังกล่าวเปลี่ยนแปลงค่า

3.1.3 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม

จะเห็นว่า เราสามารถพิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สามได้จากการแยกปริพันธ์ดังกล่าวให้อยู่ในรูปของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สอง เมื่อกำหนดปริพันธ์มาให้เราจึงจะแยกพิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบทีละชนิด ทั้งนี้

- ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สามจะลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สองทุกปริพันธ์ที่ประกอบเป็นปริพันธ์ดังกล่าวจะลู่เข้า
- ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สามจะลู่ออก ก็ต่อเมื่อ ถ้ามีปริพันธ์อย่างน้อยหนึ่งปริพันธ์ที่ประกอบเป็นปริพันธ์ดังกล่าวนั้นลู่ออก

ตัวอย่าง 3.1.8. จงพิจารณาว่าปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ เมื่อ $p>0$ ลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ. เนื่องจากปริพันธ์ดังกล่าว เป็นปริพันธ์ที่มีขอบเขตบนเป็นอนันต์ และฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ ไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = 0$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ เราจึงสามารถแบ่งปริพันธ์ออกได้เป็น

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

- <u>กรณี $p \geq 1$</u> จากทฤษฎีบท 3.1.5 ทำให้ได้ว่า $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ ลู่ออก จึงทำให้ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ ลู่ออก
- <u>กรณี $0 < p < 1$</u> จากทฤษฎีบท 3.1.3 ทำให้ได้ว่า $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ ลู่ออก จึงทำให้ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ ลู่ออกเช่นกัน

ทั้งสองกรณี จึงสรุปได้ว่า ปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ ลู่ออก สำหรับทุก $p > 0$

แบบฝึกหัดที่ 3.1

1. จงพิจารณาว่าปริพันธ์ต่อไปนี้เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบหรือไม่ หากเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบ จงระบุชนิดของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ พร้อมเขียนลิมิตของปริพันธ์ไม่ตรงแบบโดยไม่ต้องคำนวณค่า

   (a) $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{1-x}$

   (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^3+5}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos x}{x-\cos\frac{\pi}{2}}\,dx$

2. จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก หากลู่เข้า จงหาค่าของปริพันธ์นั้น

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(d) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1-2\cos x}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$

3. จงหาค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ (หมายเหตุ: ให้ตรวจสอบก่อนว่าปริพันธ์ดังกล่าวเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดใด โดยใช้กฎโลปิตาล)

4. จงหาปริพันธ์โดยแทน u ที่กำหนดให้ แล้วคำนวณปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ โดยแทน $u=\sqrt{x}$ ($u\to\infty$ เมื่อ $x\to\infty$)

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x}}}\,dx$ โดยแทน $u=1-e^{-x}$ ($u\to 1$ เมื่อ $x\to\infty$)

5. กำหนดปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ จงพิจารณาว่า ปริพันธ์ดังกล่าวลู่เข้าหรือไม่ (1) ในแบบปกติ (2) ในแบบค่ามุขสำคัญโคชี

(a) $\displaystyle\int_{-1}^5 \frac{1}{(x-1)^4}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{x-3}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^6 \frac{x+4}{x-4}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{10x+4}{(5x+x^2)^3}\,dx$

> **หมายเหตุ.** หากพิจารณาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตโดยใช้ค่ามุขสำคัญโคชี ไม่ควรหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยวิธีเปลี่ยนตัวแปรการหาปริพันธ์ไปพร้อมกับเปลี่ยนขอบเขตการหาปริพันธ์ เนื่องจากทำให้เกิดปัญหาค่าของปริพันธ์ไม่ตรงกัน ดูคำอธิบายได้จากบทความ [19]

6. จงแปลงปริพันธ์ $\int_0^1 \ln(\frac{1}{1-x})\,dx$ ให้เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง โดยใช้การแปลง $u = \dfrac{1}{1-x}$

> **หมายเหตุ**. โดยทั่วไป เราอาจแปลงปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองของ $\int_a^b f(x)\,dx$ ที่ขอบเขตบน ให้เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งได้โดยการเปลี่ยนตัวแปร $u = \dfrac{1}{b-x}$ จากนั้นหาความสัมพันธ์ระหว่าง dx และ du

7. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 2 กล่าวคือ สำหรับค่าคงที่ m

$$\int_a^\infty e^{-mx}\,dx = \begin{cases} \dfrac{e^{-am}}{m} & \text{เมื่อ } m > 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ } m \le 0 \end{cases}$$

8. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1.5 ข้อ 2 กล่าวคือ สำหรับค่าคงที่ $p > 0$

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p} & \text{เมื่อ } p < 1 \\ +\infty & \text{เมื่อ } p \ge 1 \end{cases}$$

3.2 การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราศึกษานิยามพื้นฐานของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ และการคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ อย่างไรก็ตาม ในหลาย ๆ สถานการณ์ เราอาจไม่ต้องการคำนวณค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ แต่ต้องการทราบเพียงว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ลู่เข้าหรือไม่เท่านั้น รวมถึงในบางครั้ง การทราบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบลู่เข้า นำมาซึ่งผลอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันด้วย

ในหัวข้อนี้และหัวข้อถัดไป เราจะทำการศึกษาวิธีการทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบโดยวิธีการทดสอบต่าง ๆ โดยเราจะเริ่มต้นจากการทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งก่อน

3.2.1 การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งที่ไม่เป็นลบ

เราจะทำการทดสอบปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ 1 ในรูปแบบ

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

โดยสมมติว่า f มีขอบเขต และหาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a,t]$ สำหรับทุก $t \ge a$ โดยเราจะสมมติให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเป็นบวกเสมอในช่วง $[a,x]$ ทั้งนี้ สำหรับกรณีที่ฟังก์ชัน f เป็นลบ เราจะกำหนดฟังก์ชัน $-f$

ก่อนที่เราจะกล่าวถึงวิธีการตรวจสอบปริพันธ์ไม่ตรงแบบ จะขอพิสูจน์ทฤษฎีบทพื้นฐานที่รับประกันการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.1. ให้ $f(x) \geq 0$ ทุก $x \geq a$ บน $[a,t]$ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงบวก M ที่ทำให้ $\int_a^t f(x)\,dx \leq M$ สำหรับทุก $t \geq a$

พิสูจน์. ก่อนอื่นเรานิยาม $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ สำหรับ $t \in [a,\infty)$ ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ จะใช้ทฤษฎีบทลำดับทางเดียว (monotonic sequence theorem) กล่าวคือ ถ้า F มีขอบเขตบนแล้ว $F(t)$ จะลู่เข้าหาจำนวนจริง เมื่อ $t \to \infty$ ดังนั้น เราจะพิสูจน์ได้ดังนี้

($\Rightarrow$) สมมติให้ $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่เข้า เนื่องจาก $f(x) \geq 0$ จึงได้ว่า $F(t)$ เพิ่มขึ้นเมื่อ $t \to \infty$ จากข้อสมมติฐาน สมมติว่า $F(t)$ ลู่เข้าเมื่อ $t \to \infty$ จึงได้ว่า $F(t)$ มีขอบเขต นั่นคือ มี M ที่เป็นจำนวนจริงบวกที่ทำให้ $\int_a^t f(x)\,dx \leq M$ สำหรับทุก $t \geq a$

($\Leftarrow$) สมมติว่ามี M ที่ทำให้ $\int_a^t f(x)\,dx \leq M$ เนื่องจาก $f(x) \geq 0$ จึงได้ว่ $F(t)$ เป็นลำดับทางเดียวที่มีขอบเขต โดยทฤษฎีบทลำดับทางเดียวจึงได้ว่า $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่เข้าเมื่อ $t \to \infty$ □

จะกล่าวว่า $\int_a^{\infty}$ ลู่ออก ถ้าไม่สามารถหาจำนวนจริง M ที่เป็นขอบเขตบนได้ กล่าวคือ $\int_a^{\infty}$ ลู่ออกสู่ ∞ เมื่อ $t \to \infty$

เราสามารถสร้างวิธีการตรวจสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งได้ ดังวิธีที่หนึ่งต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.2. (การทดสอบแบบเปรียบเทียบ: Comparison test)
ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่เป็นบวก โดยที่ $f(x) \leq g(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,t]$ แล้ว

1. ถ้า $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ ลู่เข้าแล้ว $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่เข้าด้วย
2. ถ้า $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่ออกแล้ว $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ ลู่ออกด้วย

พิสูจน์. 1. สมมติให้ f, g มีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[a,t]$ ทุก $t \geq a$ จากข้อสมมติฐานที่ว่า $f(x) \leq g(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,t]$ จึงได้ว่า

$$\int_a^t f(x)\,dx \leq \int_a^t g(x)\,dx \tag{3.2.1}$$

จาก $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ ลู่เข้า จะได้ว่า มี $M > 0$ ที่ทำให้ $\int_a^{\infty} g(x)\,dx < M$ สำหรับทุก $t \geq a$ จึงได้ว่า $\int_a^{\infty} f(x)\,dx < M$ สำหรับทุก $t \geq a$ ด้วย โดยทฤษฎีบท 3.2.1 ได้ว่า $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่เข้า

2. ถ้า $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่ออก จะได้ว่า $\int_a^{t} f(x)\,dx$ ไม่มีขอบเขตบน โดย (3.2.1) จึงได้ว่า $\int_a^{t} g(x)\,dx$ ไม่มีขอบเขตบน นั่นคือ $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ ลู่ออก ตามต้องการ □

ตัวอย่าง 3.2.3. จงตรวจสอบว่า ปริพันธ์ต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$
2. $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx$

วิธีทำ. 1. เนื่องจากเราทราบว่า $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq \dfrac{1}{2x}$ และ $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{2x}\,dx$ เป็นปริพันธ์ p เมื่อ $p = 1$ โดยทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1 ได้ว่า $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{2x}\,dx$ ลู่ออก โดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบ จึงได้ว่า ปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ ลู่ออก

2. พิจารณา $\dfrac{1}{e^x} \geq \dfrac{1}{e^x+1}$ และจาก $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x}\,dx = \int_1^{\infty} e^{-x}\,dx$ เป็นปริพันธ์เราขาคณิต ซึ่ง $m = 1 > 0$ โดยทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 2 ได้ว่า $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x}\,dx$ ลู่เข้า โดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบ จึงได้ว่า ปริพันธ์ $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx$ ลู่เข้า

จะเห็นว่า วิธีที่ผ่านมาต้องอาศัยการจัดขอบเขตบน ซึ่งเกิดความยุ่งยาก อย่างไรก็ตาม เรามีวิธีการทดสอบอีกวิธีหนึ่งที่สะดวกขึ้นโดยการใช้ลิมิตเปรียบเทียบ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.4. (การทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ: Limit comparison test)
ให้ f, g เป็นบวกบน $[a, t]$

1. ถ้า $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ แล้ว $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ และ $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออกเหมือนกัน
2. ถ้า $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ และ $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ ลู่เข้าแล้ว $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่เข้า
3. ถ้า $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ และ $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ ลู่ออกแล้ว $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่ออก

พิสูจน์. 1. สมมติว่า $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ จะได้ว่า มี $k > a$ ซึ่งสำหรับทุก $x > k$ แล้ว $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \epsilon$ เราจึงได้ว่า

$$(L-\epsilon)g(x) < f(x) < (L+\epsilon)g(x)$$

- <u>พิจารณากรณี $(L-\epsilon)g(x) < f(x)$ สำหรับทุก $x > k > a$</u>

ถ้า $\int_k^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.2.2 จึงได้ว่า $\int_k^\infty g(x)\,dx$ ลู่เข้า และ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ลู่เข้าด้วย

- พิจารณากรณี $f(x) < (L+\epsilon)g(x)$ สำหรับทุก $x > k > a$

ถ้า $\int_k^\infty f(x)\,dx$ ลู่ออก โดยทฤษฎีบท 3.2.2 จึงได้ว่า $\int_k^\infty g(x)\,dx$ ลู่ออก และ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ลู่ออกเช่นกัน

2. สมมติว่า $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ จะได้ว่า มี k ที่ทำให้ $\dfrac{f(x)}{g(x)} < \epsilon$ สำหรับทุก $x > k$ นั่นคือ $f(x) < \epsilon g(x)$ สำหรับทุก $x > k$

ดังนั้น ถ้า $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ลู่เข้า แล้ว โดยทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้ว่า $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้า

3. สมมติว่า $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ จะได้ว่า มี k, M ซึ่ง $\dfrac{f(x)}{g(x)} > M$ นั่นคือ $f(x) > Mg(x)$ สำหรับทุก $x \geq k$

ดังนั้น ถ้า $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ลู่ออก แล้ว โดยทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้ว่า $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่ออกด้วย □

ตัวอย่าง 3.2.5. จงตรวจสอบว่า ปริพันธ์ต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$
2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x-1}{x^2+x-1}\,dx$
3. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$
4. $\displaystyle\int_1^\infty x^n e^{-x}\,dx$ สำหรับจำนวนจริงบวก $n > 0$

วิธีทำ. 1. เมื่อ $x \to \infty$ จะเห็นว่า $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \approx \dfrac{1}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{1}{x}$ เราจึงเลือก $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}, g(x) = \dfrac{1}{x}$ ซึ่ง

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

เนื่องจาก $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ลู่ออกจากทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1 (ปริพันธ์ p เมื่อ $p=1$) โดยการทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ จึงได้ว่า ปริพันธ์ $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ ลู่ออก

2. เลือก $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x-1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ ซึ่ง

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x}{\sqrt{x^2+x-1}} = 1$$

เนื่องจาก $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ลู่ออกจากทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1 โดยการทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ จึงได้ว่า ปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x-1}{x^2+x-1}\,dx$ ลู่ออก

3. เลือก $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^{3/2}}$ ซึ่ง

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} x^{3/2}\frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} = 0$$

(โดยกฎโลปิตาล) เนื่องจาก $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ ลู่เข้าจากทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1 โดยการทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ จึงได้ว่า ปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ ลู่เข้า

4. สำหรับ $n > 0$ เลือก $f(x) = x^n e^{-x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ จะเห็นว่า

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} x^2 x^n e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+2}}{e^x} = 0$$

จาก $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ ลู่เข้าโดยทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1 โดยการทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ จึงได้ว่า ปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^\infty x^n e^{-x}\,dx$ ลู่เข้า

จากวิธีการทดสอบดังกล่าว เราอาจสร้างวิธีการทดสอบที่ใช้งานได้ง่ายขึ้น โดยใช้ทฤษฎีบท 3.2.2, 3.2.4 และทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1 ประกอบกัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.6. 1. ถ้า $f \geq 0$ บนช่วง $[a,t]$ แล้ว

- ปริพันธ์ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ จะลู่เข้า ถ้ามีจำนวนจริงบวก $p > 1$ และจำนวนจริงบวก M ที่ทำให้ $f(x) \leq M/x^p$ สำหรับทุก $x \geq a$
- ปริพันธ์ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ จะลู่ออก ถ้ามีจำนวนจริงบวก $p \leq 1$ และจำนวนจริงบวก G ที่ทำให้ $f(x) \geq G/x^p$ สำหรับทุก $x \geq a$

2. ถ้า $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^p f(x)$ มีค่าและไม่เป็นศูนย์แล้ว ปริพันธ์ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ จะลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $p > 1$

ตัวอย่าง 3.2.7. ปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{4x^2+25}\,dx$ ลู่เข้า

เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2\frac{1}{4x^2+25} = \frac{1}{4}$

3.2.2 การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งทั่วไป

จากหัวข้อที่ผ่านมา เราได้ทำการทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งในกรณีที่ $f(x) \geq 0$ ซึ่งจะเห็นว่า การลู่เข้าหรือการลู่ออกของปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ฟังก์ชันมีค่าเป็นบวกเพียงอย่างเดียวนั้น ขึ้นอยู่กับการที่ค่าของฟังก์ชันมีค่ามาก ๆ อย่างไรก็ตาม หากฟังก์ชัน f อยู่ในกรณีทั่วไปที่อาจเป็นได้ทั้งบวกและลบ การลู่เข้าอาจขึ้นอยู่กับการแกว่งของค่าลิมิตนั้น ดังนั้นเราจึงจะพิจารณาการลู่ของฟังก์ชันทั่ว ๆ ไปผ่านการพิจารณาการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์และการลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

บทนิยาม 3.2.1. ให้ $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ และ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง

1. ปริพันธ์ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ **ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์** (absolutely convergent) ก็ต่อเมื่อ $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ ลู่เข้า
2. ปริพันธ์ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ **ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข** (conditional convergent) ก็ต่อเมื่อ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้า แต่ $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ ลู่ออก

ก่อนที่จะพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก เราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทที่จะนำไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทดังกล่าวก่อน ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2.8. ให้ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ และ $\displaystyle\int_a^\infty h(x)\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง จะได้ว่า

1. ถ้า $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ และ $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ ลู่เข้าแล้ว $\displaystyle\int_a^\infty (f(x) \pm g(x))\,dx$ จะลู่เข้า
2. ถ้า $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ และ $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ ลู่เข้า โดยที่ $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ สำหรับทุก $x \geq a$ แล้ว $\displaystyle\int_a^\infty h(x)\,dx$ จะลู่เข้าด้วย

พิสูจน์. 1. เขียนปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปลิมิต แล้วอาศัยทฤษฎีบท 2.1.3 ข้อ 4, 5 ทำให้สามารถแยกปริพันธ์จำกัดเขตเป็นบวกบวกหรือผลลบได้ จากนั้นใช้สมบัติของลิมิตมาพิจารณาอีกครั้ง

2. เนื่องจาก $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ จึงได้ว่า $0 \leq g(x) - f(x) \leq h(x) - f(x)$ จาก $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ และ $\displaystyle\int_a^\infty h(x)\,dx$ ลู่เข้า จากข้อ 1 จึงได้ว่า $\displaystyle\int_a^\infty (h(x) - f(x))\,dx$ จึงลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 3.2.2 จึงได้ว่า $\displaystyle\int_a^\infty (h(x) - f(x))\,dx$ ลู่เข้า ทำให้สรุปได้ว่า $\displaystyle\int_a^\infty h(x)\,dx$ ลู่เข้าตามต้องการ □

การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ จะช่วยให้เราสามารถพิจารณาการลู่เข้า

ของปริพันธ์ไม่ตรงแบบได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.9. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ จะลู่เข้า กล่าวคือ ถ้า $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ แล้ว $\int_a^\infty f(x)\,dx$ จะลู่เข้า

พิสูจน์. เนื่องจาก $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ จึงได้ว่า

$$\int_a^\infty -|f(x)|\,dx \le \int_a^\infty f(x)\,dx \le \int_a^\infty |f(x)|\,dx$$

จากการกำหนดให้ $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ โดยทฤษฎีบท 3.2.8 จึงได้ว่า $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้าตามต้องการ □

ดังนั้น หากเรามีปริพันธ์ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ที่ทำการทดสอบ แล้วพบว่าปริพันธ์ดังกล่าวลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ เราก็จะสามารถสรุปได้ว่า ปริพันธ์ดังกล่าวนั้นลู่เข้าได้ทันที ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.2.10. จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่ เมื่อ $p > 1$

วิธีทำ. ก่อนอื่นเราจะพิจารณาว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่ เนื่องจาก

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \le \frac{|\sin x|}{x^p} = \frac{1}{x^p}$$

และ $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 1 โดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบ (ทฤษฎีบท 3.2.2) จึงได้ว่า $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\,dx$ ลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 3.2.9 สรุปได้ว่า $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ตัวอย่าง 3.2.11. จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^\infty \sin\frac{3}{x}\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ. ในกรณีนี้จะเห็นว่า หากเราเริ่มต้นโดยพิจารณา $\int_1^\infty \left|\sin\frac{3}{x}\right|\,dx$ จะพบว่า เราทำการเปรียบเทียบกับ $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ซึ่งพบว่าลู่ออก ทฤษฎีบท 3.2.1 จึงไม่สามารถใช้ในการตรวจสอบได้ ดังนั้นเราจึงต้องพิจารณาจากสมบัติพื้นฐานของปริพันธ์ $\int_1^\infty \sin\frac{3}{x}\,dx$

เราจะเห็นว่า $\sin\frac{3}{x} \ge 0$ เมื่อ $x \ge 1$ ดังนั้นจึงพบว่าปริพันธ์ดังกล่าวมีค่าเป็นบวกเสมอ ดังนั้นเมื่อเลือก $f(x) = \sin\frac{3}{x}$ และ $g(x) = \frac{1}{x}$ โดยใช้ลิมิตเปรียบเทียบ จะเห็นว่า

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{3\sin t}{t} = 3$$

และ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ลู่ออก จึงสรุปได้ว่า $\displaystyle\int_1^\infty \sin\frac{3}{x}\,dx$ ลู่ออก

เราสามารถพิจารณาการลู่เข้าหรือออกของปริพันธ์ไม่ตรงแบบบได้อีกวิธีหนึ่ง โดยการใช้**เกณฑ์ของโคชี** (Cauchy criterion) ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.12. (เกณฑ์ของโคชีสำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง)
ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ ชนิดที่หนึ่ง ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ มีจำนวนจริง $X_0 \geq a$ ที่ทำให้

$$\left|\int_{X_1}^{X_2} f(x)\,dx\right| < \epsilon \text{ สำหรับทุก } X_1, X_2 > X_0$$

พิสูจน์. นิยาม $F(X) = \displaystyle\int_a^X f(x)\,dx$ เป็นฟังก์ชันของ X เราจะพิจารณาโดยใช้เกณฑ์การลู่เข้าของโคชีสำหรับฟังก์ชัน $F(X)$ กล่าวคือ $F(X)$ ลู่เข้าสู่จำนวนจริงเมื่อ $X \to \infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ มี $X_0 \geq a$ ซึ่งสำหรับทุก $X_1, X_2 > X_0$ แล้ว $|F(X_1) - F(X_2)| < \epsilon$ นั่นคือ

$$\left|\int_a^{X^1} f(x)\,dx - \int_a^{X^2} f(x)\,dx\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\int_{X_1}^{X^2} f(x)\,dx\right| < \epsilon$$

□

ดังนั้น หากใช้ข้อความแย้งสลับที่ของทฤษฎีบท 3.2.12 ทำให้เราสามารถตรวจสอบได้ว่า $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่ออก ถ้ามี $\epsilon > 0$ ซึ่งทำให้ทุก $X_0 \geq a$ มี $X_1, X_2 > X_0$ ซึ่ง $\left|\displaystyle\int_{X_1}^{X^2} f(x)\,dx\right| \geq \epsilon$

เราสามารถสร้างทฤษฎีบทเพื่อใช้ในการทดสอบการลู่ออกของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งได้ โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ของทฤษฎีบทต่อไปนี้ สำหรับรายละเอียดการพิสูจน์สามารถศึกษาได้จาก [1]

ทฤษฎีบท 3.2.13. ถ้า $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งที่ลู่เข้า และ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงหรือ $\pm\infty$ แล้ว $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

ตัวอย่าง 3.2.14. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\ln x - 2x^2}{x^2 - 1}\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ. เราจะใช้ข้อความแย้งสลับที่ของทฤษฎีบท 3.2.13 มาพิจารณา กล่าวคือ พิจารณา

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x - 2x^2}{x^2 - 1} = -2 \neq 0$$

ดังนั้น เราจึงสรุปได้ว่า $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\ln x - 2x^2}{x^2 - 1}\,dx$ ลู่ออก

หมายเหตุ. เราควรระมัดระวังว่า หาก $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq 0$ หรือ $\pm\infty$ เราจะสรุปได้ว่า $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่ออก แต่หากลิมิตของ $f(x)$ ไม่มีค่าแล้ว เราจะยังสรุปไม่ได้ว่าปริพันธ์ดังกล่าวลู่ออก

นอกจากนี้ เรายังมีการทดสอบการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ชนิดอื่น ๆ โดยเราจะยกทฤษฎีบทดังกล่าวมาไว้โดยละการพิสูจน์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2.15. (การทดสอบแบบอาเบล : Abel's test)
ถ้า $\phi(x)$ เป็น ฟังก์ชัน ที่ มี ขอบเขต และ เป็น ฟังก์ชัน ทาง เดียว บน $[a,\infty)$ และ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้าแล้ว $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\phi(x)\,dx$ ลู่เข้า

ทฤษฎีบท 3.2.16. (การทดสอบแบบการทดสอบโดยดิริคเรต : Dirichlet's test)
ถ้า $\phi(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต เป็นฟังก์ชันทางเดียว ลู่เข้าสู่ศูนย์เมื่อ $x\to\infty$ และ $\displaystyle\int_a^X f(x)\,dx$ มีขอบเขตเมื่อ $X \geq a$ แล้ว $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\phi(x)\,dx$ ลู่เข้า

3.2.3 การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองที่ไม่เป็นลบ

สำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง ก่อนอื่นเราพิจารณากรณีที่ฟังก์ชัน f มีความไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่ $x=b$ กล่าวคือ จะเขียนลิมิตได้ในรูป

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบวก ทำให้เราได้ว่า $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)\,dx$ เป็นฟังก์ชันไม่ลดบนช่วง $[a,b)$ ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.2.1, 3.2.2 และ 3.2.4 เราจึงได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้ โดยจะละการพิสูจน์ เนื่องจากทฤษฎีบทดังกล่าวสามารถทำได้ในทำนองคล้ายกัน

ทฤษฎีบท 3.2.17. ให้ $f(x)\geq 0$ ทุก $x\in[a,b)$ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ที่ $x=b$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงบวก M ที่ทำให้ $\displaystyle\int_a^t f(x)\,dx \leq M$ สำหรับทุก $t\in[a,b)$

ทฤษฎีบท 3.2.18. (การทดสอบแบบเปรียบเทียบ: Comparison test)
ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่เป็นบวก โดยที่ $f(x)\leq g(x)$ สำหรับทุก $x\in[a,b)$ แล้ว

1. ถ้า $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ ลู่เข้าแล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่เข้าด้วย
2. ถ้า $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่ออกแล้ว $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ ลู่ออกด้วย

สำหรับกรณีฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x=a$ หรือจุดภายในช่วง $[a,b]$ ก็สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 3.2.19. จงตรวจสอบว่า ปริพันธ์ต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่

1. $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$
2. $\displaystyle\int_3^6 \frac{\ln x}{(x-3)^4}\,dx$

วิธีทำ. 1. จะเห็นว่า สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}}$ มีจุดที่ทำให้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์คือ ที่จุด $x = 1$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ที่กำหนด เนื่องจากสำหรับ $x > 1$ ได้ว่า $x^4-1 > x-1$ นั่นคือ $\dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}} < \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ เนื่องจาก $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ ลู่เข้า (โดยทฤษฎีบท 3.1.5 $a = 1, p = \frac{1}{2}$) โดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบ ทำให้ได้ว่า $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$ ลู่เข้า

2. ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{\ln x}{(x-3)^4}$ มีจุดที่ทำให้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์คือ ที่จุด $x = 3$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ เนื่องจาก $\ln x > 1$ สำหรับ $x > 3$ จึงได้ว่า $\dfrac{\ln x}{(x-3)^4} > \dfrac{1}{(x-3)^4}$

เนื่องจาก $\displaystyle\int_3^6 \frac{1}{(x-3)^4}\,dx$ ลู่ออก (โดยทฤษฎีบท 3.1.5 $a = 3, p = 4$) โดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบ ทำให้ได้ว่า $\displaystyle\int_3^6 \frac{\ln x}{(x-3)^4}\,dx$ ลู่ออก

ทฤษฎีบท 3.2.20. (การทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ: Limit comparison test)
ให้ f, g เป็นบวกบน $[a, b)$

1. ถ้า $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ และ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออกเหมือนกัน
2. ถ้า $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ และ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ ลู่เข้าแล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่เข้า
3. ถ้า $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ และ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ ลู่ออกแล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่ออก

สำหรับกรณีฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ หรือจุดภายในช่วง $[a, b]$ ก็สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน โดยพิจารณาลิมิตซึ่ง $x \to a^+$

ตัวอย่าง 3.2.21. จงตรวจสอบว่า ปริพันธ์ต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่

1. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 -\ln x\,dx$

วิธีทำ. 1. ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$ มีจุด $x = 3$ ที่ทำให้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์คือ ที่ขอบเขตบนของปริพันธ์ที่กำหนด เลือก $g(x) = \dfrac{1}{3-x}$ ซึ่ง

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{3-x}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

เนื่องจาก $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{3-x}\,dx$ ลู่ออก (โดยทฤษฎีบท 3.1.5 $b = 3, p = 1$) โดยการทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ ทำให้ได้ว่า $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}\,dx$ ลู่ออก

2. ฟังก์ชัน $f(x) = -\ln x$ มีจุดที่ทำให้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์คือ ที่จุด $x = 0$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ เลือก $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ซึ่ง

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln x}{x^{-1/2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1/x}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x} = 0$$

เนื่องจาก $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ลู่เข้า (โดยทฤษฎีบท 3.1.5 $a = 0, p = \frac{1}{2}$) โดยการทดสอบแบบลิมิตเปรียบเทียบ ทำให้ได้ว่า $\displaystyle\int_0^1 -\ln x\,dx$ ลู่เข้า

ในทำนองเดียวกันกับปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง เราสามารถสร้างวิธีการทดสอบที่ใช้งานได้ง่ายขึ้น โดยใช้ทฤษฎีบท 3.2.18, 3.2.20 และทฤษฎีบท 3.1.5 ประกอบกัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.22. 1. ถ้า $f \geq 0$ ในย่านจุดใกล้เคียงของ b แล้ว

- ปริพันธ์ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ จะลู่เข้า ถ้ามีจำนวนจริงบวก $p < 1$ และจำนวนจริงบวก M ที่ทำให้ $f(x) \leq M/(b-x)^p$ สำหรับทุก $x \in [a, b)$
- ปริพันธ์ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ จะลู่ออก ถ้ามีจำนวนจริงบวก $p \geq 1$ และจำนวนจริงบวก G ที่ทำให้ $f(x) \geq G/(b-x)^p$ สำหรับทุก $x \in [a, b)$

2. ถ้า $\displaystyle\lim_{x\to b^-} (b-x)^p f(x)$ มีค่าและไม่เป็นศูนย์แล้ว ปริพันธ์ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ จะลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $p < 1$

สำหรับกรณีฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ หรือจุดภายในช่วง $[a, b]$ ก็สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 3.2.23. ปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$ ลู่เข้า
เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{2}$

3.2.4 การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองทั่วไป

ในทำนองเดียวกันกับการทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งทั่วไป เราสามารถนิยามการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์และการตรวจสอบการลู่เข้าได้โดยสรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้โดยละการพิสูจน์ เนื่องจากสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน โดยเราจะยกตัวอย่างกรณีที่ f ไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่ $x = b$ สำหรับกรณี $x = a$ และกรณีจุดในช่วง $[a, b]$ ไม่ต่อเนื่อง สามารถนิยามได้ในทำนองเดียวกัน ดังนี้

บทนิยาม 3.2.2. ให้ $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ และ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง โดยที่ x ไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่ $x = b$

1. ปริพันธ์ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์** (absolutely convergent) ก็ต่อเมื่อ $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ ลู่เข้า
2. ปริพันธ์ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข** (conditional convergent) ก็ต่อเมื่อ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่เข้า แต่ $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ ลู่ออก

ทฤษฎีบท 3.2.24. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ จะลู่เข้า กล่าวคือ สำหรับ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ที่เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองซึ่ง $x = b$ ไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ ถ้า $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ จะลู่เข้า

ตัวอย่าง 3.2.25. จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ. เราพิจารณาว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}\right|\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่ เนื่องจาก

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}\right| \le \frac{1}{x^{1/2}}$$

และ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ ลู่เข้า (โดยทฤษฎีบท 3.1.5 $a = 3, p = \frac{1}{2}$) โดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบ จึงได้ว่า $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}\right|\,dx$ ลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 3.2.24 สรุปได้ว่า $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}\,dx$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถพิจารณาเกณฑ์การลู่เข้าแบบโคชี สำหรับกรณีปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองได้ทำนองเดียวกัน ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2.26. (เกณฑ์ของโคชีสำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง)
ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^b f(x)\,dx$ ชนิดที่สอง เมื่อ f ไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่ $x = b$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$\left|\int_{a+\lambda_1}^{b+\lambda_2} f(x)\,dx\right| < \epsilon \text{โดยที่ } 0 < \lambda_1, \lambda_2 < \delta$$

สำหรับการพิสูจน์สามารถทำได้ในทำนองคล้ายกันกับทฤษฎีบท 3.2.12 โดยกำหนดฟังก์ชัน $F(\lambda) = \int_{a+\lambda}^{b} f(x)\,dx$ แล้วพิจารณาเกณฑ์การลู่เข้าแบบโคชีของ $F(\lambda)$

3.2.5 การทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม

เนื่องจากเราสามารถเขียนปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สามในรูปแบบของผลบวกของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งและสอง เราจึงสามารถพิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สามได้จากการพิจารณาการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งและสอง ซึ่งเราได้สร้างวิธีการตรวจสอบมาในหัวข้อที่ผ่านมา โดยเราสามารถพิจารณาได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.2.27. จงพิจารณาว่า ปริพันธ์ $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ. จากปริพันธ์ที่กำหนดให้ เราพบว่า เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม เนื่องจากมีขอบเขตบนเป็นอนันต์ และฟังก์ชัน $f(x) = \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}$ มีความไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่ $x = 1$ เราจึงต้องแยกปริพันธ์ดังกล่าวออกเป็นสามส่วน กล่าวคือ

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx + \int_1^2 \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx + \int_2^\infty \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx$$

เราจะพิจารณาปริพันธ์ทีละพจน์ ดังนี้

- พจน์ $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx$ จะเห็นว่าเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองซึ่งมีจุดที่ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่ $x = 1$ ซึ่งเป็นขอบเขตบนของปริพันธ์ เราจึงทำการทดสอบแบบเปรียบเทียบ

  เนื่องจาก $f(x) = \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}$ มีค่าเป็นลบในช่วง $[0, 1]$ เราจึงพิจารณา $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{(1-x)^{1/3}}\,dx$ ซึ่งมีค่าเป็นบวกตลอดในช่วง $[0, 1]$

  เนื่องจาก เราทราบว่า $e^{-x} \le 1$ สำหรับทุก $x \in [0, 1]$ นั่นคือ $\frac{e^{-x}}{(1-x)^{1/3}} \le \frac{1}{(1-x)^{1/3}}$ จึงเลือกปริพันธ์ $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/3}}\,dx$ ซึ่งลู่เข้าจากทฤษฎีบท 3.1.5 โดยทฤษฎีบท 3.2.18 จึงได้ว่า $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx$ ลู่เข้า

- พจน์ $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx$ จะเห็นว่าเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองซึ่งมีจุดที่ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่ $x = 1$ ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ เราจึงทำการทดสอบแบบเปรียบเทียบ

  สำหรับพจน์ที่สอง $f(x) = \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}$ มีค่าเป็นบวกตลอดบนช่วง

$[0,1]$ ทำนองเดียวกันกับพจน์ที่หนึ่ง จะได้ว่า $\dfrac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}} \leq \dfrac{1}{(x-1)^{1/3}}$ จึงเลือกปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{1/3}}\,dx$ ซึ่งลู่เข้าจากทฤษฎีบท 3.1.5 โดยทฤษฎีบท 3.2.18 จึงได้ว่า $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx$ ลู่เข้า

- พจน์ $\displaystyle\int_2^\infty \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx$ จะเห็นว่าเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง โดยขอบเขตบนเป็นอนันต์

  เลือกฟังก์ชัน $g(x) = e^{-x}$ ซึ่งเราทราบว่า

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x}(x-1)^{1/3}} = 0$$

  เนื่องจาก $\displaystyle\int_2^\infty e^{-x}\,dx$ ลู่เข้าจากทฤษฎีบท 3.1.3 ข้อ 2 โดยทฤษฎีบท 3.2.4 จึงได้ว่า $\displaystyle\int_2^\infty \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx$ ลู่เข้า

จากทั้งสามปริพันธ์ลู่เข้า เราจึงสรุปได้ว่าปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(x-1)^{1/3}}\,dx$ ลู่เข้า ตามต้องการ

แบบฝึกหัดที่ 3.2

1. จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ลู่เข้าหรือลู่ออก

   (a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(x+1)}$

   (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}$

   (e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x+\ln x}\,dx$

   (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x^2e^{4x}\,dx$

2. จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ลู่เข้าหรือลู่ออก

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$

   (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x-2)^2}$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{-\ln x}$

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_3^2 \frac{x^2+1}{x^2-4}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)^{1/3}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}}$

3. จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ลู่เข้าหรือลู่ออก หากลู่เข้า จงพิจารณาว่า การลู่เข้าเป็นการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

   (a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^4}$

   (b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\sin x\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x}\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$

4. จงพิจารณาว่า สำหรับค่าคงที่ $a > 0$ ปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x+a}\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่

5. จงพิจารณาว่า ปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่

6. สำหรับ $t > 0$ จงแสดงว่า

   (a) $\displaystyle\int_t^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ ลู่เข้า

   (b) $\displaystyle\int_t^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ ลู่เข้า

   (คำใบ้ : พิจารณาพจน์ $\displaystyle\int_t^M \frac{\sin x}{x}\,dx$ โดยการหาปริพันธ์แต่ละส่วน แล้วใช้ผลจากข้อ a.)

7. ถ้า $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ โดยที่ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามในเทอมของ x โดยที่ $Q(x) \neq 0$ สำหรับทุก $x \geq a$ จงแสดงว่า $\displaystyle\int_a^\infty f(x)$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ ดีกรีของ $Q(x)$ มากกว่าดีกรีของ $P(x)$ อย่างน้อยสอง

8. ให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามซึ่งไม่มีตัวประกอบร่วมกันเลย จงแสดงว่า $\displaystyle\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ ลู่ออก เมื่อรากของพหุนาม $Q(x) = 0$ อยู่ในช่วง $a \leq x \leq b$

3.3 การลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ

ในบทที่ 2 เราเคยพิจารณาฟังก์ชันที่นิยามในรูปแบบอิงตัวแปรเสริม

$$\phi(\alpha) = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$$

ซึ่งโดยทฤษฎีบท 2.4.3 เราสามารถพิจารณาสลับลำดับการหาอนุพันธ์และปริพันธ์ได้

ในหลายเหตุการณ์ ฟังก์ชันที่นิยามข้างต้น อาจพิจารณาได้ในรูปของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ กล่าวคือ

$$\phi(\alpha) = \int_{a}^{\infty} f(x,\alpha)\,dx$$

โดยที่ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรของ x และ α ซึ่ง $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ และ $x \in [a, \infty)$ จะเห็นว่า ฟังก์ชัน $\phi(\alpha)$ เป็นฟังก์ชันของ α เช่นเดียวกันกับเหตุการณ์ที่เคยกล่าวในทฤษฎีบท 2.4.3 เราสนใจว่า

1. $\phi(\alpha)$ มีความต่อเนื่องหรือไม่ บนเซตใด
2. $\phi(\alpha)$ หาปริพันธ์ได้บน $[\alpha_1, \alpha_2]$ หรือไม่ และ $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \phi(\alpha)\,d\alpha = \int_{a}^{\alpha} f(x,\alpha)\,d\alpha$ หรือไม่
3. $\phi(\alpha)$ หาอนุพันธ์ได้หรือไม่ และ $\displaystyle\phi'(\alpha) = \int_{a}^{\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,d\alpha$ หรือไม่

เนื่องจาก $\phi(\alpha)$ นิยามโดยปริพันธ์ไม่ตรงแบบ เราอาจพิจารณาว่า การลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบจะรับประกันเหตุการณ์ดังกล่าวที่กล่าวมาข้างต้นได้หรือไม่ ซึ่งจะพบว่า เงื่อนไขดังกล่าวไม่เพียงพอที่จะสรุปเหตุการณ์ดังกล่าว เราจึงพิจารณาการลู่เข้าชนิดที่เหมาะสมกว่าดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3.3.1. จะกล่าวว่า ปริพันธ์ $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x,\alpha)\,dx$ **ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ** (converge uniformly) บนช่วง $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$ ถ้าสำหรับ $\epsilon > 0$ มีจำนวนจริง N ซึ่งเป็นอิสระจาก α ซึ่งสำหรับทุก $p \ge N$

$$\left|\int_{a}^{\infty} f(x,\alpha)\,dx - \int_{a}^{p} f(x,\alpha)\,dx\right| = \left|\int_{p}^{\infty} f(x,\alpha)\,dx\right| < \epsilon$$

สำหรับทุก $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$

หมายเหตุ. เราอาจศึกษาฟังก์ชัน $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x,\alpha)\,dx$ ให้อยู่ในลักษณะการศึกษาอนุกรมอนันต์ กล่าวคือ ให้

$$a = a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$$

เป็นลำดับของจำนวนจริงซึ่ง $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ นั่นคือ เราเขียนปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปผลบวกอนันต์ กล่าวคือ

$$\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x,\alpha)\,dx$$

สมมติให้ $u_n(\alpha) = \displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x,\alpha)\,dx$ ในการศึกษาอนุกรมอนันต์ของฟังก์ชัน หากอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\alpha)$ ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอแล้ว $\phi(\alpha)$ ก็จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องด้วย อย่างไรก็ตาม การพิจารณาการลู่เข้าของลำดับนี้อาจไม่เป็นไปได้อย่างเดียว (uniqueness) การนิยามผ่านลิมิตของผลบวกอนันต์อาจไม่เพียงพอ เราจึงต้องนิยามแนวคิดของการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอตามบทนิยาม 3.3.1

ในการตรวจสอบการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ นอกจากการใช้นิยามการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ ดังทฤษฎีบท 3.3.1 แล้ว เรายังมีวิธีทดสอบต่าง ๆ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.3.1. (การทดสอบแบบไวแยร์สตราส : Weierstrass M-test)
ถ้า $M(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบวก และมีความต่อเนื่องสำหรับทุก $x \geq N$ และถ้า

1. $|f(x,\alpha) \leq M(x)$ สำหรับ $\alpha_1 \leq \alpha_2$, $x \geq N$ และ
2. $\displaystyle\int_a^\infty M(x)\,dx$ ลู่เข้า

แล้ว $\displaystyle\int_N^\infty f(x,\alpha)\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอและลู่เข้าแบบสัมบูรณ์สำหรับทุก $\alpha \in [\alpha_1,\alpha_2]$

พิสูจน์. สมมติให้สมมติฐานเป็นจริง ให้ $\epsilon > 0$ จาก $\displaystyle\int_N^\infty M(x)\,dx$ ลู่เข้า จะได้ว่า มี $N > a$ ซึ่งทำให้ $\displaystyle\int_N^\infty f(x,\alpha)\,dx$ ลู่เข้า กล่าวคือ

$$\left|\int_a^\infty M(x)\,dx - \int_a^N M(x)\,dx\right| < \epsilon \text{ ทุก } S \geq N$$

นั่นคือ สำหรับทุก $S \geq N$ และ $\alpha \in [\alpha_1,\alpha_2]$ จะได้ว่า

$$\int_N^\infty M(x)\,dx = \left|\int_a^\infty M(x)\,dx - \int_a^N M(x)\,dx\right| < \epsilon$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\left|\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx - \int_a^N f(x,\alpha)\,dx\right| &= \left|\int_N^\infty f(x,\alpha)\,dx\right| \\ &\leq \int_N^\infty |f(x,\alpha)|\,dx \\ &\leq \int_N^\infty M(x)\,dx < \epsilon\end{aligned}$$

นั่นคือ $\displaystyle\int_N^\infty f(x,\alpha)\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอและลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ □

ตัวอย่าง 3.3.2. จงพิจารณาว่าปริพันธ์ต่อไปนี้ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอและลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือไม่

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{x^2+1}\,dx$ บน $(-\infty,\infty)$
2. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\sin(\alpha x)\,dx$ บน $(-\infty,\infty)$

วิธีทำ. 1. เนื่องจาก $\left|\dfrac{\cos\alpha x}{x^2+1}\right| \le \dfrac{1}{x^2+1}$ สำหรับทุก $\alpha\in\mathbb{R}$ และ $x>0$ จึงเลือก $M(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ ซึ่ง $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$ ลู่เข้า นั่นคือ

$$\int_0^\infty \left|\frac{\cos\alpha x}{x^2+1}\right| dx \le \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

ดังนั้นโดยการทดสอบแบบไวแยร์สตาร์ส จะได้ว่า $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{x^2+1}\,dx$ ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอ และลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

2. พิจารณา $\left|xe^{-x^2}\sin(\alpha x)\right| \le xe^{-x^2}$ สำหรับทุก $\alpha\in\mathbb{R}$ และ $x\ge 0$ เนื่องจาก $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$ ลู่เข้า (ให้ผู้อ่านตรวจสอบเป็นแบบฝึกหัด) โดยการทดสอบแบบไวแยร์สตาร์ส จะได้ว่า $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\sin(\alpha x)\,dx$ ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอ และลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ตัวอย่าง 3.3.3. กำหนดให้ $\phi(\alpha)=\displaystyle\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}\,dx$ สำหรับ $\alpha>0$

1. จงคำนวณค่าปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\phi(\alpha)$
2. จงแสดงว่า เมื่อ $\alpha\ge\alpha_1>0$ แล้ว $\phi(\alpha)$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ 1
3. จงแสดงว่า เมื่อ $\alpha>0$ แล้ว $\phi(\alpha)$ ไม่ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ

วิธีทำ. 1. เราคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบได้โดยตรง กล่าวคือ

$$\phi(\alpha)=\lim_{b\to\infty}\int_0^b \alpha e^{-\alpha x}\,dx=\lim_{b\to\infty} -e^{-\alpha x}\big|_{x=0}^b=1$$

2. จะแสดงโดยใช้นิยามของการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ 1 หากจะแสดงว่า $\phi(\alpha)$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ 1 จะต้องแสดงว่า สำหรับแต่ละ $\epsilon>0$ จะมี N (ซึ่งขึ้นอยู่กับ ϵ แต่ไม่ขึ้นอยู่กับ α) ซึ่ง $\left|1-\displaystyle\int_0^u \alpha e^{-\alpha x}\,dx\right|<\epsilon$ สำหรับทุก $u>N$

ดังนั้น ให้ $\epsilon>0$ เลือก $N=\dfrac{1}{\alpha_1}\ln\dfrac{1}{\epsilon}$ ซึ่งทำให้

$$\left|1-\int_0^u \alpha e^{-\alpha x}\,dx\right| = |1-(1-e^{-\alpha u})| = e^{-\alpha u}\le e^{-\alpha_1 u}<\epsilon$$

สำหรับ $u > N$ ตามต้องการ (เราสามารถแสดงการลู่เข้าอย่างสม่ำเสอโดยวิธีไวแยร์สตาร์ส ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด)

3. เมื่อ $\alpha_1 \to 0$ จะเห็นว่า $N = \dfrac{1}{\alpha_1}\ln\dfrac{1}{\epsilon}$ เพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต นั่นคือ ปริพันธ์ $\phi(\alpha)$ ไม่ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha > 0$

หมายเหตุ. ในการเลือก N ในข้อที่ 2. ของตัวอย่างดังกล่าว จากการคิดทด เพื่อให้ได้ว่าปริพันธ์ดังกล่าวลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ จะพิจารณาว่า หาก $u > N$ แล้ว ปริพันธ์จะลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ดังนั้นจากอสมการ $e^{-\alpha_1 u} < \epsilon$ จึงแก้อสมการเพื่อหาค่า N

ทฤษฎีบทต่อไปจะกล่าวถึงการทดสอบการลู่เข้าอีกชนิดของดีริคเรต โดยเราจะละการพิสูจน์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.3.4. (การทดสอบโดยดีริคเรต : Dirichlet's test)
ถ้า

1. $\psi(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบวกและเป็นฟังก์ชันลดทางเดียว โดยที่ $\psi(x) \to 0$ เมื่อ $x \to 0$ และ
2. $\displaystyle\int_a^u f(x,\alpha)\,dx$ มีขอบเขต สำหรับทุก $u > a$ และ $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$ แล้ว

แล้ว $\displaystyle\int_a^\infty f(x,\alpha)\psi(x)\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับทุก $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

สำหรับการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน กล่าวคือ

บทนิยาม 3.3.2. จะกล่าวว่า ปริพันธ์ $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ ซึ่งเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองที่มีความไม่ต่อเนื่องแบบไม่มีขอบเขตที่ $x = a$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบนช่วง S ถ้าสำหรับ $\epsilon > 0$ มีจำนวนจริง $t_0 \in (a, b]$ ซึ่ง

$$\left|\int_a^b f(x,\alpha)\,dx - \int_t^b f(x,\alpha)\,dx\right| < \epsilon$$

สำหรับทุก $\alpha \in S, a < t < t_0 \le b$

และการทดสอบแบบไวแยร์สตราสสามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.3.5. (การทดสอบแบบไวแยร์สตราส II: Weierstrass M-test II)
ถ้า $M(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบวก และถ้า

1. $|f(x,\alpha)| \le M(x)$ สำหรับ $\alpha \in S, x \in (a, b]$ และ
2. $\displaystyle\int_a^b M(x)\,dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง โดยไม่มีขอบเขต ซึ่งลู่เข้า

แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอและลู่เข้าแบบสัมบูรณ์บน S

3.3.1 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะเป็นทฤษฎีบทที่ช่วยตอบคำถามข้างต้นของหัวข้อนี้เกี่ยวกับฟังก์ชัน $\phi(\alpha)$ โดยเริ่มต้น เราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความต่อเนื่อง ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.3.6. ถ้า $f(x,\alpha)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับทุก $x \geq a$ และ $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ และถ้า $\displaystyle\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ แล้ว $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ ต่อเนื่องบน $[\alpha_1, \alpha_2]$ นั่นคือ สำหรับจุด $\alpha_0 \in [\alpha_1, \alpha_2]$ จะได้ว่า

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \phi(\alpha) = \lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx = \int_a^\infty \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)\,dx$$

พิสูจน์. จาก $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ จะได้ว่า เราเขียน

$$\phi(\alpha) = \int_a^u f(x,\alpha)\,dx + R(u,\alpha)$$

โดยที่ $R(u,\alpha) = \displaystyle\int_u^\infty f(x,\alpha)\,dx$ เพราะฉะนั้น จึงได้ว่า

$$\phi(\alpha+h) = \int_a^u f(x,\alpha+h)\,dx + R(u,\alpha+h)$$

สำหรับ $\alpha + h \in [\alpha_1, \alpha_2]$ นั่นคือ

$$\phi(\alpha+h)-\phi(\alpha) = \int_a^u [f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)]\,dx + R(u,\alpha+h) - R(u,\alpha)$$

เพราะฉะนั้น

$$|\phi(\alpha+h)-\phi(\alpha)| \leq \int_a^u |f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)|\,dx + |R(u,\alpha+h)| + |R(u,\alpha)|$$

เนื่องจากปริพันธ์ $\displaystyle\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบน $[\alpha_1, \alpha_2]$ จึงได้ว่า มี N (ซึ่งเป็นอิสระจาก α) ที่ทำให้สำหรับแต่ละ $u > N$

$$|R(u,\alpha+h)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ และ } |R(u,\alpha)| < \frac{\epsilon}{3}$$

จาก $f(x,\alpha)$ มีความต่อเนื่อง จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha)| < \delta/3$ เมื่อ $|h| < \delta$ นั่นคือ

$$\int_a^u |f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha)|\,dx < \frac{\epsilon}{3}$$

เพราะฉะนั้น

$$|\phi(\alpha+h) - \phi(\alpha)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

นั่นคือ $\phi(\alpha)$ มีความต่อเนื่องบนช่วง $[\alpha_1, \alpha_2]$ ตามต้องการ □

กล่าวโดยสรุปคือ หากปริพันธ์ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอแล้ว เราจะสามารถสลับลิมิตเข้าไปในปริพันธ์ไม่ตรงแบบได้ ตัวอย่างค้านต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า หากขาดซึ่งเงื่อนไขการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ ก็จะทำให้ทฤษฎีบท 3.3.6 ไม่เป็นจริง

ตัวอย่างค้าน 3.3.7. จงแสดงว่า

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}\,dx \neq \int_0^\infty \left(\lim_{\alpha\to 0^+}\alpha e^{-\alpha x}\right)dx$$

พิสูจน์. ในตัวอย่าง 3.3.3 จะเห็นว่า

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}\,dx = 1$$

แต่เนื่องจาก

$$\int_0^\infty \left(\lim_{\alpha\to 0^+}\alpha e^{-\alpha x}\right)dx = \int_0^\infty 0\,dx = 0$$

จึงสรุปได้ว่า

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}\,dx \neq \int_0^\infty \left(\lim_{\alpha\to 0^+}\alpha e^{-\alpha x}\right)dx$$

ทั้งนี้ จะเห็นว่าในตัวอย่าง 3.3.3 นั้น $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}\,dx$ ไม่ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha > 0$ ทำให้ไม่สามารถรับประกันได้ว่า $\phi(\alpha)$ จะต่อเนื่องสำหรับ $\alpha > 0$ □

ทฤษฎีบทต่อไปจะกล่าวถึงการสลับลำดับของการหาปริพันธ์ ซึ่งในทฤษฎีบทนี้จะคล้ายกับทฤษฎีบท 2.4.3 ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.3.8. ถ้า $f(x,\alpha)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับทุก $x \geq a$ และ $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ และถ้า $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ แล้ว

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\phi(\alpha)\,d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left[\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx\right]d\alpha = \int_a^\infty\left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\,d\alpha\right]dx$$

พิสูจน์. จากทฤษฎีบท 3.3.6 จะได้ว่า $\phi(\alpha)$ มีความต่อเนื่องบน $[\alpha_1, \alpha_2]$ และเราทราบว่า $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\,dx$ ต่อเนื่อง ทุก $\alpha \geq \alpha_1$ ต่อไปเราจะแสดงว่า $\displaystyle\int_a^S\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\,d\alpha\,dx$ ลู่เข้าสู่ $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\phi(\alpha)\,d\alpha$ เมื่อ $S\to\infty$

จากทฤษฎีบท 2.4.6 เราได้ว่า

$$\int_a^S\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\,d\alpha\,dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_a^S f(x,\alpha)\,dx\,d\alpha$$

เนื่องจากปริพันธ์ $\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ ลู่เข้าสม่ำเสมอ จะได้ว่า สำหรับ $\epsilon > 0$ มีจำนวนจริง N ซึ่งสำหรับ $N > a$ ซึ่ง $S \geq N$ จะได้ว่า

$$\left|\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx - \int_a^S f(x,\alpha)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\left|\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \phi(\alpha)\,d\alpha - \int_a^S \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\,d\alpha\,dx\right| &\\ &= \left|\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx\,d\alpha - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_a^S f(x,\alpha)\,dx\,d\alpha\right| \\ &\leq \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left|\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx - \int_a^S f(x,\alpha)\,dx\right| d\alpha \\ &\leq \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon\end{aligned}$$

จึงได้ว่า เราสามารถสลับการหาปริพันธ์ได้ตามต้องการ □

ตัวอย่าง 3.3.9. จงแสดงว่า $\int_0^\infty \int_a^b \frac{1}{1+\alpha^2x^2}\,d\alpha\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ สำหรับ $b > a > 0$

วิธีทำ. จะเห็นว่า $f(x,\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2x^2}$ มีความต่อเนื่องบน $[0,\infty)\times[a,b]$ ต่อไปเราจะพิจารณาว่า $\int_0^\infty \frac{1}{1+\alpha^2x^2}\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบน $[a,b]$

จาก $\alpha \geq a$ เรา จึง ได้ ว่า $\left|\frac{1}{1+\alpha^2x^2}\right| \leq \frac{1}{1+a^2x^2}$ เนื่องจาก $\int_a^\infty \frac{1}{1+a^2x^2}\,dx$ ลู่เข้า โดยการทดสอบแบบไวแยร์สตาร์ส (ทฤษฎีบท 3.3.1) จะได้ว่า $\int_0^\infty \frac{1}{1+\alpha^2x^2}\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบน $[a,b]$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.3.8 จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_a^b \frac{1}{1+\alpha^2x^2}\,d\alpha\,dx &= \int_a^b \int_0^\infty \frac{1}{1+\alpha^2x^2}\,dx\,d\alpha \\ &= \int_a^b \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}\,du\,d\alpha \\ &= \frac{\pi}{2}\int_a^b \frac{1}{\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

ต่อไปเราจะพิจารณาการสลับลำดับระหว่างการหาอนุพันธ์กับเครื่องหมายปริพันธ์ตามทฤษฎีบท 2.4.3 สำหรับปริพันธ์ที่เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3.10. ถ้า $f(x,\alpha)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และอนุพันธ์ย่อย $\partial f/\partial \alpha$ ต่อเนื่องเทียบกับ α สำหรับทุก $x \geq a$ และ $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ และถ้า $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ แล้ว

$$\phi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx$$

พิสูจน์. จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสส่วนที่หนึ่ง (ทฤษฎีบท 2.2.1) สำหรับทุก $y \in (a_1, a_2)$ ได้ว่า

$$\int_{\alpha_1}^y \frac{\partial f(x,\alpha))}{\partial \alpha}\,d\alpha = f(y,x) - f(\alpha_1,x)$$

เนื่องจาก $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[\alpha_1,\alpha_2]$ โดยทฤษฎีบท 3.3.8 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_1}^y \int_a^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x}\,dx\,d\alpha &= \int_a^\infty \int_{\alpha_1}^y \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x}\,d\alpha\,dx \\ &= \int_a^\infty [f(y,x) - f(\alpha_1,x)]\,dx \\ &= \phi(y) - \phi(\alpha_1)\end{aligned}$$

ดังนั้น จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสส่วนที่สอง (ทฤษฎีบท 2.2.6) จะได้ว่า

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{\alpha_1}^y \int_a^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x}\,dx\,d\alpha = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dx = \phi'(y)$$

จึงสรุปได้ว่า $\displaystyle\phi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx$ ตามต้องการ

□

หมายเหตุ. ในทฤษฎีบท 3.3.10 จะเห็นว่า a ที่เป็นขอบเขตล่างของปริพันธ์ไม่ตรงแบบจะไม่ขึ้นอยู่กับ α ในกรณีที่ a เป็นขอบเขตล่างที่เป็นฟังก์ชันของ α เราจะสามารถใช้ทฤษฎีบทของไลบ์นิตซ์ (ทฤษฎีบท 2.4.3) ดำเนินการได้เช่นเดียวกัน

3.4 การคำนวณปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

ในส่วนนี้เราจะศึกษาวิธีการคำนวณปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ซึ่งหลายปริพันธ์ ได้ใช้เทคนิคในการจัดพจน์ของปริพันธ์ อาทิ การใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ รวมถึงสมบัติที่ได้กล่าวข้างต้นคือจากใช้สมบัติของการลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ ซึ่งสามารถช่วยให้เราสามารถคำนวณค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบบางปริพันธ์ที่คำนวณค่าตามปกติได้ยาก โดยอาศัยการสลับลำดับการหาปริพันธ์หรือสลับการหาอนุพันธ์ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.4.1. จงแสดงว่า $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\ln 2$

วิธีทำ. ก่อนอื่น จะต้องแสดงว่า $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$ ลู่เข้า (ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัดโดยการตรวจสอบการลู่เข้า) จึงสมมติได้ว่า ให้ $I = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$ เราจะทำการสมมติตัวแปร ให้ $x = \pi/2 - y$ จะได้ว่า

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln\cos(\frac{\pi}{2} - y)\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln\cos y\,dy$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\pi/2} (\ln\sin x + \ln\cos x)\,dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)\,dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln\sin 2x\,dx - \int_0^{\pi/2} \ln 2\,dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln\sin 2x\,dx - \frac{\pi}{2}\ln 2 \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

ต่อมา กำหนดให้ $2x = v$ จะได้ว่า $dv = \frac{1}{2}dx$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \ln\sin 2x\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\sin v\,dv \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/2} \ln\sin v\,dv + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln\sin v\,dv\right] \end{aligned}$$

สำหรับปริพันธ์พจน์สุดท้าย กำหนดให้ $v = \pi - u$ จะได้ว่า

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln\sin v\,dv = -\int_{\pi/2}^{0} \ln\sin u\,du$$

เพราะฉะนั้น $\int_0^{\pi/2} \ln\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}(I + I) = I$ ดังนั้น จากสมการ (3.4.1) ทำให้ได้ว่า $I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$ ตามต้องการ

ตัวอย่าง 3.4.2.

1. จงแสดงว่า $\phi(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+\alpha}$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับทุก $\alpha \geq 1$
2. หากทราบว่า $\phi(\alpha) = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$ แล้ว จงคำนวณค่า $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

3. จงแสดงว่า

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}\theta\, d\theta = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...(2n)}\frac{\pi}{2}$$

วิธีทำ. 1. สำหรับ $\alpha \geq 1$ โดยการทดสอบแบบไวแยร์สตาร์ส จะได้ว่า

$$\frac{1}{x^2+\alpha} \leq \frac{1}{x^2+1}$$

และเนื่องจาก $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+\alpha}\, dx$ ลู่เข้า (ให้ผู้อ่านตรวจสอบเป็นแบบฝึกหัด) จะได้ว่า $\phi(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha}$ ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอ

2. พิจารณาพจน์

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} \tag{3.4.2}$$

(ผู้อ่านสามารถแสดงได้โดยใช้การหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบโดยตรง) ก่อนอื่นจะแสดงว่า $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^2}$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสำหรับ $\alpha \geq 1$

เนื่องจาก $\frac{1}{(x^2+\alpha)^2} \leq \frac{1}{(x^2+1)^2}$ และ $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^2}$ ลู่เข้า โดยการทดสอบแบบไวแยร์สตาร์ส จะได้ว่า $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^2}$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ

โดยทฤษฎีบท 3.3.10 ทำการหาอนุพันธ์ของสมการ (3.4.2) เทียบกับ α ทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\alpha}\left(\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha}\right) &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{x^2+\alpha}\right)\\ &= -\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+\alpha)^2}\, dx = -\frac{\pi}{4}\alpha^{-3/2}\end{aligned}$$

ต่อไป เราต้องการพิจารณากรณีที่ $\alpha \to 1^+$ เนื่องจาก $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^2}$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ โดยใช้ทฤษฎีบท 3.3.6 จะได้ว่า

$$\lim_{\alpha\to 1^+}\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^2} = \int_0^\infty \lim_{\alpha\to 1^+}\frac{dx}{(x^2+\alpha)^2} = \lim_{\alpha\to 1^+}\frac{\pi}{4}\alpha^{-3/2} = \frac{\pi}{4}$$

3. ในทำนองคล้ายกันกับข้อ 2. เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{2}\alpha^{-1/2}$$

และสามารถแสดงได้ว่า $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ และเมื่อหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับ α จะได้ผลลัพธ์คือ

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2} = \frac{\pi}{4}\alpha^{-3/2}$$

ซึ่งในทำนองเดียวกันกับข้อ 2. เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\frac{d^n}{d\alpha^n}\int_0^\infty \frac{1}{x^2+\alpha^2}\,dx = \int_0^\infty = \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\left(\frac{1}{x^2+\alpha^2}\right)\,dx$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่ n เทียบกับ α จะทำให้ได้

$$(-1)(-2)...(-n)\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2} = \frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{-5}{2}\cdots\frac{-(2n-1)}{2}\frac{\pi}{2}\alpha^{-\frac{(2n+1)}{2}}$$

เมื่อให้ $\alpha \to 1^+$ โดยทฤษฎีบท 3.3.10 จะได้ว่า

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{(-1)(-3)...(-2n-1)}{2^n(-1)^n n!}\frac{\pi}{2} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...(2n)}\frac{\pi}{2}$$

สำหรับการแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta\,d\theta$ เราสามารถแสดงได้โดยให้ $x = \tan\theta$ จะได้พจน์ตามที่ต้องการ

แบบฝึกหัดที่ 3.3 - 3.4

1. จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่กำหนดลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอหรือไม่

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}\,dx$ สำหรับ $\alpha \in [a,b]$ เมื่อ $0 < a < b < \infty$

   (b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin(\alpha^2+x^2)\,dx$ สำหรับ $\alpha \in (-\infty,\infty)$

   (c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ สำหรับ $\alpha > 0$

   (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\alpha x^2+1}\,dx$ สำหรับ $\alpha \in [\epsilon,\infty)$ เมื่อ $\epsilon > 0$

2. พิจารณา $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos rx\,dx$ สำหรับ $\alpha > 0$ และสำหรับจำนวนจริง r ใด ๆ

   (a) จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos rx\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+r^2}$

   (b) จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos rx\,dx$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอและลู่เข้าสัมบูรณ์ สำหรับ $a \le \alpha \le b$ และจำนวนจริง r ใด ๆ

3. จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\pi x\ln\sin x\,dx = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$

4. จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{\alpha}e^{-\alpha x}\,dx$ มีความต่อเนื่องบนช่วง $[1,2]$

5. จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}$ โดยที่ $b > a > 0$

6. จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x\sec rx}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{b^2+r^2}{a^2+e^2}$ โดยที่ $a,b>0$
(คำใบ้: ใช้ผลจากข้อ 2 และทฤษฎีบท 3.3.8)

7. จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\infty e^{\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \tan^{-1}\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{2}\ln(\alpha^2+1)$ โดยที่ $\alpha>0$
(คำใบ้: ใช้ผลจากข้อ 2 และทฤษฎีบท 3.3.10)

8. จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\pi}{2}$
(คำใบ้: ใช้ผลจากข้อ 8, 1c และทฤษฎีบท 3.3.6)

3.5 บทนำสู่ปริพันธ์เชิงวงรี

ในแคลคูลัสพื้นฐาน การหาความยาวของส่วนโค้งของเส้นโค้งเรียบ $y = f(x)$ บนช่วง $[a,b]$ สามารถหาได้จากปริพันธ์จำกัดเขต

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \tag{3.5.1}$$

ปัญหาที่น่าสนใจปัญหาหนึ่งคือ การหาความยาวเส้นรอบรูปวงรี สมมติให้วงรีมีสมการ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ โดยที่ $a<b$ และสมการในรูปอิงตัวแปรเสริมเขียนได้ในรูป $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$ จะได้ว่า ความยาวของเส้นรอบวงรีหาได้จาก

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\,d\theta$$

ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

โดยที่ $k^2 = 1-\frac{a^2}{b^2}$ ซึ่งปริพันธ์ดังกล่าวไม่สามารถคำนวณค่าได้โดยวิธีปกติที่เคยศึกษามาแล้ว

ปัญหาต่อไปที่น่าสนใจคือ ปัญหาการแกว่งลูกตุ้ม (เพนดูลัม) สมมติว่ามีลูกตุ้มความยาว L ที่ไม่มีความหน่วง มีการเคลื่อนที่ที่สามารถจำลองได้โดยสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin u = 0$$

โดยที่ u คือมุมระหว่างลูกตุ้มกับเส้นแนวตั้งฉากกับพื้นโลก เป็นฟังก์ชันของเวลา t และ g คือค่าคงที่เนื่องจากแรงดึงดูดของโลก ซึ่งในทางฟิสิกส์ เราอาจทำการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (ดูรายละเอียดจาก [18]) สมมติว่ามุมเริ่มต้น $u(0) = A$ จะได้คาบของการแกว่ง $T(A)$ โดยที่ $k = \sin\frac{A}{2}$ โดย

$$T(A) = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

ซึ่งก็ไม่สามารถคำนวณค่าของปริพันธ์โดยวิธีปกติเช่นกัน เราจึงต้องมีวิธีการในการสร้างรูปแบบมาตรฐานของปริพันธ์ชนิดพิเศษเหล่านี้ เพื่อให้ได้เครื่องมือสำหรับช่วยคำนวณค่าเมื่อปัญหาสามารถแปลงได้ในรูปของปริพันธ์ดังกล่าว

3.5.1 ปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลอจองค์

ปริพันธ์เชิงวงรีแบบพื้นฐานได้รับการศึกษาโดยแอนเดรียน มารี เลอจองค์ (Andrien-Marie Legendre) โดยปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลอจองค์สามารถแบ่งได้เป็นสามชนิด โดยกำหนดให้ $0 \leq \phi \leq \pi/2$ ดังนี้

1. **ปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลอจองค์ชนิดที่หนึ่ง** (The Legendre's elliptic integral of the first kind) คือปริพันธ์ที่เขียนได้ในรูป

$$u = F(k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \qquad 0 \leq k^2 < 1 \tag{3.5.2}$$

ตัวแปรเสริม k เรียกว่า **โมดูลัส** (modulus) ของปริพันธ์เชิงวงรี และ ϕ เรียกว่า **แอมพลิจูด** (amplitude) ของปริพันธ์เชิงวงรี ซึ่ง $0 \leq \phi < \pi/2$

ในกรณี ϕ ทั่วไป เราจะกล่าวว่า $F(k, \phi)$ เป็น**ปริพันธ์เชิงวงรีไม่บริบูรณ์** (incomplete elliptic integral) ชนิดที่หนึ่ง และในกรณีที่ $\phi = \pi/2$ จะเขียน $F(k, \frac{\pi}{2}) = K(k) = K$ และเรียกกรณีพิเศษนี้ว่า **ปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์** (complete elliptic integral) ชนิดที่หนึ่ง

2. **ปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลอจองค์ชนิดที่สอง** (The Legendre's elliptic integral of the second kind) คือปริพันธ์ที่เขียนได้ในรูป

$$E(k, \phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}\, d\theta \qquad 0 \leq k^2 < 1$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับกรณี ϕ ทั่วไป เราจะกล่าวว่า $E(k, \phi)$ เป็นปริพันธ์เชิงวงรีไม่บริบูรณ์ชนิดที่สอง และในกรณีที่ $\phi = \pi/2$ จะเขียน $E(k, \frac{\pi}{2}) = E(k) = E$ และเรียกกรณีพิเศษนี้ว่าปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์ชนิดที่สอง

3. **ปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลอจองค์ชนิดที่สาม** (The Legendre's elliptic integral of the third kind) คือปริพันธ์ที่เขียนได้ในรูป

$$\pi(k, n, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{(1 + n \sin^2 \theta)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \qquad 0 \leq k^2 < 1$$

โดยที่ n เป็นจำนวนจริงซึ่ง $n \neq 0$

สำหรับกรณี ϕ ทั่วไป เราจะกล่าวว่า $\pi(k, n, \phi)$ เป็นปริพันธ์เชิงวงรีไม่บริบูรณ์ชนิดที่สาม และในกรณีที่ $\phi = \pi/2$ จะเขียน $E(k, n, \frac{\pi}{2}) = \pi(k, n)$ และเรียกกรณีพิเศษนี้ว่าปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์ชนิดที่สาม

ในการคำนวณค่าปริพันธ์เชิงวงรี เราจะใช้การคำนวณค่าซึ่งคำนวณได้โดยใช้การกระจายอนุกรมเทเลอร์ในการกระจายพจน์

$$(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}\frac{3}{4}k^2 \sin^4 \theta + ...$$

นั่นคือ

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi/2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}k^{2n}\sin^{2n}\theta\,d\theta$$

โดยใช้สูตรของ Wallis ทำให้ได้ว่า

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3...(2n-1)}{2\cdot 4...2n}\right)^2 k^{2n}$$

ตัวอย่าง 3.5.1. จงหาค่าของปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^4-1}$ ในรูปปริพันธ์เชิงวงรี

วิธีทำ. ให้ $x = \frac{1}{t}$ ดังนั้นปริพันธ์ $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^4-1}$ สามารถเขียนได้ในรูป $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
สมมติว่า $t = \sin\phi$ จะได้ว่า $dt = \cos\phi\,d\phi$ ซึ่ง

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos\phi\,d\phi}{\sqrt{1-\sin^4\theta}} = \int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{2-\cos^2\theta}}$$

ให้ $\phi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ จะได้ปริพันธ์เชิงวงรีแบบบริบูรณ์ชนิดที่หนึ่ง นั่นคือ

$$I = \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}}K(\frac{1}{2})$$

สำหรับค่าของ $K(\frac{1}{2})$ สามารถคำนวณได้จากตารางปริพันธ์เชิงวงรี หรือคำนวณได้โดยใช้ซอฟท์แวร์ทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่าง 3.5.2. จงหาความยาวส่วนโค้ง $y = \sin x$ สำหรับ $0 \le x \le \pi$

วิธีทำ. จากสูตรความยาวส่วนโค้ง (3.5.1) จะได้ว่า $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ และความยาวส่วนโค้งคือ

$$L = \int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx = 2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$$

ซึ่งจะได้ปริพันธ์ดังกล่าวในรูปปริพันธ์เชิงวงรีชนิดที่สองเป็น

$$L = 2\int_0^{\pi/2}\sqrt{2-\sin^2 x}\,dx = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx = 2\sqrt{2}E(\frac{1}{\sqrt{2}})$$

โดยค่าของ $E(\frac{1}{\sqrt{2}})$ สามารถคำนวณได้จากตารางปริพันธ์เชิงวงรี หรือคำนวณได้โดยใช้ซอฟท์แวร์ทางคณิตศาสตร์

3.5.2 ปริพันธ์เชิงวงรีแบบจาโคบี

จะเห็นว่า สำหรับปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลอจองค์ สามารถเขียนได้ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งอาจยังไม่สะดวกในการใช้งาน โดยอาศัยการแปลงให้ $v = \sin\theta, x = \sin\phi$ จะทำให้ได้ปริพันธ์เชิงวงรีแบบจาโคบีได้ ดังนี้

1. **ปริพันธ์เชิงวงรีแบบจาโคบีชนิดที่หนึ่ง** (The Jacobi's elliptic integral of the first kind) คือปริพันธ์ที่เขียนได้ในรูป

$$F_J(k,x) = \int_0^x \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2}} \qquad 0 \le k^2 < 1, 0 \le \sin\phi \le 1$$

เมื่อ $\phi = \pi/2$ จะได้ปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์แบบจาโคบี นั่นคือ $x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ ได้ว่า

$$F_J(k,1) = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2}} \qquad 0 \le k^2 < 1, 0 \le \sin\phi \le 1$$

2. **ปริพันธ์เชิงวงรีแบบจาโคบีชนิดที่สอง** (The Jacobi's elliptic integral of the second kind) คือปริพันธ์ที่เขียนได้ในรูป

$$E_J(k,\phi) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2v^2}{1-v^2}}\, d\theta \qquad 0 \le k^2 < 1$$

โดยปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์แบบจาโคบีชนิดที่สอง ให้ $\phi = \pi/2$ จะได้ $x = 1$ ซึ่งพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน

3. **ปริพันธ์เชิงวงรีแบบจาโคบีชนิดที่สาม** (The Jacobi's elliptic integral of the third kind) คือปริพันธ์ที่เขียนได้ในรูป

$$\pi_J(k,n,x) = \int_0^x \frac{1}{(1+nv^2)\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}\, dv \qquad 0 \le k^2 < 1$$

โดยที่ n เป็นจำนวนจริงซึ่ง $n \neq 0$

และเมื่อ $x = 1$ ก็จะได้ปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์แบบจาโคบีชนิดที่สาม

สมมติให้ $R(x,y)$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะในพจน์ของ x,y เราสามารถแปลงฟังก์ชันดังกล่าวให้อยู่ในรูปฟังก์ชันอย่างง่าย (elementary function) เมื่อ y เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งอยู่ในรูปของรากที่สองของฟังก์ชันพหุนามของตัวแปร x กล่าวคือ ปริพันธ์เชิงวงรีคือปริพันธ์ใด ๆ ที่สามารถเขียนได้ในรูป

$$f(x) = \int \frac{A(x)+B(x)}{C(x)+D(x)\sqrt{S(x)}}\, dx$$

โดยที่ $A(x), B(x), C(x)$ และ $D(x)$ เป็นพหุนามในพจน์ของ x และ $S(x)$ เป็นพหุนามดีกรีสามหรือสี่ ซึ่งปริพันธ์เชิงวงรีสามารถพิจารณาได้ในรูปการวางนัยทั่วไปของฟังก์ชันผกผันตรีโกณมิติ

จากปริพันธ์เชิงวงรีชนิดที่หนึ่ง ทั้งแบบเลอจองค์และจาโคบี เราสามารถนิยามฟังก์ชันเชิงวงรีแบบจาโคบี (Jacobian elliptic function) ได้ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3.5.1. ให้ u เป็นปริพันธ์เชิงวงรีชนิดที่หนึ่ง และ ϕ, x นิยามตาม (3.5.2) ฟังก์ชันเชิงวงรีแบบจาโคบี $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn}$ นิยามโดย

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn} u &= \sin\phi = x \\
\operatorname{cn} u &= \cos\phi = \sqrt{1-x^2} \\
\operatorname{dn} u &= \sqrt{k^2\sin^2\phi} = \sqrt{1-k^2x^2}
\end{aligned}$$

จากนิยามดังกล่าว ทำให้เราได้ผลที่ตามมาที่คล้ายกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ เช่น เอกลักษณ์ $\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1$ และสามารถนิยามฟังก์ชันเพิ่มเติม เช่น $\operatorname{tn} u = \dfrac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$ และได้สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันเชิงวงรี เช่น

1. $\dfrac{d}{du}(\operatorname{sn} u) = (\operatorname{cn} u)(\operatorname{dn} u)$

2. $\dfrac{d}{du}(\operatorname{cn} u) = -(\operatorname{sn} u)(\operatorname{dn} u)$

3. $\dfrac{d}{du}(\operatorname{dn} u) = -k^2(\operatorname{sn} u)(\operatorname{dn} u)$

4. $\dfrac{d}{du}(\operatorname{tn} u) = \dfrac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u}$

ตัวอย่าง 3.5.3. จงหาค่าของปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)(9-x^2)}}\,dx$ ในรูปปริพันธ์เชิงวงรี

วิธีทำ. เพื่อให้สามารถคำนวณค่าได้สะดวก เราจะจัดรูปปริพันธ์ให้อยู่ในรูปปริพันธ์เชิงวงรีแบบเลอจองด์ โดยใช้การแทนค่าแบบตรีโกณมิติ

ให้ $x = 2\sin\theta$ จะได้ว่า $dx = 2\cos\theta\,d\theta$ จะได้ว่า สำหรับขอบเขต เมื่อ $x = 0$ จะได้ $\theta = 0$ และเมื่อ $x = 2$ จะได้ $\theta = \frac{\pi}{2}$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)(9-x^2)}}\,dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos\theta}{\sqrt{(4-4\sin^2\theta)(9-4\sin^2\theta)}}\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{(9-4\sin^2\theta)}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{4}{9}\sin^2\theta)}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}K(\frac{2}{3})
\end{aligned}$$

สำหรับค่าของ $K(\frac{2}{3})$ สามารถคำนวณได้จากตารางปริพันธ์เชิงวงรี หรือคำนวณได้โดยใช้ซอฟท์แวร์ทางคณิตศาสตร์

หมายเหตุ. การคำนวณค่าปริพันธ์เชิงวงรี สามารถคำนวณได้จากเว็บไซต์ Wolfram Alpha (http:// www.wolframalpha.com) หรือ ซอฟท์แวร์ คณิตศาสตร์ Wolfram Mathematica® โดยใช้คำสั่งต่อไปนี้

ฟังก์ชัน	คำสั่งใน WolframAlpha
ปริพันธ์เชิงวงรีไม่บริบูรณ์ชนิดที่หนึ่ง $F(m,\phi)$ แอมพลิจูด ϕ และโมดูลัส $m=k^2$	`EllipticF[`ϕ`, m]`
ปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์ชนิดที่หนึ่ง $K(m)$	`EllipticK[m]`
ปริพันธ์เชิงวงรีไม่บริบูรณ์ชนิดที่หนึ่ง $E(m,\phi)$ แอมพลิจูด ϕ และโมดูลัส $m=k^2$	`EllipticE[`ϕ`, m]`
ปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์ชนิดที่สอง $E(m)$	`EllipticK[m]`
ปริพันธ์เชิงวงรีไม่บริบูรณ์ชนิดที่สาม $\pi(m,n,\phi)$ แอมพลิจูด ϕ และโมดูลัส $m=k^2$	`EllipticPi[n, `ϕ`, m]`
ปริพันธ์เชิงวงรีบริบูรณ์ชนิดที่สาม $\pi(m,n)$	`EllipticPi[n, m]`

แบบฝึกหัดที่ 3.5

1. จงคำนวณค่าของปริพันธ์เชิงวงรีต่อไปนี้

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{15}\sin^2 x}}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(2-x^2)}}\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\,dx$

2. โดยใช้ความสัมพันธ์ $\sqrt{\cos x} = \cos\phi$ จงแสดงว่า

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}\,dx = \sqrt{2}K(\frac{1}{\sqrt{2}})$$

3. โดยใช้ความสัมพันธ์ $\sin^2\theta = \dfrac{1}{k^2}(1-k^2\sin^2\theta)$ จงแสดงว่า

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{1}{k^2}(K-E)$$

4. จงหาความยาวของเส้นรอบวงรีที่กำหนดดังสมการ $4x^2+9y^2=36$ โดยตอบในรูปของปริพันธ์เชิงวงรี

5. จงหาความยาวของส่วนโค้งที่เป็นส่วนหนึ่งของวงรีที่กำหนดโดย $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ โดยเส้นโค้งอยู่ระหว่างจุด $(0,2)$ และ $(1/2,\sqrt{3})$ (ตอบในรูปของปริพันธ์เชิงวงรี)

6. หากสังเกตปริพันธ์เชิงวงรี จะพบว่า ปริพันธ์เชิงวงรีก็เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง จงใช้วิธีการตรวจสอบที่ได้ศึกษามาแล้วแสดงว่า ปริพันธ์ต่อไปนี้ลู่เข้า

   (a) $\displaystyle E = \int_0^{a} \frac{\sqrt{a^2-k^2x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$ เมื่อ $0<k<1$

   (b) $\displaystyle F = \int_0^{b} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ เมื่อ $b>1/k$

3.6 ปริพันธ์หลายชั้นไม่ตรงแบบ

ในการคำนวณปริพันธ์หลายชั้นในแคลคูลัสพื้นฐาน เราคำนวณค่าของปริพันธ์หลายชั้นบนบริเวณปิดและมีขอบเขต ดังนั้น หากเราขยายนิยามของปริพันธ์ไม่จำกัดเขตสู่ปริพันธ์หลายชั้น เราก็จะสามารถพิจารณานิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ ได้ในทำนองคล้ายกัน

ในที่นี้เราจะเริ่มต้นพิจารณาจากตัวอย่างจากปัญหาการหาปริพันธ์สองชั้นในกรณีที่บริเวณของการหาปริพันธ์เป็นบริเวณที่ไม่มีขอบเขต ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.6.1. จงหาค่าของปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$

วิธีทำ. จากปริพันธ์ที่กำหนดให้ เราทำการหาค่าปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณซึ่งอยู่ในจตุภาคที่หนึ่ง ทั้งนี้ วิธีหนึ่งที่จะช่วยในการแก้ปัญหาดังกล่าวนี้คือ การเปลี่ยนระบบพิกัดจากระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว (เราได้กล่าวในหัวข้อ 1.9) โดยสมมติให้ $x = r\cos\phi$ และ $y = r\sin\phi$ จะได้ว่า

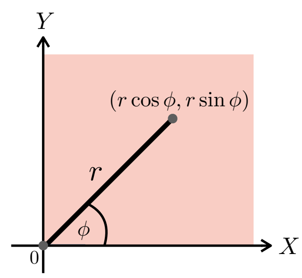
$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr\,d\phi$$

ทำให้ได้ว่า เราเขียนปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปลิมิตได้ กล่าวคือ

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr\,d\phi = \lim_{M\to\infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^M e^{-r^2} r\,dr\,d\phi$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{M\to\infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^M e^{-r^2} r\,dr\,d\phi &= \lim_{M\to\infty} \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2}e^{-M^2} + \frac{1}{2}\right) d\phi \\ &= \lim_{M\to\infty} \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-M^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$



ภาพที่ 3.4. บริเวณในการหาปริพันธ์ในตัวอย่าง

ซึ่งเราสามารถนำผลที่ได้ดังกล่าวไปประยุกต์กับการหาปริพันธ์ต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.6.2. จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

วิธีทำ. สมมติให้ $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ จากการเขียนปริพันธ์ดังกล่าวในรูปตัวแปรหุ่นได้ จะทำให้ได้ว่า $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$ ด้วย ดังนั้น

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy\right) \\ &= \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

เนื่องจากเราทราบว่า $I^2 = \dfrac{\pi}{4}$ จากตัวอย่าง 3.6.1 จึงได้ว่า $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ ตามต้องการ

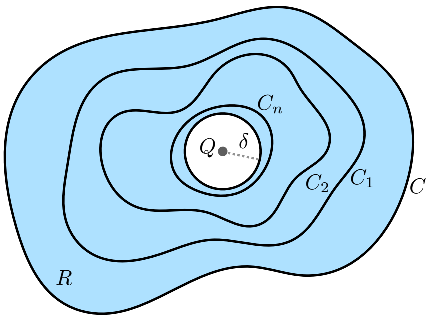
ต่อไปเราจะพิจารณานิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ในกรณีที่ขอบเขตเป็นขอบเขตปิดที่มีขอบเขต แต่มีจุดในบริเวณจำกัดที่ทำให้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์

สมมติว่า $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรซึ่งต่อเนื่องทุก ๆ ในบริเวณ R ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งปิด C ยกเว้นที่จุด $Q(x_0,y_0)$ ซึ่งทำให้ f ไม่มีขอบเขต สัญลักษณ์

$$\int_R f(x,y)\,dS$$

โดยที่ dS คือส่วนของพื้นที่ในบริเวณ R จะเรียกว่า ปริพันธ์สองชั้นไม่ตรงแบบ (improper double integral)

ให้ $C_1, C_2, ..., C_n, ...$ เป็นลำดับอนันต์ของเส้นโค้งในบริเวณ R ซึ่งแต่ละเส้นโค้งปิดล้อมจุด $Q(x_0,y_0)$ และแต่ละเส้นโค้งซ้อนในซึ่งกันและกัน ดังภาพ 3.5



ภาพที่ 3.5. ลำดับของเส้นโค้ง $C_1, C_2, ..., C_n, ...$ ซึ่งเป็นบริเวณของการหาปริพันธ์ยกเว้นที่จุด Q

ให้ R_n เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วย C_n ซึ่ง $R_n \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ นิยามบริเวณปิดซึ่งอยู่ด้านนอกของ C_n และบริเวณภายในของ C โดย $R - R_n$ เมื่อ $n = 1, 2, ...$

ดังนั้น ฟังก์ชัน $f(x,y)$ มีความต่อเนื่องบนบริเวณ $R-R_n$ และปริพันธ์ $\displaystyle\int_{R-R_n} f(x,y)\,dS$ มีค่าสำหรับทุก n

เพราะฉะนั้น หากลิมิต

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R-R_n} f(x,y)\,dS$$

มีค่าสำหรับการเลือก R_n ใด ๆ แล้ว จะกล่าวว่า ปริพันธ์ $\displaystyle\int_R f(x,y)\,dS$ ลู่เข้า กล่าวคือ

> . สำหรับทุก $\epsilon > 0$ มีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้
>
> $$\left|\int_{R'} f(x,y)\,dS\right| < \epsilon$$
>
> สำหรับทุกบริเวณย่อย R' ของ R ซึ่งไม่บรรจุย่านจุดเปิดจุด Q ซึ่งรัศมี δ

ทั้งนี้ วิธีการตรวจสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบดังกล่าว สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก [12] และ [9]

แบบฝึกหัดที่ 3.6

1. จงคำนวณค่าของปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx$
2. จงคำนวณค่าของปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^3\int_0^\infty \frac{y}{x^2+4}\,dx\,dy$
3. จงคำนวณค่าของปริพันธ์ $\displaystyle\int_{4/3}^\infty\int_3^\infty \frac{1}{(xy-2)^2}\,dx\,dy$
4. จงคำนวณค่าของปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^3\int_0^\infty \frac{y}{x^2+4}\,dx\,dy$
5. จงคำนวณค่าของปริพันธ์ $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{1+x+y}\,dA$ เมื่อ D คือบริเวณที่กำหนดโดย $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x<\infty, 0<y<1\}$
6. จงคำนวณค่าของปริพันธ์ $\displaystyle\int\int_D 1+\sin x\cos y\,dA$ เมื่อ D เป็นบริเวณในจตุภาคที่หนึ่ง

บรรณานุกรม

[1] ทรงเกียรติ สุเมธกิจการ (2556). แคลคูลัส: ผลบวกอนันต์. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

[2] สมศักดิ์ ลิ้มศิริลักษณ์. (2538). คณิตศาสตร์ขั้นสูง 1. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

[3] สมศักดิ์ ลิ้มศิริลักษณ์. (2538). คณิตศาสตร์ขั้นสูง 2. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

[4] อติชาต เกตตะพันธุ์. (2559). แคลคูลัสขั้นสูง. พิมพ์ครั้งที่ 6. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

[5] Amazigo, J. C., & Rubenfeld, L. A. (1980). Advanced Calculus and Its Applications to the Engineering and Physical Sciences. John Wiley & Sons Inc.

[6] Anton, H., Bivens, I., Davis, S., & Polaski, T. (2013). Calculus: early transcendentals. 10th edition. Singapore: Wiley.

[7] Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). Introduction to Real Analysis. 4th edition, NJ: Wiley.

[8] Buck, R. C., & Buck, E. F. (1956). Advanced calculus. Tata McGraw-Hill Education.

[9] Kaplan, W. (1991). Advanced Calculus. 4th edition. Addison-Wesley

[10] Malik, S. C. (1984). Mathematical Analysis. India: Uravashi Press.

[11] Shifrin, T. (2005). Multivariable mathematics: linear algebra, multivariable calculus, and manifolds. John Wiley & Sons Inc.

[12] Sokolnikoff, I. S. (1939). Advanced Calculus. New York: McGraw-Hill.

[13] Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., & Giordano, F. R. (2014). Thomas' calculus. 13th edition. Singapore: Addison-Wesley.

[14] Wade, W. R. (2014). Introduction to Analysis. 4th edition. Pearson Education.

[15] Wrede, R. C., & Spiegel, M. R. (2010). Schaum's Outline of Advanced Calculus. 3rd edition. McGraw Hill Professional.

[16] Culham, J. R. Elliptic Integrals, Elliptic Functions and Theta Functions. Retrieved from http://www.mhtlab.uwaterloo.ca/courses/me755/web_chap3.pdf

[17] Conrad, K. (2018). Differentiating under the integral sign. Retrieved from https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/diffunderint.pdf

[18] Hall, L. M. (1995). Special Functions: Elliptic Integrals and Elliptic Functions. Retrieved from http://web.mst.edu/ lmhall/SPFNS/sfch3.pdf

[19] Wheeler, J. P. . Assigning Value to the Valueless... The Cauchy Principle Method and Related Ideas in Divergent Series. Retrieved from http://www.pitt.edu/ jwheeler/Principal%20Values.pdf

ภาพปก

Tokyo Gate Bridge ถ่ายโดยผู้เขียนในวันที่ 24 มกราคม พ.ศ.2559
ขณะที่ผู้เขียนกำลังศึกษาระดับปริญญาเอกที่ประเทศญี่ปุ่น
ในวันที่อากาศหนาวที่สุดในรอบ 40 ปี

Tokyo Gate Bridge เป็นสะพานที่เชื่อมระหว่างเกาะในย่านโอไดบะ
ซึ่งเป็นย่านที่ผู้เขียนชอบมากที่สุดในโตเกียว ผู้เขียนเลือกภาพนี้เป็นภาพปก
เนื่องจากกระบวนวิชาแคลคูลัสขั้นสูง เปรียบเสมือนสะพานและประตูเชื่อม
ระหว่างการเรียนคณิตศาสตร์ระดับพื้นฐานและคณิตศาสตร์ขั้นสูง