ทบทวน f มีความต่อเนื่องที่ $x = c$ ถ้า f สอดคล้องกับ

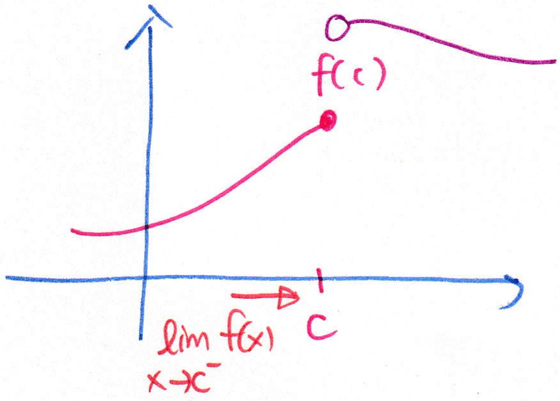
(1) $f(c)$ หาค่าได้ (exist)

(2) $\lim_{x \to c} f(x)$ มีค่า

(3) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

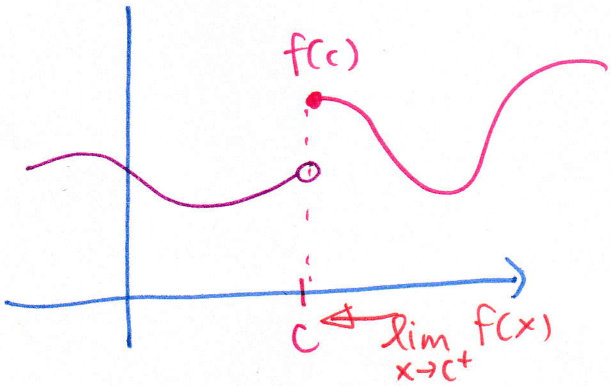
- f มีความต่อเนื่องทางซ้าย (left) ที่ $x = c$ ถ้า

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$



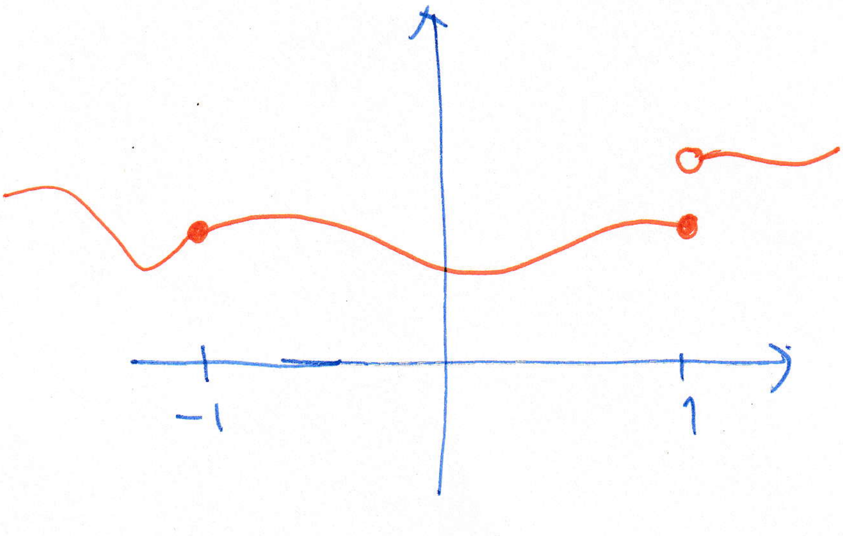
- f มีความต่อเนื่องทางขวา (right) ที่ $x = c$ ถ้า

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$$



Ex $f(x) = \sqrt{x}$; $D_f = [0, \infty)$

(Daily Dose P.7 8.2)



Continuity in Applications

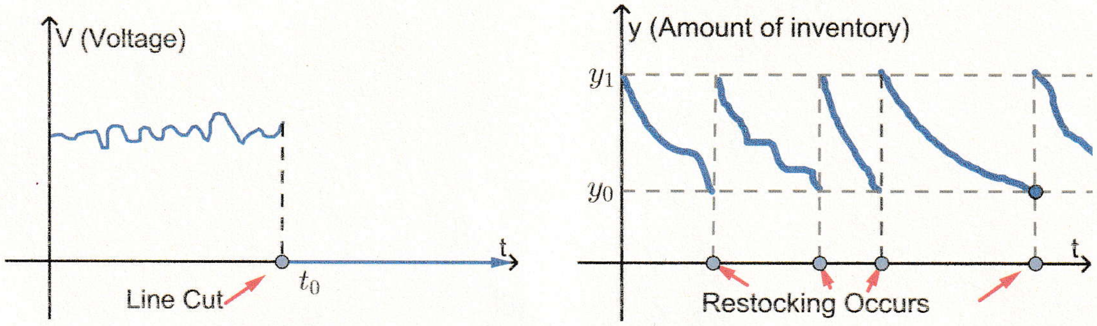
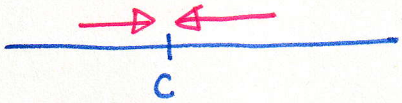


Figure 1.10: Examples of discontinuity

1.3.1 Continuity on an Interval

We say a function f is *continuous from the left* at c if

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$$

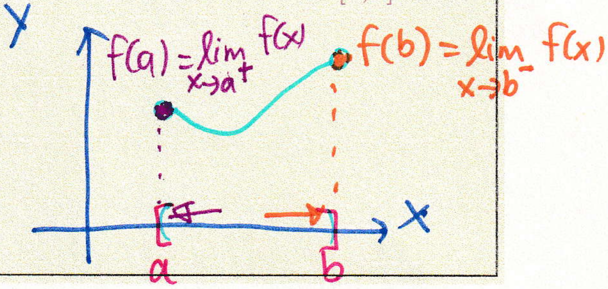


and is *continuous from the right* at c if

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c).$$

DEFINITION A function f is said to be *continuous on a closed interval* $[a, b]$ if the following conditions are satisfied:

1. f is continuous on (a, b).
2. f is continuous from the right at a.
3. f is continuous from the left at b.



Example 1.16 Explain the continuity of the function $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ on the interval $[-3, 3]$

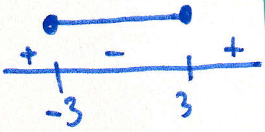
Solution.

$f(x) = \sqrt{9-x^2}$

$9 - x^2 \geq 0$

$x^2 - 9 \leq 0$

$(x-3)(x+3) \leq 0$

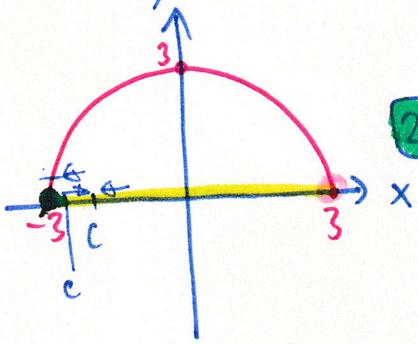


$D_f = [-3, 3]$

$y = \sqrt{9-x^2}$; $y \geq 0$

$y^2 = 9 - x^2$

$x^2 + y^2 = 9$; $y \geq 0$



$\boxed{1}$ f cont. บน $(-3, 3)$

ให้ $c \in (-3,3)$: f cont ที่ $x = c$ สำหรับทุก $c \in (-3,3)$

(1) $f(c) = \sqrt{9-c^2}$

(2) $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-c^2}$

$\therefore \lim_{x\to c} f(x) = f(c) \quad \forall c \in (-3,3)$

$\boxed{2}$ ดูความต่อเนื่องด้านขวาของ $f(x)$ ที่ $x = -3$

(1) $f(-3) = 0$

(2) $\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \sqrt{9-x^2} = 0$

(3) $f(-3) = \lim_{x\to -3} f(x)$

$\therefore$ f cont จากขวาที่ $x = -3$

$\boxed{3}$ ดูความต่อเนื่องด้านซ้ายที่ $x=3$

(1) $f(3) = 0$

(2) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{9-x^2} = 0$ (3) $f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x)$ $\therefore$ f cont ด้านซ้ายที่ $x=3$

$\therefore$ f cont บน $[-3, 3]$

Thm 1.6 (a) ฟังก์ชันพหุนามต่อเนื่องทุกๆ จุด ใน $\mathbb{R}$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

พิสูจน์ ให้ $c \in \mathbb{R}$ จะแสดงว่า $p(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = c$

(1) $p(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0$

(2) $\lim\limits_{x \to c} p(x) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0$

(3) $p(c) = \lim\limits_{x \to c} p(x)$ #

$\therefore$ ฟังก์ชันพหุนามต่อเนื่องทุกๆ จุดใน $\mathbb{R}$.

(b) ฟังก์ชันตรรกยะ: $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$; $p(x)$ เป็นพหุนาม, $q(x)$ เป็นพหุนาม

ต่อเนื่องทุกจุดยกเว้นจุดที่ทำให้ $q(x) = 0$

และ $x = a$ ที่ทำให้ $q(a) = 0$ จะเป็นเส้นกำกับแนวยืน (vertical asymptote).

Some Properties of Continuous Functions

THEOREM 1.5 If the functions f and g are continuous at c, then

(a) $f + g$ is continuous at c.

(b) $f - g$ is continuous at c.

(c) fg is continuous at c.

(d) f/g is continuous at c if $g(c) \neq 0$ and has a discontinuity at c if $g(c) = 0$.

Continuity of Polynomials and Rational Functions

THEOREM 1.6

(a) A polynomial is continuous everywhere.

(b) A rational function is continuous at every point where the denominator is nonzero, and has discontinuities at the points where the denominator is zero.

Example 1.17 For what values of x is there a discontinuity in the graph of

$$y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}? \qquad D_f = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

Solution.

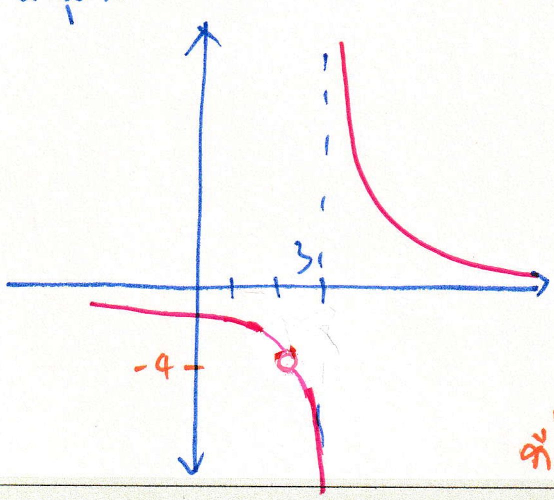
$$y = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x-2)} \Rightarrow \boxed{y = \frac{x+2}{x-3}\ ;\ x \neq 2}$$

หาจุดที่ทำให้ฟังก์ชัน ไม่ต่อเนื่อง : หา x ที่ทำให้ $(x^2-5x+6) = 0$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$x = 2, 3$$

$\therefore f$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2, 3$.



$x = 3$ เกิดเป็นเส้นกำกับแนวยืน

$\left(\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty,\ \lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \right)$

ที่ $x = 2$ ไม่ต่อเนื่องเพราะ $\lim_{x \to 2} f(x)$ มีแต่ $f(2)$ ไม่นิยาม

NOTE: Exponential, Logarithm, Trigonometric and Inverse trigonometric functions are continuous on *their domains* .

Example 1.18 Show that $f(x) = |x|$ is continuous everywhere.

Solution. $f(x) = |x| = \begin{cases} x \ ; & x > 0 \\ 0 \ ; & x = 0 \\ -x \ ; & x < 0 \end{cases}$

① บน $(0,\infty)$ $f(x) = x$ cont (เป็นฟังก์ชันพหุนาม)

② บน $(-\infty,0)$ $f(x) = -x$ cont (เป็นฟังก์ชันพหุนาม)

③ พิจารณา ที่ $x=0$

(1) $f(0) = 0$

(2) $\lim_{x\to 0} f(x)$ $\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} -x = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} x = 0 \end{cases}$ $\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

(3) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ $\therefore f$ cont ที่ $x = 0$

$\therefore f$ ต่อเนื่องทุกๆ จุดใน $\mathbb{R}$.

1.3.2 Continuity of Compositions

"ลิมิตมีอำนาจทะลุทะลวงไปกับฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่อง"

THEOREM 1.7 If $\lim_{x\to c} g(x) = L$ and if the function f is continuous at L, then $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L)$. That is,

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(\lim_{x\to c} g(x))$$

Example 1.19 Given that $\lim_{x\to 2} x^2 - 9 = -5$ find, $\lim_{x\to 2} |x^2 - 9|$.

Solution. (1) $\lim_{x\to 2} x^2 - 9 = -5$

(2) ฟังก์ชัน $f(x) = |x|$ cont ที่ $\boxed{x = -5}$

$\therefore \lim_{x\to 2} |x^2 - 9| = \left|\lim_{x\to 2} x^2 - 9\right| = |-5| = 5$

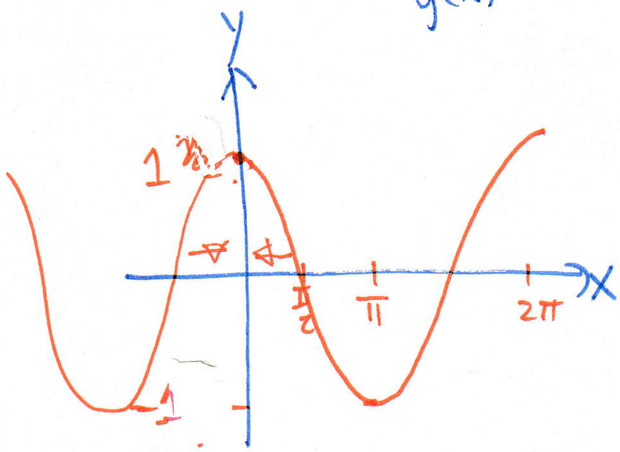
THEOREM 1.8

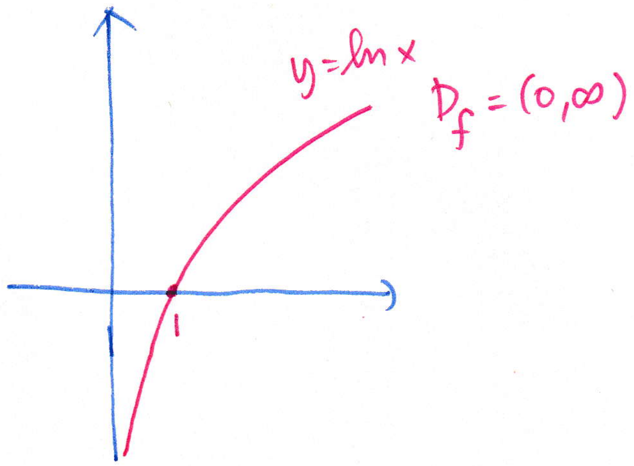
(a) If the function g is continuous at c, and the function f is continuous at $g(c)$, then the composition $f \circ g$ is continuous at c.

(b) If the function g is continuous everywhere, and the function f is continuous everywhere, then the composition $f \circ g$ is continuous everywhere.

Ex หา $\lim_{x \to 0} \ln(\cos x)$

Sol^n ให้ $f(x) = \ln x$, $g(x) = \cos x$ } มีความต่อเนื่องบนโดเมนของฟังก์ชัน





$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

$\therefore$ จาก $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ และ $f(x) = \ln x$ cont ที่ $x = 1$

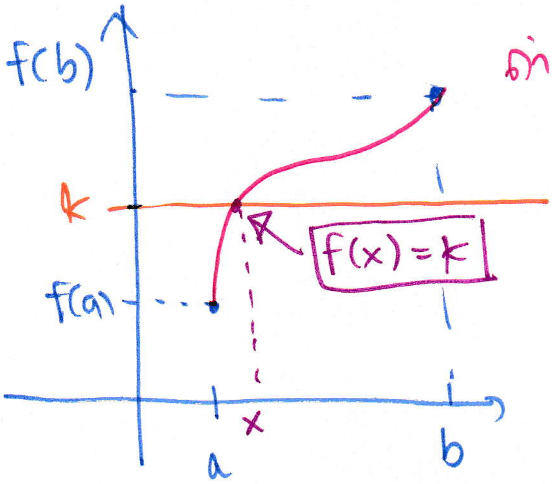
$$\therefore \lim_{x \to 0} \ln(\cos x) = \ln\left(\lim_{x \to 0} \cos x\right)$$

$$= \ln(1) = 0 \qquad \#$$

Intermediate-Value Theorem

① ถ้า f ต่อเนื่อง บน $[a,b]$

② $\exists k$ ที่ ซึ่ง $f(a) \le k \le f(b)$ / $f(b) \le k \le f(a)$



ถ้า f ต่อเนื่อง จะได้ว่า มี $x \in [a,b]$ ที่ทำให้ $f(x) = k$

1.4 Intermediate-Value Theorem [ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง]

Theorem 1.9 (Intermediate-Value Theorem) If f is continuous on a closed interval $[a, b]$ and k is any number between $f(a)$ and $f(b)$, inclusive, then there is at least one number x in the interval $[a, b]$ such that $f(x) = k$.

$f(a) \le k \le f(b)$ / $f(b) \le k \le f(a)$

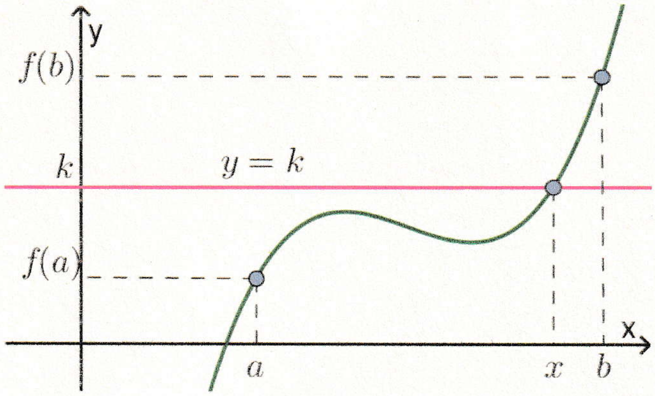


Figure 1.11: Concept of Intermediate-Value Theorem

Example 1.20 Verify that there exists at least one root of the equation $x^3 - x - 1 = 0$ in the closed interval $[1, 2]$. Then, approximate this root to two decimal-place accuracy.

Solution.

Since $f(1) = -1$ and $f(2) = 5$, we have $f(1) \le 0 \le f(2)$. Therefore the root is between 1 and 2.

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$f(x)$	-1	-0.77	-0.47	-0.1	0.34	0.88	1.5	2.21	3.03	3.96	5

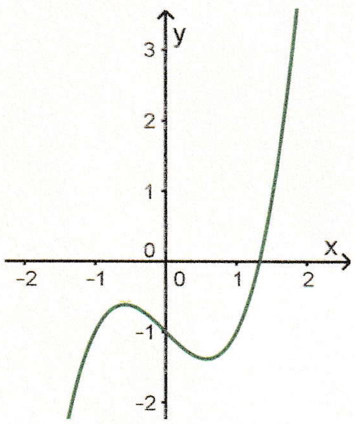


Figure 1.12: Graph of $y = x^3 - x - 1$

Since $f(1.3) < 0$ and $f(1.4) > 0$,
the root is between ______ and ______.

x	1.30	1.31	1.32	1.33	1.34	1.35
$f(x)$	-0.1	-0.06	-0.02	0.02	0.07	0.11
x	1.36	1.37	1.38	1.39	1.40	
$f(x)$	0.16	0.2	0.25	0.3	0.34	

The root of the equation $x^3 - x - 1 = 0$, that is between 1 and 2, is approximately __________.

ครั้งที่ 3: แบบทดสอบย่อย

เพื่อเช็คชื่อเข้าชั้นเรียน ประจำวันอังคารที่ 13 สิงหาคม พ.ศ.2562

ชื่อ-สกุล.. รหัสนักศึกษา............................ ลำดับที่...........

พิจารณาฟังก์ชัน g ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & , x \le 1 \\ \boxed{5x - 1 \quad , 1 < x < 2} \\ \boxed{9 \quad , x \ge 2} \end{cases}$$

1. จงแสดงว่า g มีความต่อเนื่องที่ $x = 2$
2. g ต่อเนื่องบนช่วง $[1, 2]$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

① (1) $\boxed{g(2) = 9}$

(2) $\lim_{x\to 2} g(x) \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} 9 = 9$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} 5x-1 = 9$

$\therefore \lim_{x\to 2} g(x) = 9$

(3) $\lim_{x\to 2} g(x) = g(2) \Rightarrow g$ มีความต่อเนื่องที่ $x=2$

② g ต่อเนื่องบน $[1,2]$

(1) g ต่อเนื่องบน $(1,2)$

(2) g ต่อเนื่องทางขวา ที่ $x=1$, $\rightarrow \lim_{x\to 1^+} g(x) = g(1)$

(3) g ต่อเนื่องทางซ้าย ที่ $x=2$ $\rightarrow \lim_{x\to 2^-} g(x) = g(2)$