สมการ ป.6 - ม.6

$2x - 1 = 3$

$\boxed{x = 2}$ เป็นคำตอบของสมการ $2x-1=3$

เพราะ แทน $x=2$ ในสมการ $2x-1=3$ แล้วทำให้สมการเป็นจริง

สมการ ปี 1

สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation)

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = x^2 - x}$$

หาฟังก์ชัน y ที่ทำให้สมการนี้เป็นจริง

เช่น $y = \int (x^2 - x)\,dx$

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C.$$

เป็นคำตอบไหม?

$$y' = x^2 - x$$

- สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equations : ODEs)
- สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (PDEs) (partial differential equations)

$x^{2} - 2x + 1 = 0$

อันดับ (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ : อันดับของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการ

Ex

สมการเชิงเส้น

$\frac{dy}{dx} + e^x y = x^2 + 2x + 1$ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

ถ้ามีฟังก์ชัน $y=f(x)$ สามารถตรวจสอบได้ว่า $y=f(x)$ เป็นคำตอบของสมการหรือไม่?

Ex $y'' = y$ ตรวจสอบว่า $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = c_1e^x + c_2e^{-x}$; c_1, c_2 เป็นค่าคงที่ เป็นคำตอบของสมการหรือไม่

หา y_1''

L.H.S. : $y_1 = e^x$

$y_1' = e^x$

$y_1'' = e^x$

R.H.S : $y_1 = e^x$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. $\Leftrightarrow y_1 = e^x$ เป็นคำตอบของสมการ.

$\boxed{y'' = y}$

$\boxed{e^x = e^x}$

$\therefore y = e^x$ เป็นคำตอบ

บทที่ 1

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและการประยุกต์ (First-Order Differential Equations and Its Applications)

สมการเชิงอนุพันธ์ คือสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น ในบทนี้เราจะศึกษาเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง นั่นคือสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเฉพาะอนุพันธ์อันดับหนึ่งปรากฏอยู่ในสมการนั้น เช่น $y' = xy$

1.1 สมการแยกตัวแปรได้ (Separable Equations)

จะเรียกฟังก์ชัน $y = f(x)$ ว่า **ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์** (solution) ก็ต่อเมื่อแทนค่า $y = f(x)$ และ $y' = f'(x)$ ในสมการเชิงอนุพันธ์แล้วสมการเป็นจริง

คำตอบทั่วไป (general solution)

ตัวอย่าง 1.1.1. จงแสดงว่า $y = \dfrac{1+ce^t}{1-ce^t}$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $y' = \dfrac{1}{2}(y^2-1)$

L.H.S หา $y' = \dfrac{(1-ce^t)\frac{d}{dt}(1+ce^t) - (1+ce^t)\frac{d}{dt}(1-ce^t)}{(1-ce^t)^2}$

$$= \frac{(1-ce^t)ce^t - (1+ce^t)(-ce^t)}{(1-ce^t)^2}$$

$$= \frac{ce^t - \cancel{(ce^t)^2} + ce^t + \cancel{(ce^t)^2}}{(1-ce^t)^2}$$

$$= \frac{2ce^t}{(1-ce^t)^2}$$

R.H.S. $\dfrac{1}{2}(y^2-1) = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1+ce^t}{1-ce^t}\right)^2 - 1\right] = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1^2+2ce^t+(ce^t)^2-(1-ce^t)^2}{(1-ce^t)^2}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\cancel{1}+2ce^t+\cancel{(ce^t)^2}-\cancel{1}+2ce^t-\cancel{(ce^t)^2}}{(1-ce^t)^2}\right] = \frac{2ce^t}{(1-ce^t)^2}$$

เนื่องจาก L.H.S = R.H.S ได้ว่า $y = \dfrac{1+ce^t}{1-ce^t}$ เป็นคำตอบของสมการ $y' = \dfrac{1}{2}(y^2-1)$

หมายเหตุ

(1) เรียกผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปค่าคงที่ ดังในตัวอย่าง A ว่า **ผลเฉลยทั่วไป** (general solution)

→ คำตอบนี้เรียกว่า คำตอบเฉพาะ (particular solution)

(2) ในการแก้ปัญหาทางกายภาพหลายปัญหา ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่แก้ได้จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขเฉพาะ $y(t_0) = y_0$ เรียกเงื่อนไขและปัญหาดังกล่าวว่า **เงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition)** และ **ปัญหาค่าเริ่มต้น (initial-value problem)** ตามลำดับ

ตัวอย่าง 1.1.2. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\boxed{y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 2$

คำตอบทั่วไป $y(t) = \dfrac{1+Ce^t}{1-Ce^t}$

เมื่อกำหนดเงื่อนไข $y(0)=2$ $\Leftrightarrow$ หา C

$$2 = y(0) = \frac{1+Ce^0}{1-Ce^0}$$

$$2 = \frac{1+C}{1-C} \Leftrightarrow C = \frac{1}{3}$$

$2-2C = 1+C$
$3C = 1 \Leftrightarrow$

$\therefore y(t) = \dfrac{1+\frac{1}{3}e^t}{1-\frac{1}{3}e^t}$ เป็นคำตอบเฉพาะ เมื่อ $y(0)=2$ initial condition

หมายเหตุ เรียกผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในตัวอย่าง B ว่า **ผลเฉลยเฉพาะ** (particular solution)

ต่อไปเราจะกล่าวถึงสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง 2 ประเภทคือ สมการแยกตัวแปรได้ และสมการเชิงเส้น

สมการแยกตัวแปรได้ (Separable Equations)

สมการแยกตัวแปรได้ คือ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่เขียนได้ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = g(y)f(x) \tag{1.1}$$

ถ้า $g(y) \neq 0$ เราสามารถเขียนสมการ (1.1) ในรูปของค่าเชิงอนุพันธ์ได้เป็น

$$h(y)dy = f(x)dx \tag{1.2}$$

โดยที่ $h(y) = \dfrac{1}{g(y)}$

เราสามารถหาผลเฉลยของสมการ โดยการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ (1.2)

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$