

ทฤษฎี

$$\frac{dy}{dx} + xy = e^x$$

$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

(check ทฤษฎีคำตอบของสมการ DE)

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

(1) สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งแยกตัวแปรได้ (separable equation)

$$\frac{dy}{dx} = g(y)f(x)$$

— (*)

$$h(y) dy = f(x) dx$$

$$\int h(y) dy = \int f(x) dx$$

(ถ้า $g(y) \neq 0$
set $h(y) = \frac{1}{g(y)}$)

⊗ ข้อควรระวัง

อินทิเกรต ⊕ แล้ว ได้ค่า C ห้าม

หมายเหตุ

- (1) เรียกผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปค่าคงที่ ดังในตัวอย่าง A ว่า **ผลเฉลยทั่วไป (general solution)**
- (2) ในการแก้ปัญหาทางกายภาพหลายปัญหา ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่แก้ได้จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขเฉพาะ $y(t_0) = y_0$ เรียกเงื่อนไขและปัญหาดังกล่าว ว่า **เงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition)** และ **ปัญหาค่าเริ่มต้น (initial-value problem)** ตามลำดับ

ตัวอย่าง 1.1.2. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 2$

หมายเหตุ เรียกผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในตัวอย่าง B ว่า **ผลเฉลยเฉพาะ (particular solution)** ต่อไปเราจะกล่าวถึงสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง 2 ประเภทคือ สมการแยกตัวแปรได้ และสมการเชิงเส้น

สมการแยกตัวแปรได้ (Separable Equations)

สมการแยกตัวแปรได้ คือ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่เขียนได้ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = g(y)f(x) \quad (1.1)$$

ถ้า $g(y) \neq 0$ เราสามารถเขียนสมการ (1.1) ในรูปของค่าเชิงอนุพันธ์ได้เป็น

$$h(y)dy = f(x)dx \quad (1.2)$$

โดยที่ $h(y) = \frac{1}{g(y)}$

เราสามารถหาผลเฉลยของสมการ โดยการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ (1.2)

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

ตัวอย่าง 1.1.3. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$h(y)dy = f(x)dx$$

(1) $\frac{dy}{dx} = y^2 \sin x$

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^2} dy &= \sin x \, dx \\ \int \frac{1}{y^2} dy &= \int \sin x \, dx \quad (*) \\ &\quad (y \neq 0) \\ \boxed{-\frac{1}{y} = -\cos x + C} &\leftarrow \text{general solution} \end{aligned}$$

ลึกลับของ C

$$\boxed{-\frac{1}{y} = -\cos x}$$

ผิดเพราะ: ขาดค่าคงที่ C

$$\boxed{-1 = -y \cos x + yC} \quad \checkmark$$

(2) $(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = xy$

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \frac{x}{x^2 + 1} \\ \frac{1}{y} dy &= \frac{x}{x^2 + 1} dx \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int \frac{x}{x^2 + 1} dx \end{aligned}$$

ให้ $u = x^2 + 1$
 $du = 2x \, dx$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{x}{x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{2} \ln|u| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C \end{aligned}$$

$$\boxed{\ln|y| = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C}$$

$$y = e^{\ln|x^2 + 1|^{\frac{1}{2}}} \cdot e^C \Leftrightarrow \boxed{y = C(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

(3) $(1 + \tan y)y' = x^2 + 1$

$$\begin{aligned} (1 + \tan y) dy &= (x^2 + 1) dx \\ \int (1 + \tan y) dy &= \int (x^2 + 1) dx \\ \boxed{y + \ln|\sec y| = \frac{x^3}{3} + x + C} &\# \end{aligned}$$

Ex เผลอตัว

$$y' = e^x y^3 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = e^x y^3$$

$$\frac{1}{y^3} dy = e^x dx$$

$$\int \frac{1}{y^3} dy = \int e^x dx$$

$$\boxed{-\frac{1}{2y^2} = e^x + C} \quad \#$$

ตัวอย่าง 1.1.4. จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1+y^2}$ เมื่อกำหนดให้ $y(0) = 1$ ๕

$$\left(\frac{1+y^2}{y}\right) dy = \cos x \, dx$$

$$\int \frac{1+y^2}{y} dy = \int \cos x \, dx$$

$$\int \left(\frac{1}{y} + y\right) dy = \int \cos x \, dx$$

$$\ln|y| + \frac{y^2}{2} = \sin x + C \quad \leftarrow \text{general solution}$$

เมื่อ $y(0) = 1$ solve หา C
 $(x=0, y=1) \quad \ln|1| + \frac{1^2}{2} = \sin 0 + C$

$$\therefore C = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \ln|y| + \frac{y^2}{2} = \sin x + \frac{1}{2} \quad \leftarrow \text{particular solution into } y(0) = 1$$

(2) $y' \tan x = a + y$ เมื่อกำหนดให้ $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = a, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\tan x \frac{dy}{dx} = a + y$$

$$\frac{1}{a+y} dy = \frac{1}{\tan x} dx$$

$$\int \frac{1}{a+y} dy = \int \cot x \, dx$$

$$\ln|a+y| = \ln|\sin x| + C$$

$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = a; \quad \ln|a+a| = \ln\left|\sin \frac{\pi}{3}\right| + C$

$$\ln|2a| = \ln\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| + C$$

$$C = \ln|2a| - \ln\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$

$$C = \ln\left|\frac{2a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right| \Leftrightarrow C = \ln\left|\frac{4a}{\sqrt{3}}\right|$$

คำตอบ: $\ln|a+y| = \ln|\sin x| + \ln\left|\frac{4a}{\sqrt{3}}\right|$ //

Ex $y' - xe^{x^2} \operatorname{cosec}(2y) = 0$; $y(0) = 0$

$$y' = xe^{x^2} \operatorname{cosec} 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = xe^{x^2} \operatorname{cosec} 2y$$

$$\frac{1}{\operatorname{cosec} 2y} dy = xe^{x^2} dx$$

$$\int \sin 2y dy = \int xe^{x^2} dx$$

$$\frac{-\cos 2y}{2} = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

Let $u = x^2$
 $du = 2x dx$
 $\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du$
 $= \frac{1}{2} e^u + C$
 $= \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

$y(0) = 0$; $\frac{-\cos 0}{2} = \frac{1}{2} e^0 + C \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C$
 $\therefore C = -1$

$\therefore \frac{-\cos 2y}{2} = \frac{1}{2} e^{x^2} - 1$ #
 Answer = when $y(0) = 0$

Applications

① Growth & Decay Model

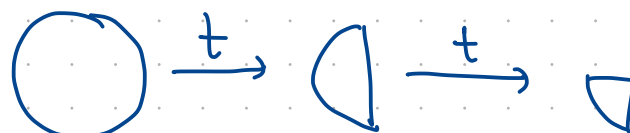
$$\frac{dy}{dt} = ky$$

($k > 0$ growth model
 $k < 0$ decay model)

การเปลี่ยนแปลง



ครึ่งชีวิต (Half-life)



② กฎการเย็นตัวของนิวตัน

$T(t)$ คืออุณหภูมิที่วัตถุที่เวลา t
 T_s คืออุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม

อัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่ขึ้นกับเวลา เป็นสัดส่วนกับ ความแตกต่างของอุณหภูมิกับอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม

$$\frac{dT}{dt} \propto (T - T_s)$$

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)} \quad \text{Solve for } T$$

$$\frac{1}{T - T_s} dT = k dt$$

$$\int \frac{1}{T - T_s} dT = \int k dt$$

$$\boxed{\ln |T - T_s| = kt + C}$$

$$T - T_s = e^{kt + C}$$

$$\boxed{T - T_s = Ce^{kt}}$$

ต่อไปเราจะกล่าวถึงการประยุกต์ของสมการแยกตัวแปรได้

กฎการเย็นตัวของนิวตัน (Newton's law of cooling)

ให้ $T(t)$ เป็นอุณหภูมิของวัตถุที่เวลา t , T_s เป็นอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม เช่น อุณหภูมิห้อง กฎการเย็นตัวของนิวตันกล่าวว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิของวัตถุเทียบกับเวลาจะเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของวัตถุกับอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม นั่นคือ

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_s) \quad (1.3)$$

เมื่อ k เป็นค่าคงที่ จะเห็นว่าสมการ (1.3) เป็นสมการแยกตัวแปรได้ โดยวิธีการแก้สมการที่เราได้ศึกษามาก่อนข้างต้น ได้ว่าผลเฉลยของสมการจะอยู่ในรูป

$$\ln |T - T_s| = kt + c \quad (1.4)$$

หรือ

$$T - T_s = Ce^{kt} \quad (1.5)$$

ตัวอย่าง 1.1.5. นำขวดโซดาที่มีอุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิห้อง 72 องศาฟาเรนไฮต์ ไปวางไว้ในตู้เย็นที่มีอุณหภูมิ 44 องศาฟาเรนไฮต์ หลังจากเวลาผ่านไปครึ่งชั่วโมงพบว่าขวดโซดามีอุณหภูมิเย็นลงเป็น 61 องศาฟาเรนไฮต์

T เจนแปรผันกับเวลา t (ชั่วโมง)

(a) จงหาอุณหภูมิของขวดโซดาหลังจากเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมง

$$T_s = 44^\circ\text{F}$$

$$T(0) = 72^\circ\text{F} \leftarrow$$

$$T\left(\frac{1}{2}\right) = 61^\circ\text{F}$$

initial condition

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 44)$$

① หา C เจนแปรผัน

$$T(0) = 72 \text{ ชั่วโมง}$$

$$72 - 44 = Ce^{k(0)}$$

$$\therefore C = 28$$

$$\therefore \text{คำตอบ} = T - 44 = 28e^{kt} \quad \text{หา } T(1)$$

② หา k เจนแปรผัน : $T\left(\frac{1}{2}\right) = 61$

$$61 - 44 = 28e^{\frac{1}{2}k}$$

$$\frac{17}{28} = e^{\frac{1}{2}k} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{17}{28}\right) = \ln(e^{\frac{1}{2}k})$$

$$\therefore \frac{1}{2}k = \ln\left(\frac{17}{28}\right)$$

$$\therefore k = 2\ln\left(\frac{17}{28}\right)$$

$$\therefore T - 44 = 28e^{2\ln\left(\frac{17}{28}\right)t} \Leftrightarrow T(t) = 44 + 28e^{2\ln\left(\frac{17}{28}\right)t}$$

$$T(1) = T(1) = 44 + 28e^{2\ln\left(\frac{17}{28}\right)}$$

$$T(1) = 44 + 28\left(\frac{17}{28}\right)^2 \approx 44 + 10.32 = 54.32^\circ\text{F}$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow T \rightarrow 44$$

$$T(t) = 44 + 28e^{2\ln(\frac{17}{28})t}$$

บทที่ 1. สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและการประยุกต์

ข้อ 1. ให้แก้หาค่าของ $T(t)$

6

$$T(t) = 50$$

(b) จะใช้เวลานานเท่าใดที่ขวดโซดาจะมีอุณหภูมิลดลงเป็น 50 องศาฟาเรนไฮต์

$$50 = 44 + 28e^{2\ln(\frac{17}{28})t}$$

$$6 = 28e^{2\ln(\frac{17}{28})t}$$

$$\frac{6}{28} = e^{2\ln(\frac{17}{28})t}$$

$$\frac{6}{28} = [e^{\ln(\frac{17}{28})^2 t}]$$

$$\frac{6}{28} = [e^{\ln(\frac{17}{28})^2 t}]$$

$$\frac{6}{28} = \left[\left(\frac{17}{28}\right)^2\right]^t$$

$$\ln\left(\frac{6}{28}\right) = 2t \ln\left(\frac{17}{28}\right)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{6}{28}\right)}{2\ln\left(\frac{17}{28}\right)} \text{ ไร่โฆ}$$

$$t \approx 1.534 \text{ ไร่.ม.}$$

$$\approx 92.61 \text{ นาที}$$

ตัวอย่าง 1.1.6. ฟืนหนึ่งจักรวาลนำไก่วงอบที่มีอุณหภูมิ 185°F ออกจากเตาอบมาวางบนโต๊ะอาหารที่ตั้งอยู่ในห้องซึ่งมีอุณหภูมิ 75°F

(a) ถ้าอุณหภูมิของไก่วงอบลดลงเหลือ 150°F หลังจากเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมง จงหาว่าไก่วงอบจะมีอุณหภูมิเท่าใดหลังจากที่ฟืนหนึ่งจักรวาล นำออกมาจากเตาอบ 45 นาที นาค $T\left(\frac{3}{4}\right)$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)$$



$$T - 75 = Ce^{kt}$$

$$T_s = 75, T(0) = 185, T(1) = 150$$

$$\textcircled{1} T(0) = 185; 185 - 75 = Ce^0$$

$$110 = C$$

$$\therefore T - 75 = 110e^{kt}$$

$$\textcircled{2} \text{นาค } T(1) = 150; 150 - 75 = 110e^k$$

$$\frac{75}{110} = e^k$$

$$\therefore k = \ln\left(\frac{75}{110}\right)$$

$$\therefore T - 75 = 110e^{\ln\left(\frac{75}{110}\right)t}$$

$$T\left(\frac{3}{4}\right) T = 75 + 110e^{\left(\ln\left(\frac{75}{110}\right)\right)\frac{3}{4}}$$

ไร่โฆ (b) ลตหาค่าไร่โฆ.