ทบทวน

① f มีความต่อเนื่องที่ $\boxed{x = a}$ ถ้า f สอดคล้องกับสมบัติ

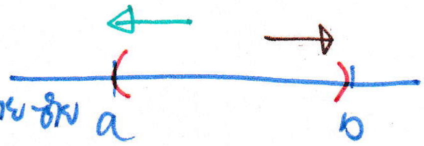
(1) $f(a)$ นิยาม

(2) $\lim_{x \to a} f(x)$ มีค่า $\left\langle \begin{array}{c} \lim_{x \to a^+} f(x) \\ \| \\ \lim_{x \to a^-} f(x) \end{array} \right.$

(3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

② ความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$: f ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ถ้า

(1) f ต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a,b)



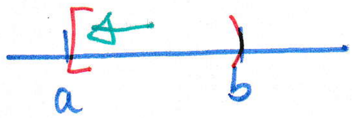
(2) f มีความต่อเนื่องทางขวาที่จุดปลายซ้าย

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

(3) f มีความต่อเนื่องทางซ้าย ที่จุดปลายขวา

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Ex f ต่อเนื่องบน $[a,b)$



① f ต่อเนื่องบน (a,b)

② f มีความต่อเนื่องทางขวาที่ $x=a$

f ต่อเนื่องบน $(a,b]$

① f ต่อเนื่องบน (a,b)

② f มีความต่อเนื่องทางซ้ายที่ $x=b$.

$$\lim_{x \to a^+} g(x) \overset{?}{=} g(1)$$

2

Derivative

2.1 Tangent Lines and Rate of Change

In this section we will see how the concept of "tangent lines to a curve" and that of "the rate at which one variable changes relative to another" are related.

Tangent Lines

DEFINITION Suppose that x_0 is in the domain of the function f. The *tangent line* to the curve $y = f(x)$ at the point $P(x_0, f(x_0))$ is the line with equation

$$y - f(x_0) = m_{tan}(x - x_0)$$

where

$$m_{tan} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2.1}$$

provided that the limit exists.

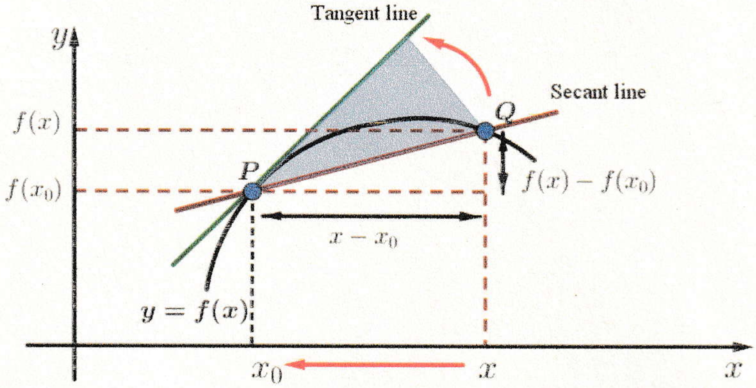
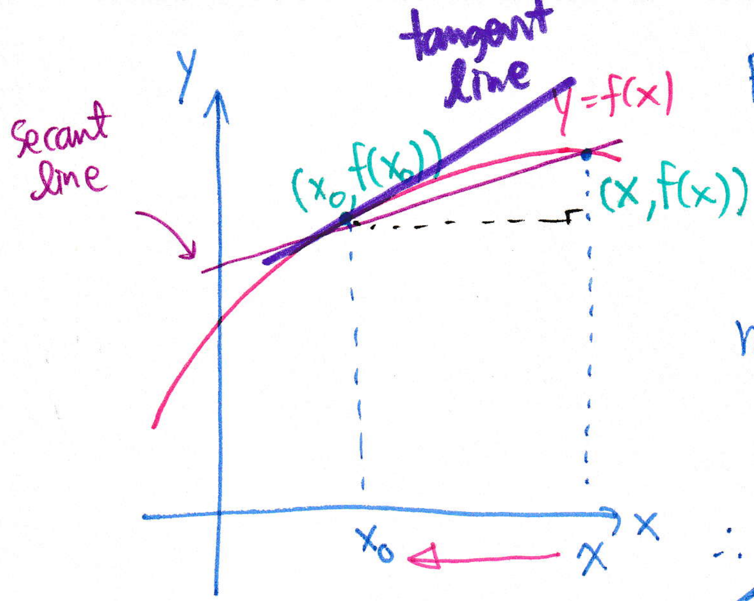


Figure 2.1: The slope of the tangent line as a limit of slopes of secant lines



Problem ต้องการหาความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $y=f(x)$ ที่ $(x_0, f(x_0))$

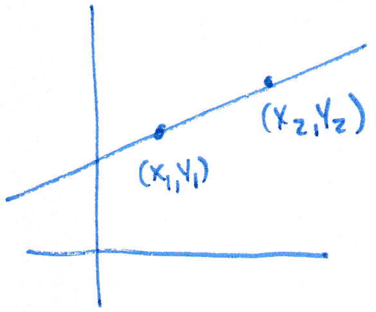
$$m_{sec} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

ถ้าลิมิตมีค่า

$$\therefore \boxed{m_{tan} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

ความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด $(x_0, f(x_0))$

$\Downarrow$

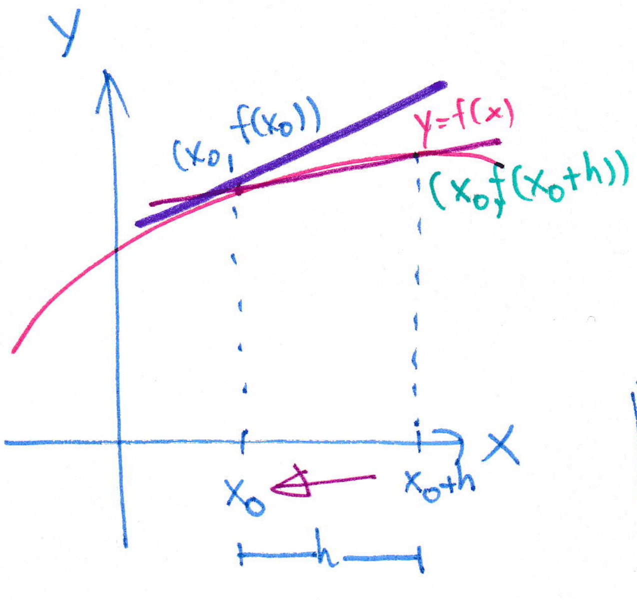


$$\text{Slope} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

หา เส้นสัมผัสกราฟที่ $(x_0, f(x_0))$

1. รู้จุดผ่าน $(x_0, f(x_0))$ / (x_0, y_0)
2. รู้ความชัน m_{tan}

สมการเส้นตรง $\boxed{y - f(x_0) = m_{tan}(x - x_0)}$



$$m_{sec} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}$$

$$m_{sec} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\boxed{m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

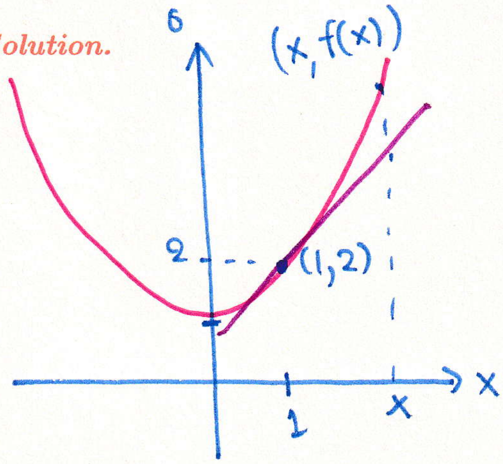
ถ้าลิมิตมีค่า

$y = ax^2$
$y - k = a(x-h)^2$

หงาย,

Example 2.1 Use Formula (2.1) to find an equation for the tangent line to the parabola $y = x^2 + 1$ at the point $P(1, 2)$, and confirm the result agrees with that obtained in Example 1.1. $y - 1 = x^2$

Solution.



① จุดผ่าน จุด $P(1,2)$

② ความชัน
$$m_{tan} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1)-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = \boxed{2}$$

$$\therefore \boxed{y - 2 = 2(x-1)}$$

If we let $h = x - x_0$, then $x \to x_0$ is equivalent to $h \to 0$ and

$$m_{tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad (2.2)$$

$y = 2x - 2 + 2$

$\therefore \boxed{y = 2x}$

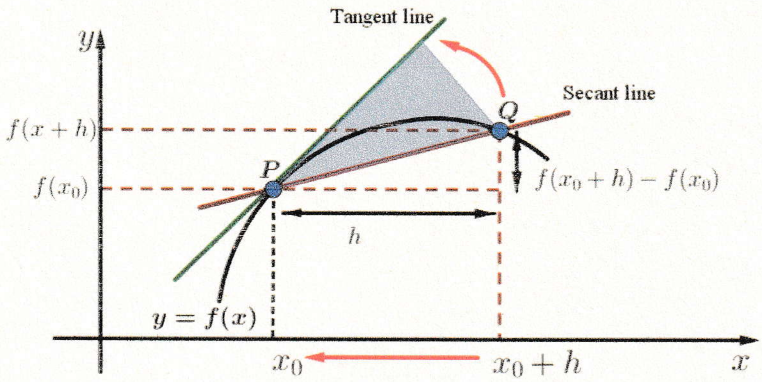


Figure 2.2: The slope of the tangent line as a limit of slopes of secant lines

$f(x) = x^2 + 1$

Example 2.2 Compute the slope in Example 2.1 using Formula (2.2).

Solution. เดิม $m_{tan} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ณ จุด $P(1,2)$

ใหม่
$$m_{tan} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{[(1+h)^2+1]-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[\cancel{1}+2h+h^2+\cancel{1}]-\cancel{2}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2+h = \boxed{2}$$

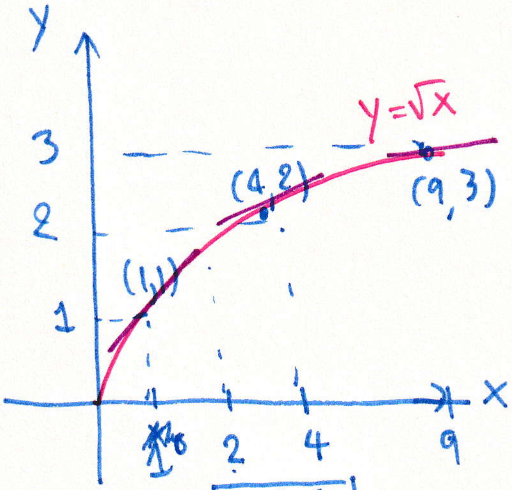
$(y^2=x)$

Example 2.3 Find the slopes of the tangent lines to the curve $y=\sqrt{x}$ at $x_0=1$, $x_0=4$, and $x_0=9$.

Solution. ความชันที่ $(x_0, f(x_0))$

$$m_{tan} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x_0+h})^2-(\sqrt{x_0})^2}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x_0}+\cancel{h}-\cancel{x_0}}{\cancel{h}(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$\boxed{\text{ความชันที่ } x_0}$



$\boxed{\text{อนุพันธ์}}$

slope ที่ $x_0=1$; $m_{tan}=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$

$x_0=4$; $m_{tan}=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$

$x_0=9$; $m_{tan}=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$

2.2 Derivative

2.2.1 Definition of Derivative

DEFINITION The function f' defined by the formula

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

is called the ***derivative of f with respect to x***. The domain of f' consists of all x in the domain of f where the limit exists.

The term "derivative" is used because the function f' is ***derived*** from the function f by a limiting process.

$(f'(x)=2x)$

Example 2.4 Find the derivative with respect to x of $f(x)=x^2$, and use it to find an equation of the tangent line to $\boxed{y=x^2 \text{ at } x=1.}$

① หาจุดสัมผัส : $(1,1)$

② หาความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $y=x^2$ ที่ $x=1$

→ $\boxed{\text{หา } y' \text{ ที่ } x=1}$ (หา $f'(1)$)

$\therefore f'(1)=2$

Solution.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}2x+h=2x$$
$$\therefore \boxed{f'(x)=2x}$$

∴ สมการเส้นสัมผัสกราฟ คือ

$$y-1=2(x-1)$$
$$y=2x-2+1$$
$$\therefore \boxed{y=2x-1}$$

$\boxed{f(x+h) = (x+h)^3 - (x+h)}$

$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

Example 2.5 Find the derivative with respect to x of $f(x) = x^3 - x$

Solution.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \cancel{-x} - h \cancel{-x^3} \cancel{+x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 - 1$$

$$\therefore \boxed{f'(x) = 3x^2 - 1}$$

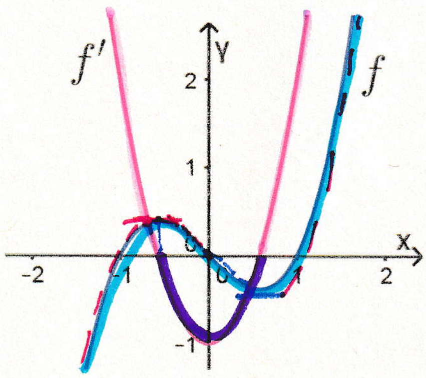
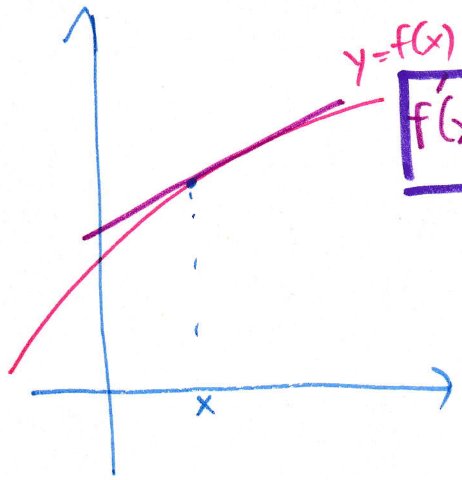


Figure 2.3: Graph of f and f' in Example 2.5

If we graph f and f' together as in Figure 2.3, we can see the relationship between them. Since $f'(x)$ is the slope of the tangent line to the graph of $y = f(x)$ at x, it follows that f' is positive, negative, and zero where the tangent line has positive slope, has negative slope, and is horizontal, respectively.



slope ของเส้นสัมผัส $y = f(x)$ ที่ x

$$\boxed{f'(x) = m_{tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

"f'(x) เรียกว่าเป็น "อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f""

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

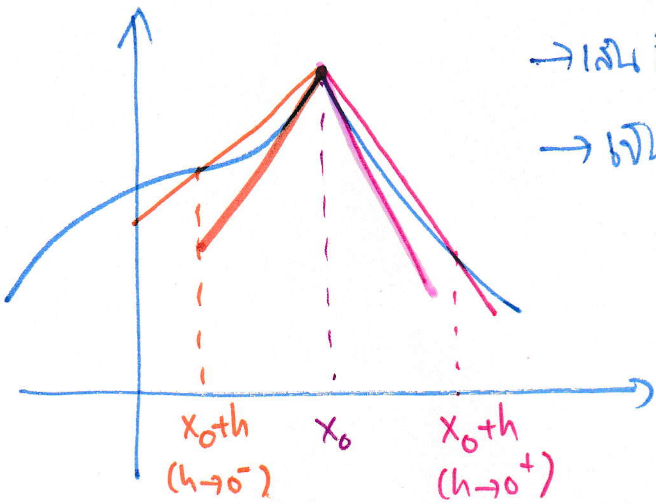
ถ้า $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ มีค่า หมายความว่า

(f หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = x_0$)

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

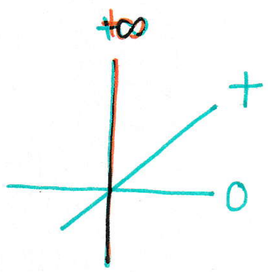
※ ลิมิตของ ความชันของเส้นตัด โค้งทั้งสองข้างต้องเท่ากัน)

① $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \neq \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

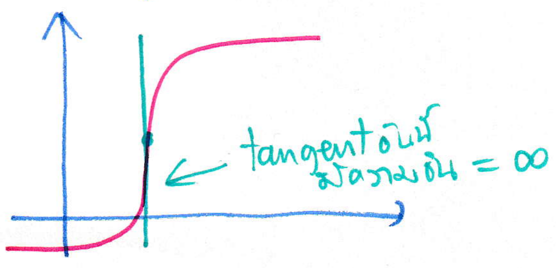


→ เส้นสัมผัสกราฟมีมากกว่า 1 เส้น

→ เป็นฟังก์ชันที่ หักงอ ที่จุด x_0



② $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$



$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

2.2.2 Differentiability

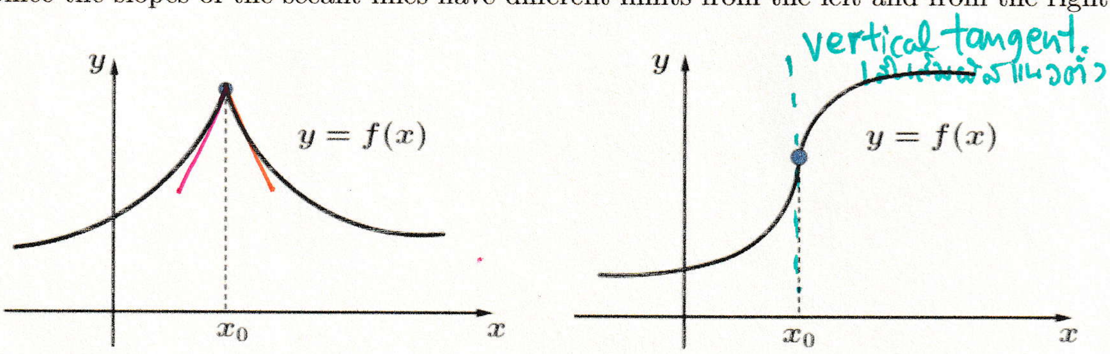
หาอนุพันธ์ได้

DEFINITION A function f is ***differentiable at*** x_0 if the limit

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

exists. If f is differentiable at each point of the open interval (a, b), then we say that it is ***differentiable on*** (a, b) , and similarly for open intervals of the form $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, and $(-\infty, +\infty)$. In the last case, we say that f is ***differentiable everywhere*** .

Figure 2.4 illustrates two common ways in which a function that is continuous at x_0 is not differentiable at x_0. Since the slopes of the secant lines have different limits from the left and from the right.



Corner point | Point of vertical tangency

Figure 2.4: Continuous at x_0 but not differentiable at x_0

Example 2.6 (a) Prove that $f(x) = |x|$ is not differentiable at $x = 0$ by considering the limit.

(b) Find a formula for $f'(x)$.

Solution.