CH 9 Differential Equation : สมการเชิงอนุพันธ์

ประถม ให้ $2x - 5 = 1$ ⇒ หา x ที่ทำให้สมการเป็นจริง

$2x = 6$

$\boxed{x = 3}$ เป็นคำตอบของสมการ $2x - 5 = 1$

เพราะ $2(3) - 5 = 6 - 5 = 1$ สมการเป็นจริง

$\boxed{y' = 6x^2 - 4x}$

ปี 1 $\boxed{\frac{dy}{dx}} = 6x^2 - 4x$ ⇒ หา y ที่ทำให้สมการเป็นจริง

(หา y ที่ diff แล้วได้ $6x^2 - 4x$ ที่เป็นฟังก์ชัน

จาก $y = \int (6x^2 - 4x)\,dx = 2x^3 - 2x^2 + C$

สมการเชิงอนุพันธ์ : สมการที่มีอนุพันธ์ปรากฏอยู่ในสมการ

อันดับสูงสุดที่ปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์ จะเป็นอันดับของสมการเชิงอนุพันธ์

Ex $\frac{dy}{dx} = 2x$: สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First-order differential equation)

$y'' - 5y' + 4y = 0$: สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง (second-order differential equation)

$\frac{dy}{dx} + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2} = \cos x$: สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

" สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equations " ODEs

(≠ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (patial differential equation : PDEs))

9 Differential Equations

In this chapter, we introduce two methods for solving some form of the first order of differential equations (ODEs). First, we introduce some basic definitions of ODEs. We, then, solve the particular ODEs in the forms of ***Separable equations*** and ***Linear first order ODEs*** . Lastly, some examples of linear first order ODEs.

9.1 Introduction to Ordinary Differential Equations

Consider the equation, $y = 2x^3 - 2x^2 + 5$. By differentiation, it can be shown that

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 4x. \tag{9.1}$$

Similarly, for a function $p(x) = 10000e^{-0.04x}$, we have

$$p'(x) = -400e^{-0.04x}. \tag{9.2}$$

These equations are example of ***differential equations*** .

In general, an equation is a **differential equation** if it involves an unknown function and one or more of its derivatives. Other examples of differential equations are

$$\frac{dy}{dx} = ky, \qquad y'' - xy' + x^2 = 5, \qquad \frac{dy}{dx} = 2xy$$

The first and third equations are called **first-order** equations because each involves a first derivative but no higher derivative. The second equation is called a **second-order** equation because it involves a second derivative and no higher derivatives. In general, the ***order*** of a differential equation is the order of the highest derivative that it contains.

คำตอบของสมการ DEs มี 2 แบบ

(1) general solution (คำตอบทั่วไป)

(คำตอบทั่วไป: คำตอบทั้งหมดที่เป็นไปได้)

(2) particular solution (คำตอบเฉพาะ)

(คำตอบที่เกิดขึ้นภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด)

9.2 General and Particular Solutions

A ***solution*** of differential equation is the function which matches the differential equation.

Example 9.1 Show that the function $y = e^x$ is a solution of

L.H.S. R.H.S.

$$\frac{dy}{dx} - y = 0$$

$y = e^x$

$\frac{dy}{dx} = e^x$

(L.H.S)

พิจารณา $\frac{dy}{dx} - y = e^x - e^x = 0 = \text{R.H.S.}$

$\therefore y = e^x$ เป็นคำตอบของสมการ $\frac{dy}{dx} - y = 0$

Example 9.2 Show that, for any constant C, the function $\boxed{y = e^x - x + C}$ is a solution of

L.H.S R.H.S.

$$\frac{dy}{dx} = e^x - 1$$

จาก $y = e^x - x + C$

L.H.S. $\frac{dy}{dx} = e^x - 1 = \text{R.H.S.}$

$\therefore y = e^x - x + C$ เป็นคำตอบของ $\frac{dy}{dx} = e^x - 1$ #

Remark:

- The ***general solution*** of a differential equation is a solution that contains all possible solutions. The general solution always contains an arbitrary constant.
- The ***particular solution*** of a differential equation is a solution that satisfies the initial condition of the equation. A ***first-order initial value problem*** is a first-order differential equation $y' = f(x, y)$ whose solution must satisfy an initial condition $y(x_0) = y_0$.

initial-value problem : หาคำตอบ เมื่อ กำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้นมาให้

Example 9.3 Find the particular solution of

initial condition

$$\frac{dy}{dx} = e^x - 1, \quad y(0) = 1.$$

จาก Ex 9.2 , general solution ของ $\frac{dy}{dx} = e^x - 1$ คือ $\boxed{y = e^x - x + C.}$

แทนค่าหา C : $y(0) = 1$; $1 = \cancel{e^0} - 0 + C$

$$\boxed{C = 0}$$

$\therefore$ $y = e^x - x + C$ เป็นคำตอบเฉพาะ เมื่อ $y(0) = 1$

Example 9.4 Show that the function

$$y = (x+1) - \frac{1}{3}e^x$$

① y เป็นคำตอบของสมการไหม

② y สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าเริ่มต้นไหม

is a solution to the first order initial-value problem

L.H.S R.H.S.

$$\frac{dy}{dx} = y - x, \quad y(0) = 2/3.$$

① $y = (x+1) - \frac{1}{3}e^x$

$\boxed{\text{L.H.S}}$ $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{3}e^x$

$\boxed{\text{R.H.S.}}$ $y - x = (\cancel{x}+1) - \frac{1}{3}e^x - \cancel{x}$

$= 1 - \frac{1}{3}e^x$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S.

② y สอดคล้องกับ $y(0) = 2/3$?

$y(x) = (x+1) - \frac{1}{3}e^x$

$y(0) = 0 + 1 - \frac{1}{3}e^0$

$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ สอดคล้องกับ initial condition.

$\therefore$ $y = (x+1) - \frac{1}{3}e^x$ เป็นคำตอบของ IVP. #

9.3 Separable Equations [สมการแยกตัวแปรได้]

We will now consider a method of solution that can often be applied to first-order equations that are expressible in the form

$$\boxed{h(y)\frac{dy}{dx} = g(x).} \tag{9.3}$$

← รูปมาตรฐาน

Such first-order equations are said to be ***separable*** . The name separable arises from the fact that (9.3) can be rewritten in the differential form

$$\boxed{h(y)dy = g(x)dx} \tag{9.4}$$

เมื่ออินทิเกรตเสร็จแล้ว บวกค่าคงที่ C ทันที!

in which the expressions involving x and y appear on opposite sides. To motivate a method for solving separable equations, assume that $h(y)$ and $g(x)$ are continuous functions of their respective variables, and let $H(y)$ and $G(x)$ denote antiderivatives of $h(y)$ and $g(x)$, respectively. Consider the results if we integrate both sides of (9.4), the left side with respect to y and the right side with respect to x. We then have

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx, \tag{9.5}$$

or, equivalently,

$$H(y) = G(x) + C \tag{9.6}$$

where C denotes a constant. We claim that a differentiable function $y = y(x)$ is a solution to (9.3) if and only if y satisfies (9.6) for some choice of the constant C.

Example 9.5 Write these first-order differential equation in the separable form.

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Equation	Form	$h(y)$	$g(x)$
$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$	$y\frac{dy}{dx} = x$	y	x
$\frac{dy}{dx} = x^2y^3$	$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx} = x^2$	$\frac{1}{y^3}$	x^2
$\frac{dy}{dx} = y$	$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1$	$\frac{1}{y}$	1
$\frac{dy}{dx} = y - \frac{y}{x}$	$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$	$1-\frac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

Example 9.6 Find the general solution of

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}. \longrightarrow \boxed{y\frac{dy}{dx} = x}$$

เขียนในรูป differential : $y\,dy = x\,dx$

อินทิเกรตทั้งสองข้าง : $\int y\,dy = \int x\,dx$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \quad \#$$

บวก C ทันที!

Example 9.7 Find the general solution of

$$\frac{dy}{dx} = ye^x. \longrightarrow \boxed{\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = e^x}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{y}dy = e^x dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int e^x\,dx$$

บวก C ทันที

$$\ln|y| = e^x + C \longrightarrow y = e^{e^x + C'} = Ce^{e^x} \quad ①$$

$$\boxed{\cancel{y = e^{e^x} + C}} \quad ②$$

บวก C ตอนจบ
เป็นคำตอบที่ผิด.

Example 9.8 Find the general solution of

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}\,. \rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}dy = \sqrt{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}}dy = \int \sqrt{x}\,dx$$

$$\boxed{\frac{2y^{\frac{1}{2}}}{1} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C_1} \quad \#$$

$$y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{3/2}}{3} + \frac{C_1}{2} \Rightarrow y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{3/2}}{3} + C \Rightarrow y = \left(\frac{x^{3/2}}{3} + C\right)^2 \checkmark$$

Example 9.9 Find the general solution of

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy+y}{xy-x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y(x+1)}{x(y-1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{y-1}\right)\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$\left(\frac{y-1}{y}\right)dy = \left(\frac{x+1}{x}\right)dx$$

$$\int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy = \int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\boxed{y - \ln|y| = x + \ln|x| + C} \quad \#$$

Example 9.10 Solve the initial value problem

$$\frac{dy}{dx} = -4xy^2, \quad y(0) = 1.$$

$$\rightarrow \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = -4x$$

$$\int \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \int -4x\,dx$$

$$\boxed{-\frac{1}{y} = -2x^2 + C} \quad — (*)$$

$y(0) = 1$;

$$-\frac{1}{1} = -2(0)^2 + C \Rightarrow C = -1$$

$(*)$;

$$-\frac{1}{y} = -2x^2 - 1$$

$$\frac{1}{y} = 2x^2 + 1$$

$$\therefore \boxed{y = \frac{1}{2x^2+1}}$$

Example 9.11 Solve the initial value problem

$$yy' - (x^2+1) = 0, \quad y(4) = 2.$$

$$y\frac{dy}{dx} = x^2+1$$

$$y\,dy = (x^2+1)\,dx$$

$$\int y\,dy = \int (x^2+1)\,dx$$

$$\boxed{\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + x + C}$$

$y(4)=2$;
$$\frac{2^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\,1} = \frac{64}{3} + 4 + C \Rightarrow 2 - 4 - \frac{64}{3} = C$$

$$C = \frac{6-12-64}{3} = -\frac{70}{3}$$

$$\therefore \boxed{\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + x - \frac{70}{3}} \quad \#$$

Example 9.12 Solve the initial value problem

$$(4y - \cos y)\frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0, \quad y(0) = 0.$$

$$(4y - \cos y)\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$(4y - \cos y)\,dy = 3x^2\,dx$$

$$\int (4y - \cos y)\,dy = \int 3x^2\,dx$$

$$\boxed{2y^2 - \sin y = x^3 + C}$$

$y(0)=0$; $\quad 0 - \sin 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$

คำตอบคือ $\therefore$ $\boxed{2y^2 - \sin y = x^3}$ #

ครั้งที่ 28: แบบฝึกหัด

สำหรับเช็คชื่อ ประจำวันอังคารที่ 19 พฤศจิกายน พ.ศ.2562

ชื่อ-สกุล.. รหัสนักศึกษา............................ ลำดับที่............

1. จงตรวจสอบว่า ฟังก์ชัน $y = xe^x$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\underbrace{y'' - y}_{\text{L.H.S.}} = \underbrace{e^x}_{\text{R.H.S.}}$ หรือไม่

$y = xe^x$

$y' = xe^x + e^x$

$y'' = xe^x + e^x + e^x = xe^x + 2e^x$

$\therefore$ L.H.S : $y'' - y = (xe^x + 2e^x) - xe^x = 2e^x$

R.H.S $= e^x$

$\therefore$ L.H.S. $\neq$ R.H.S. $\Rightarrow y = xe^x$ ไม่เป็นคำตอบของสมการ

2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y' - 2x(1 + y^2) = 0, y(2) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} - 2x(1+y^2) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x(1+y^2)$$

$$\frac{1}{1+y^2}\,dy = 2x\,dx$$

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int 2x\,dx$$

$$\arctan y = x^2 + C$$

$y(2) = 1$; $\quad \arctan 1 = 4 + C$

$$\frac{\pi}{4} = 4 + C$$

$$C = \frac{\pi}{4} - 4$$

$\therefore$ particular solution: $\quad \arctan \boxed{y = x^2 + \frac{\pi}{4} - 4}$ #