ครั้งที่ 27: แบบฝึกหัด

ประจำวันศุกร์ที่ 15 พฤศจิกายน พ.ศ.2562 (ไม่ต้องส่ง ให้ตรวจจากเว็บอาจารย์ หรือส่งตามอัธยาศัย)

ชื่อ-สกุล KEY รหัสนักศึกษา................ ลำดับที่..........

1. จงเขียนอินทิกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้ในรูปลิมิตโดยไม่ต้องคำนวณค่าลิมิต

(a) $\int_0^1 (\ln x)^2\,dx = \lim_{k\to 0^+} \int_k^1 (\ln x)^2\,dx$

(b) $\int_0^\infty \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{k_1\to 1^-} \int_0^{k_1} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \lim_{k_2\to 1^+} \int_{k_2}^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \lim_{k_3\to\infty} \int_2^{k_3} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

(c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x-2)}\,dx = \lim_{k_1\to 2^-} \int_1^{k_1} \frac{1}{x(x-2)}\,dx + \lim_{k_2\to 2^+} \int_{k_2}^{3} \frac{1}{x(x-2)}\,dx + \lim_{k_3\to\infty} \int_3^{k_3} \frac{1}{x(x-1)}\,dx$

(d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+3}\,dx = \lim_{k_1\to -\infty} \int_{k_1}^{0} \frac{1}{x^2+3}\,dx + \lim_{k_2\to\infty} \int_0^{k_2} \frac{1}{x^2+3}\,dx$

(e) $\int_1^{+\infty} x\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_1^{k} x\,dx$

(f) $\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{(x-2)^4}\,dx = \lim_{k_1\to -\infty} \int_{k_1}^{1} \frac{1}{(x-2)^4}\,dx + \lim_{k_2\to 2^-} \int_1^{k_2} \frac{1}{(x-2)^4}\,dx$

(g) $\int_1^{2} \frac{x}{(x^2-1)}\,dx = \lim_{k\to 1^+} \int_k^{2} \frac{x}{(x^2-1)}\,dx$

2. จงพิจารณาว่าอินทิกรัล $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^5}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก และถ้าลู่เข้า จงคำนวณค่าของอินทิกรัล

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^5}\,dx = \lim_{k\to -\infty} \int_k^{-1} \frac{1}{x^5}\,dx$$

$$= \lim_{k\to -\infty} \left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^4} \right]_k^{-1}$$

$$= \lim_{k\to -\infty} \left[-\frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{k^4}}_{0} \right]$$

$$= -\frac{1}{4}$$ converges #

3. จงแสดงวิธีการหาค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^{2} \frac{x}{(x^2-1)}\,dx$ พร้อมทั้งระบุว่าปริพันธ์ดังกล่าวลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\int_1^{2} \frac{x}{x^2-1}\,dx = \lim_{k\to 1^+} \int_k^{2} \frac{x}{x^2-1}\,dx$$

ให้ $u = x^2-1$

$du = 2x\,dx$

$\therefore \int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| + C$

$$= \lim_{k\to 1^+} \frac{1}{2}\ln|x^2-1| \Big|_k^2$$

$$= \lim_{k\to 1^+} \frac{1}{2}\ln|3| - \frac{1}{2}\ln|k^2-1|$$

* เมื่อ $k\to 1^+$ ได้ว่า $k^2-1\to 0^+$ และ $\ln|k^2-1| \to -\infty$

$$= +\infty$$ diverges ##