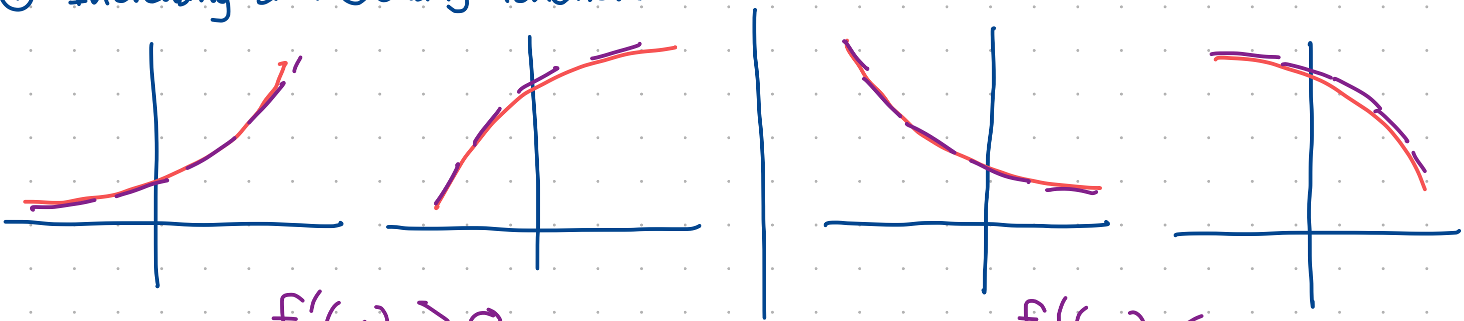
① Increasing & decreasing function.



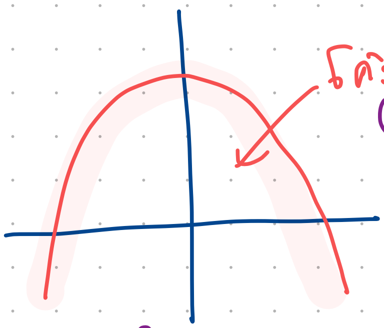
$f'(x) > 0$
$\Downarrow$
f increasing

$f'(x) < 0$
$\Downarrow$
f decreasing

② Concavity

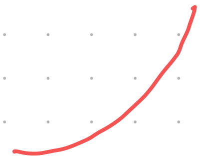
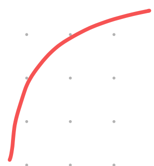
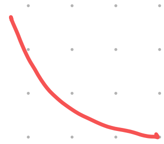
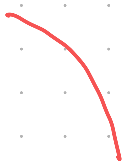
โค้งหงาย
(เว้าขึ้น)

$f''(x) > 0$



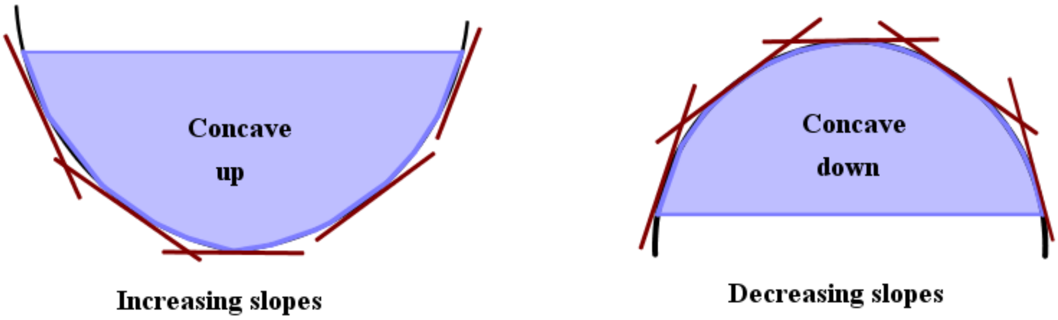
โค้งคว่ำ
(เว้าลง)

$f''(x) < 0$

	$f''(x)>0$ เว้าขึ้น	$f''(x)<0$ เว้าลง
$f'(x)>0$ ฟังก์ชันเพิ่ม		
$f'(x)<0$ ฟังก์ชันลด		

4.2 Concavity

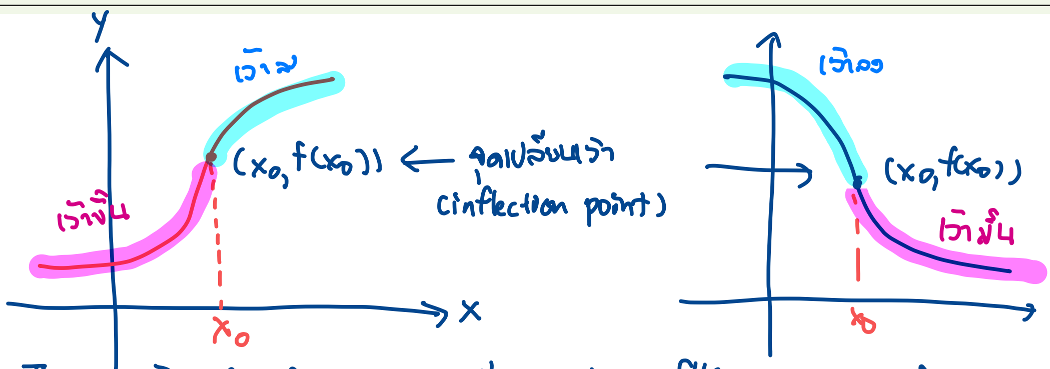
Definition If f is differentiable on an open interval, then f is said to be ***concave up*** on the open interval if $f'(x)$ is increasing on that interval, and f is said to be ***concave down*** on the open interval if $f'(x)$ is decreasing on that interval.



Theorem 4.2 Let f be twice differentiable on an open interval

1. If $f''(x) > 0$ for every value of x in the open interval, then f is concave up on that interval.
2. If $f''(x) < 0$ for every value of x in the open interval, then f is concave down on that interval.

Definition If f is continuous on an open interval containing a value x_0, and if f changes the direction of its concavity at the point $(x_0, f(x_0))$, then we say that f has an ***inflection point*** at x_0. and we call the point $(x_0, f(x_0))$ on the graph of f an inflection point of f.



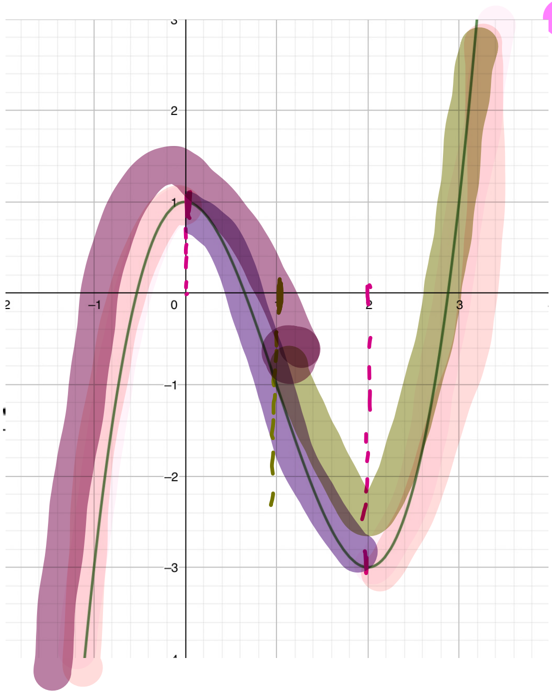
Thm ถ้า $(x_0, f(x_0))$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า แล้ว $f''(x_0) = 0$ หรือ $f''(x_0)$ หาค่าไม่ได้

Check จุดเปลี่ยนเว้า ① $f''(x)$
② หาจุดที่ทำให้ $f''(x) = 0$ หรือหาค่าไม่ได้
③ check ว่าที่จุดนั้นมีการเปลี่ยนความเว้าไหม.

Example 4.3 Use the first and second derivatives of $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ to determine where f is increasing, decreasing, concave up and concave down.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

เพิ่ม/ลด $f'(x) = 3x^2 - 6x = \boxed{3x(x-2)}$



$f'(x) > 0$

$3x(x-2) > 0$

$x(x-2) > 0$

$+ \quad 0 \quad - \quad 2 \quad +$

$\therefore$ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน

$(-\infty, 0]$, $[2, \infty)$

$f'(x) < 0$

f เป็นฟังก์ชันลดบน

$[0, 2]$.

เว้าขึ้น/ลง $f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) > 0$

$6x - 6 > 0$

$x > 1$

f เว้าขึ้นบน $(1, \infty)$

$f''(x) < 0$

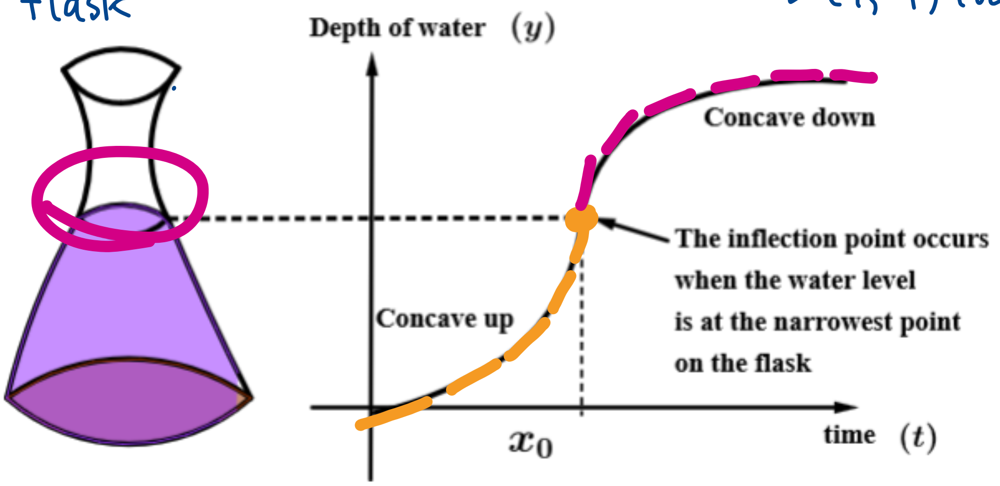
f เว้าลงบน $(-\infty, 1)$

ที่ $x = 1$ เป็นจุดซึ่ง $f''(1) = 0$ และ ที่ $x = 1$ มีการเปลี่ยนความเว้าจาก เว้าลง เป็นเว้าขึ้น

$\Rightarrow (1, -1)$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า.

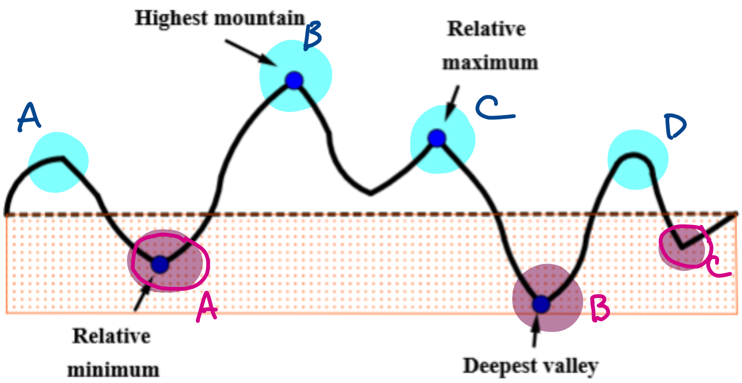
Inflection points in applications

flask

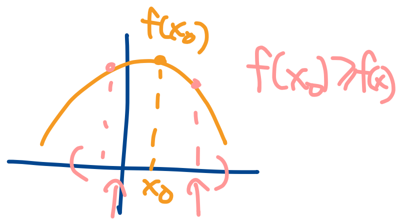


4.3 Relative Maxima and Minima

ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ → สูงสุดสัมพัทธ์, ต่ำสุดสัมพัทธ์



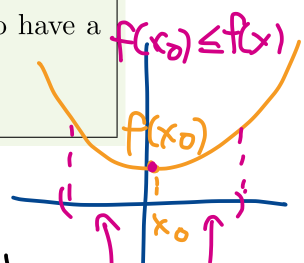
x_0 ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ $f(x_0)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์



DEFINITION A function f is said to have a ***relative maximum*** (ค่าสูงสุดสัมพัทธ์) at x_0 if there is an open interval containing x_0 on which $f(x_0)$ is the largest value, that is, $\boxed{f(x_0) \geq f(x)}$ for all x in the interval.

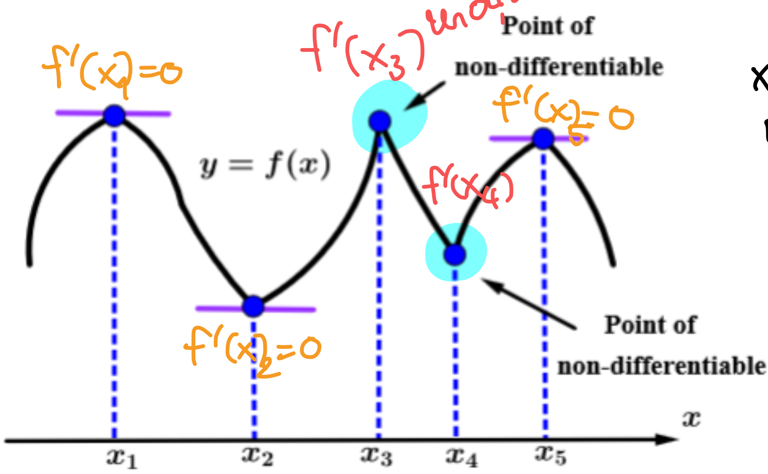
Similarly, f is said to have a ***relative minimum*** (ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์) at x_0 if there is an open interval containing x_0 on which $f(x_0)$ is the smallest value, that is, $\boxed{f(x_0) \leq f(x)}$ for all x in the interval.

If f has either a relative maximum or a relative minimum at x_0, then f is said to have a ***relative extremum*** at x_0.



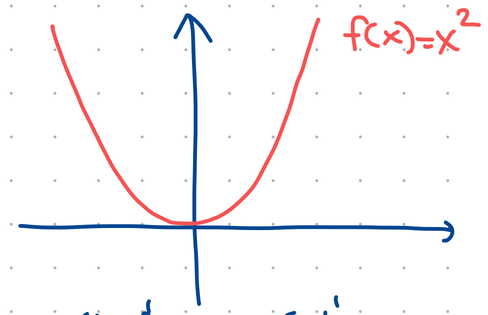
x_0 ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยที่ $f(x_0)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

$f'(x)$

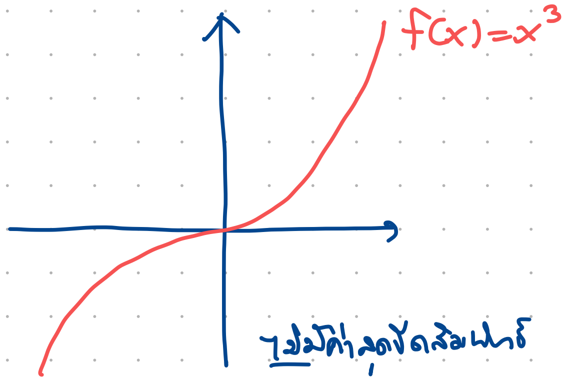


Suppose that f is a function defined on an open interval containing the point x_0. If f has a relative extremum at x_0, then $f'(x_0) = 0$. A point x_0 in the domain of f is said to be a ***critical point*** (จุดวิกฤต) of f if either $f'(x_0) = 0$ or f is not differentiable at x_0.

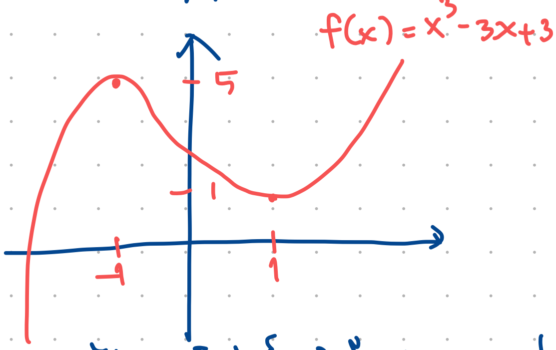
x_0 เป็นจุดวิกฤตของ f ถ้า $f'(x_0) = 0$ หรือ $f'(x_0)$ หาค่าไม่ได้

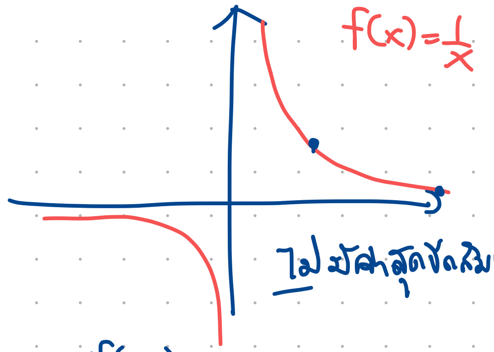


มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=0$
ไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์



ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์





ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์

มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ เกิดที่ $x=-1$, ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ $\Rightarrow f(-1)=5$
มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เกิดที่ $x=1$, ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ $\Rightarrow f(1)=1$

Example 4.4 Find all critical points of $f(x) = x^2 - 4x + 5$ $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

Solution. $f'(x) = 2x - 4$ จุดที่ทำให้ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้ ไม่มี

Set $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0$

$x = 2$ ← จุดวิกฤต

จุดวิกฤตจะต้องอยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน

$\therefore$ จุดวิกฤต คือ $x = 2$

Example 4.5 Find all critical points of $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$ $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

Solution. $f'(x) = \dfrac{(x+2)-(x-2)}{(x+2)^2} = \dfrac{4}{(x+2)^2}$ → $f'(x)$ หาค่าไม่ได้ที่ไหน

$x = -2$

แต่ $x = -2$ ไม่อยู่ในโดเมน

$\therefore$ $x = -2$ ไม่เป็นจุดวิกฤต

หาค่าของ x ที่ทำให้ $f'(x) = 0$

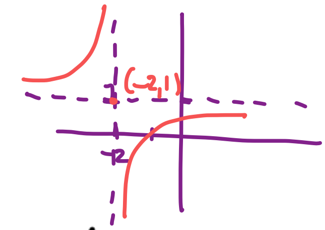
Set $f'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2} = 0$

$x \neq -2;\quad 4 \neq 0$

ไม่มี x ที่ทำให้ $f'(x) = 0 \Rightarrow f$ ไม่มีจุดวิกฤต

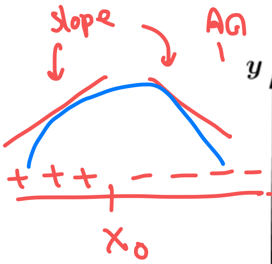
$f(x) = \dfrac{x+2-4}{x+2}$

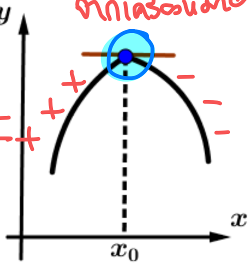
$f(x) = 1 - \dfrac{4}{x+2}$



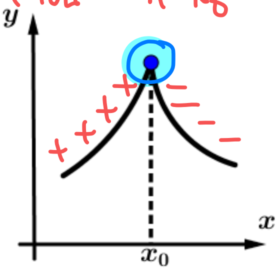
4.4 First Derivative Test & Second Derivative Test

จุด x_0 ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ถ้ามีการเปลี่ยนแปลงความชัน จากเครื่องหมาย + เป็น − ที่ x_0

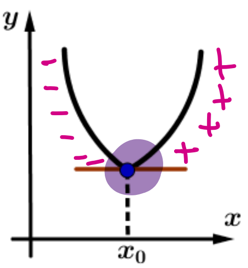




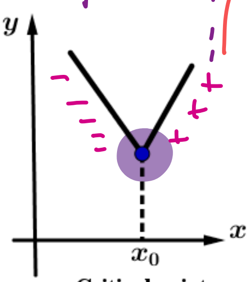
Critical point,
Stationary point,
Relative maxmum



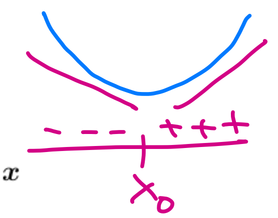
Critical point,
Not a stationary point,
Relative maximum



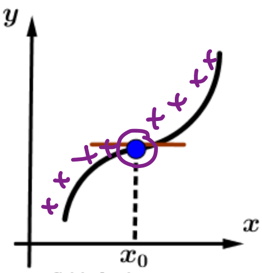
Critical point,
Stationary point,
Relative minimum



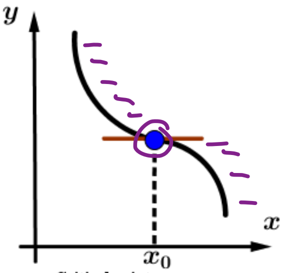
Critical point,
Not a stationary point,
Relative minimum



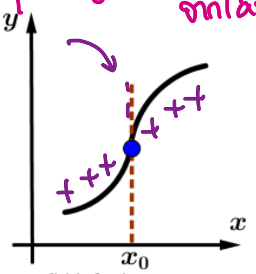
จุด x_0 ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ถ้ามีการเปลี่ยนแปลงความชัน จากเครื่องหมาย − เป็น + ที่ x_0



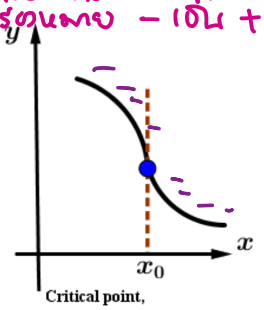
Critical point,
Stationary point,
Inflection point,
Not a relative extremum



Critical point,
Stationary point,
Inflection point,
Not a relative extremum



Critical point,
Not a stationary point,
Inflection point,
Not a relative extremum



Critical point,
Not a stationary point,
Inflection point,
Not a relative extremum

Ex $f(x) = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$ $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

หาจุดวิกฤต หา $f'(x) = \cancel{3}\left(\frac{5}{\cancel{3}}\right)x^{2/3} - \overset{5}{\cancel{15}}\left(\frac{2}{\cancel{3}}\right)x^{-1/3}$

$= 5x^{2/3} - 10x^{-1/3}$

$= 5x^{-1/3}(x-2)$

$= \frac{5(x-2)}{x^{1/3}}$

มี x ที่ทำให้ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้ $x = 0 \leftarrow$ อยู่ในโดเมน $\Rightarrow x = 0$ เป็นจุดวิกฤต

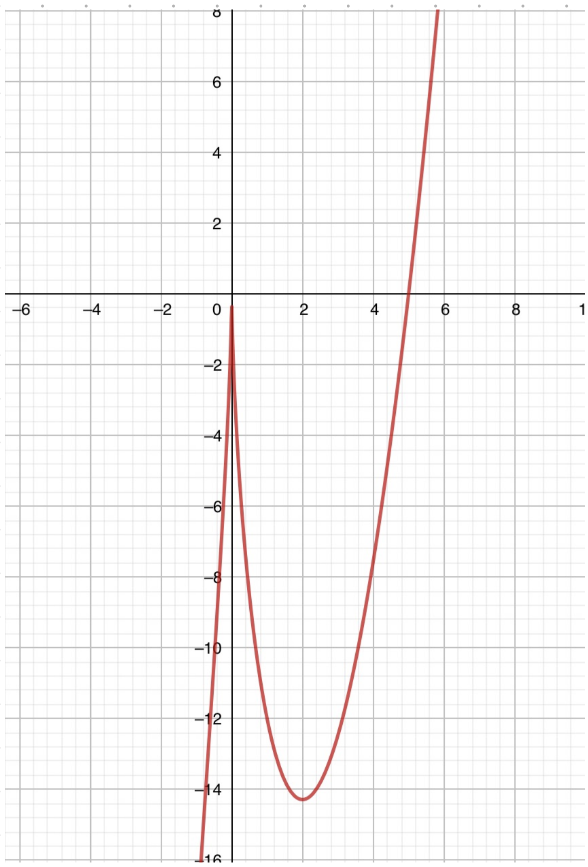
หา x ที่ทำให้ $f'(x) = 0$

Set $f'(x) = 0$

ถ้า $x \neq 0$; $5(x-2) = 0$

$x = 2$

$\therefore$ จุดวิกฤต คือ $x = 0, 2$

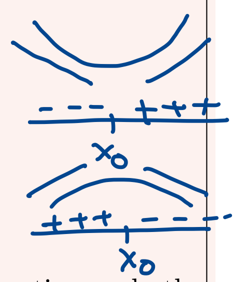


Quiz $f(x) = (x^2-1)x^3$

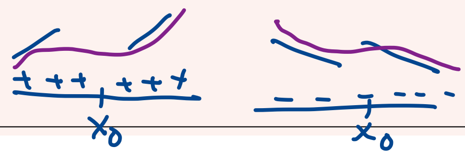
$f'(x) = (5x^2-3)x^2$

จุดวิกฤต $x = 0,\ x = \sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}$

Theorem 4.3 Let x_0 be a critical point of the function f that is continuous on the open interval $[a, b]$ containing x_0. If f is differentiable on the interval, except possibly at x_0, then $f(x_0)$ can be classified as:



1. A relative minimum, if $f'(x)$ changes from negative to positive at x_0.
2. A relative maximum, if $f'(x)$ changes from positive to negative at x_0.
3. Neither a max nor a min if $f'(x)$ is positive on both sides of x_0 or negative on both sides of x_0.



การใช้อนุพันธ์อันดับสองตรวจสอบค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์

Theorem 4.4 Suppose that f is twice differentiable at the point x_0 and $\underline{f'(x_0) = 0}$.

1. If $\boxed{f''(x_0) > 0}$ then f has a <u>relative minimum</u> at x_0.
2. $\boxed{\text{If } f''(x_0) < 0}$ then f has a <u>relative maximum at</u> x_0.
3. If $\underline{f''(x_0) = 0}$, then the test is inconclusive; that is f may have a relative maximum, a relative minimum or neither at x_0.

สรุปไม่ได้

$D_f = \mathbb{R}$ ① หาจุดวิกฤต

Example 4.6 Find the relative extrema of $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

Solution. ① หา $f'(x)$: $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$

Set $f'(x) = 0$; $15x^4 - 15x^2 = 0$

$x^4 - x^2 = 0$

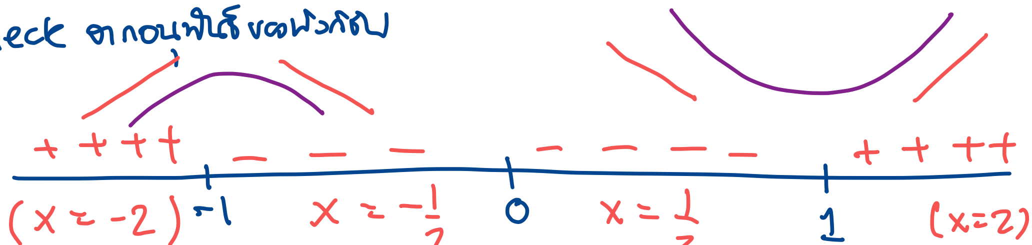
$x^2(x^2 - 1) = 0$

$x^2(x-1)(x+1) = 0$

จุดวิกฤต $x = 0, -1, 1$

② check ตามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$\boxed{\text{เครื่องหมาย } f'(x)}$



$f'(x) = 15x^2(x-1)(x+1)$

+ -3 -1

$x = -1$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-1) = 2$

$x = 1$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(1) = -2$

$f''(x) = 60x^3 - 30x$
$= 30x(2x^2 - 1)$

$\boxed{f''(-1) = -30 < 0}$

$\boxed{f''(1) = 30 > 0}$

4.5 Analysis of Functions

PROCEDURE GRAPHING STRATEGY

Step 1 : Find the domain, the x-intercepts, and the y-intercept.

Step 2 : Find the vertical asymptotes.

Step 3 : Find the end behaviour.

Step 4 : Find $f'(x)$ and $f''(x)$.

Step 5 : Sketch the graph of f.

Example 4.7 Sketch a graph of the equation $y = x^4 - 4x^3 + 10$

① หา $D_f = \mathbb{R}$, หาจุดตัดแกน x ให้ $y = 0$ หา $x = ?$ ← ข้ามไป

หาจุดตัดแกน y ให้ $x = 0$ ได้ $y = 10$ $(0, 10)$

② หา vertical asymptote : ดูว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +/-\infty$ ไม่มี

③ horizontal asymptote : ดูว่า $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \underline{\underline{x^4}} - 4x^3 + 10 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^4 - 4x^3 + 10 = +\infty$

④ $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$ $\underline{\text{จุดวิกฤต}}$ $x = 0, 3$

ดูว่า f เป็นฟังก์ชัน เพิ่ม ลด ที่ไหน

⑤ $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$ จุด$\underline{\text{ที่อาจเกิดจุดเปลี่ยนเว้า}}$ $x = 0, 2$

($f''(x)$ อาจเป็น 0 หรือ หาค่าไม่ได้ ที่ไหน)

$f(0) = 10$ $f(2) = -6$ $f(3) = -17$

x	$x = -1$	0	$x = 1$	2	$x = 5/2$	3	$x = 4$
$f'(x)$	$- - -$		$- - - - -$		$- - - - - -$		$+ + + +$
$f''(x)$	$+ + +$		$- - - -$		$+ + + + +$		$+ + + +$

shape of graph