ทบทวน CAL 1

- $\frac{dy}{dx} + 5y = x^2 e^x$ (เชิงเส้น)

  $I(x) = e^{\int 5\,dx}$

- $\frac{dy}{dx} = x^2 y^3$ (แยกตัวแปรได้)

  $\frac{1}{y^3}\,dy = x^2\,dx$

  $\int \frac{1}{y^3}\,dy = \int x^2\,dx$

CAL 2

เป็นสมการเชิงเส้น (degree = 1)

$$P(x)\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$$

$G(x) = 0$: homogeneous equation (สมการเอกพันธุ์)

$G(x) \neq 0$: nonhomogeneous equation (สมการไม่เอกพันธุ์)

homo:
$$\boxed{P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0} \longrightarrow ♡$$

Thm 1 ถ้า $y_1(x)$ และ $y_2(x)$ เป็นคำตอบของสมการ ♡ และ c_1, c_2 เป็นค่าคงที่ แล้ว

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

จะเป็นคำตอบของสมการ ♡

ผลรวมเชิงเส้น (linear combination)

Ex $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ เป็นคำตอบของ

จะทำให้ได้ว่า $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ เป็นคำตอบของ

Ex
$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

206111

$P(x), R(x), Q(x)$ เป็นค่าคงที่

สนใจสมการ $\boxed{ay'' + by' + cy = 0}$; a, b, c เป็นค่าคงที่

Thm 2 ถ้า $y_1(x), y_2(x)$ ของสมการ คือ เป็นอิสระเชิงเส้น (linearly independent) และ $P(x) \neq 0$ แล้ว คำตอบทั่วไป

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงที่

$y_1(x)$, $y_2(x)$ เป็นฟังก์ชัน

จะกล่าวว่า $y_1(x)$ กับ $y_2(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้น (linearly independent)

ถ้าเราดู $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ หรือ $\frac{y_2(x)}{y_1(x)}$ ได้เป็นฟังก์ชัน ที่ไม่ใช่ค่าคงที่

Ex $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{x}$

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{e^{2x}}{e^{x}} = e^{x}$$ ไม่เป็นค่าคงที่

$\therefore y_1(x), y_2(x)$ เป็น L.I. $\Rightarrow y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$

$$= c_1e^{2x} + c_2e^{x}$$

Ex $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2 = 3e^{2x}$

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{1}{3}$$ $\Leftrightarrow$ $y_1(x), y_2(x)$ ไม่เป็น L.I.

เอา x คูณ $y_2(x)$: $y_2(x)$ (ใหม่) $= 3xe^{2x}$

เทียบ $y_1(x)$, $y_2(x)$ ใหม่ : $\frac{y_1(x)}{y_2^{\text{ใหม่}}(x)} = \frac{e^{2x}}{3xe^{2x}} = \frac{1}{3x}$

$$\therefore \boxed{y(x) = c_1e^{2x} + c_2\cdot 3xe^{2x}}$$

การแก้สมการ $\boxed{ay'' + by' + cy = 0}$ —— (*)

สังเกต $y' + ky = 0$ พบว่า $y(x) = e^{-kx}$ เป็นคำตอบของสมการ.

เดา $y = e^{rx}$ น่าจะเป็นคำตอบของ $ay'' + by' + cy = 0$ สำหรับค่าคงที่ r

หา r คือใคร?

พิจารณา แทนในสมการ (*) $y'(x) = re^{rx}$, $y''(x) = r^2e^{rx}$

$$ay'' + by' + cy = a(r^2e^{rx}) + b(re^{rx}) + ce^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

$\because e^{rx} \neq 0$; $ar^2 + br + c = 0$

คำตอบตัวที่ 1 : $y_1(x) = e^{r_1x}$ $\longrightarrow r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

คำตอบตัวที่ 2 : $y_2(x) = e^{r_2x}$ $\longrightarrow r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ถ้า y_1, y_2 L.I.

$y(x) = c_1y_1 + c_2y_2$

ถ้า y_1, y_2 ไม่ L.I. ($y_1 = ky_2$)

$y(x) = c_1y_1 + c_2xy_1$

สรุป

$ay'' + by' + c = 0$

① สร้างสมการช่วย $ar^2 + br + c = 0$ เป็นสมการกำลังสอง

② พิจารณาค่าตอบของสมการกำลังสอง $r = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

CASE 1 $b^2 - 4ac > 0$ (r_1, r_2 แตกต่างกัน)

$$\underbrace{y_1(x) = e^{r_1 x} \quad , \quad y_2(x) = e^{r_2 x}}_{y_1(x),\ y_2(x)\ \text{LI.}}$$

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}}$$

CASE 2 $b^2 - 4ac = 0$ (r_1, r_2 เท่ากัน)

$r = -\dfrac{b}{2a}$ $(r_1 = r_2)$

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= e^{-\frac{b}{2a}x} \\ y_2(x) &= e^{-\frac{b}{2a}x} \end{aligned}\right\} y_1(x),\ y_2(x) \text{ ไม่ L.I.}$$

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x}}$$

CASE 3 $b^2 - 4ac < 0$ (r_1, r_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน)

สมมติ $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$

(Thm ใน จ.น.เชิงซ้อน : ถ้า $r_1 = \alpha + i\beta$ เป็นคำตอบ
$r_2 = \alpha - i\beta$ เป็นคำตอบ)

Euler formula: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$y(x) = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$$

$$= c_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + c_2 e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}$$

$$= c_1 e^{\alpha x}[\cos\beta x + i\sin\beta x] + c_2 e^{\alpha x}[\cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x)]$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(-\theta) &= \cos\theta \\ \sin(-\theta) &= -\sin\theta \end{aligned}}$$

$$= c_1 e^{\alpha x}[\cos\beta x + i\sin\beta x] + c_2 e^{\alpha x}[\cos\beta x - i\sin\beta x]$$

$$= e^{\alpha x}[c_1\cos\beta x + c_1 i\sin\beta x + c_2\cos\beta x - c_2 i\sin\beta x]$$

$$= e^{\alpha x}[(c_1 + c_2)\cos\beta x + (c_1 - c_2) i\sin\beta x]$$

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}[c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x]}$$

Second-Order Linear Equations

A **second-order linear differential equation** has the form

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=G(x) \qquad (1)$$

where P, Q, R and G are continuous functions.

In this section we study the case where $G(x)=0$, for all x, in Equation (1). Such equations are called **homogeneous** linear equations. Thus, the form of a second-order linear homogeneous differential equation is

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0 \qquad (2)$$

If $G(x)\neq 0$ for some x, Equation (1) is **nonhomogeneous**.

Theorem If $y_1(x)$ and $y_2(x)$ are both solutions of the linear homogeneous equation (2) and c_1 and c_2 are any constants, then the function

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

is also a solution of Equation (2).

In general, it is not easy to discover particular solutions to a second-order linear equation. But it is always possible to do so if the coefficient functions P, Q and R are constant functions, that is, if the differential equation has the form

$$\boxed{ay''+by'+cy=0} \qquad (3)$$

where a, b and c are constants and $a\neq 0$.

It's not hard to think of some likely candidates for particular solutions of Equation (3) if we state the equation verbally. We are looking for a function y such that a constant times its second derivative y'' plus another constant times y' plus a third constant times y is equal to 0. We know that the exponential function $y=e^{rx}$ (where r is a constant) has the property that its derivative is a constant multiple of itself: $y'=re^{rx}$. Furthermore, $y''=r^2e^{rx}$. If we substitute these expressions into Equation (3), we see that $y=e^{rx}$ is a solution if

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

or

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

But e^{rx} is never 0. Thus, $y = e^{rx}$ is a solution of Equation (3) if r is a root of the equation

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0} \tag{4}$$

Equation (4) is called the **auxiliary equation** (or **characteristic equation**) of the differential equation $ay'' + by' + cy = 0$. Notice that it is an equation that is obtained from the differential equation by replacing y'' by r^2, y' by r, and y by 1.

Sometimes the roots r_1 and r_2 of the auxiliary equation can be found by factoring. In other cases they are found by using the quadratic formula:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

We distinguish three cases according to the sign of the discriminant $b^2 - 4ac$.

Case I: $b^2 - 4ac > 0$

If the roots r_1 and r_2 of the auxiliary equation $ar^2 + br + c = 0$ are real and unequal, then the general solution of $ay'' + by' + cy = 0$ is

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$

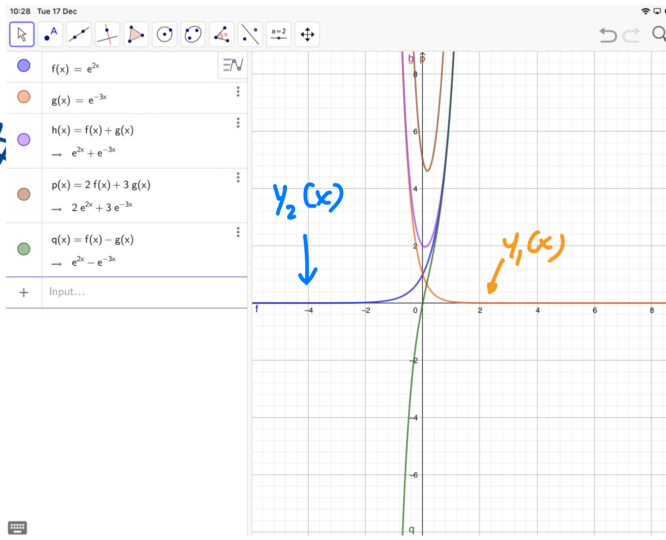
EXAMPLE 1 Solve the equation $y'' + y' - 6y = 0$.

ตั้งสมการช่วย
auxiliary equation

$$r^2 + r - 6 = 0$$
$$(r-2)(r+3) = 0$$
$$r = -3, 2$$

$$\therefore\ y_1(x) = e^{-3x}$$
$$y_2(x) = e^{2x}$$

$$\therefore\ \boxed{y(x) = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}}\ \#$$



EXAMPLE 2 Solve $3\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-y=0$.

สร้างสมการช่วย $3r^2+r-1=0$

$$r=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(3)(-1)}}{2(3)}$$

$$r=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$$

$$\boxed{y(x)=c_1e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{6}x}+c_2e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{6}x}}\quad\#$$

Case II: $b^2-4ac=0$

If the auxiliary equation $ar^2+br+c=0$ has only one real root r, then the general solution of $ay''+by'+cy=0$ is

$$y(x)=c_1e^{rx}+c_2xe^{rx}$$

EXAMPLE 3 Solve the equation $4y''+12y'+9y=0$.

สร้างสมการช่วย $4r^2+12r+9=0$

$$(2r+3)(2r+3)=0$$

$$r=-\frac{3}{2}$$

$$\boxed{\therefore\ y(x)=c_1e^{-\frac{3}{2}x}+c_2xe^{-\frac{3}{2}x}}$$

Case III: $b^2 - 4ac < 0$

> If the roots of the auxiliary equation $ar^2+br+c=0$ are the complex numbers $r_1=\alpha+i\beta, r_2=\alpha-i\beta$, then the general solution of $ay''+by'+cy=0$ is
>
> $$y(x)=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$$

EXAMPLE 4 Solve the equation $y''-6y'+13y=0$.

สมการช่วย $r^2-6r+13=0$

$$r=\frac{6\pm\sqrt{36-4(1)(13)}}{2}$$

$$r=\frac{6\pm\sqrt{-16}}{2}$$

$$r=\frac{6\pm 4i}{2}=\underset{\alpha}{3}\pm\underset{\beta}{2}i$$

$$\boxed{y(x)=e^{3x}[c_1\cos 2x+c_2\sin 2x]}\ \#$$

Initial-Value and Boundary-Value Problems

An **initial-value problem** for the second-order Equation (1) or (2) consists of finding a solution y of the differential equation that also satisfies initial conditions of the form

$$y(x_0)=y_0 \qquad y'(x_0)=y_1$$

where y_0 and y_1 are given constants.

EXAMPLE 5 Solve the initial-value problem

$$y''+y'-6y=0 \qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=0$$

$=\frac{5}{3}e$