บทที่ 1

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและการประยุกต์ (First-Order Differential Equations and Its Applications)

สมการเชิงอนุพันธ์ คือสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น ในบทนี้เราจะศึกษาเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง นั่นคือสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเฉพาะอนุพันธ์อันดับหนึ่งปรากฏอยู่ในสมการนั้น เช่น $y' = xy$

1.1 สมการแยกตัวแปรได้ (Separable Equations)

จะเรียกฟังก์ชัน $y = f(x)$ ว่า **ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (solution)** ก็ต่อเมื่อแทนค่า $y = f(x)$ และ $y' = f'(x)$ ในสมการเชิงอนุพันธ์แล้วสมการเป็นจริง

ตัวอย่าง 1.1.1. จงแสดงว่า $y = \dfrac{1+ce^t}{1-ce^t}$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $y' = \dfrac{1}{2}(y^2-1)$

หมายเหตุ

(1) เรียกผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปค่าคงที่ ดังในตัวอย่าง A ว่า **ผลเฉลยทั่วไป (general solution)**

(2) ในการแก้ปัญหาทางกายภาพหลายปัญหา ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่แก้ได้จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขเฉพาะ $y(t_0) = y_0$ เรียกเงื่อนไขและปัญหาดังกล่าวว่า **เงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition)** และ **ปัญหาค่าเริ่มต้น (initial-value problem)** ตามลำดับ

ตัวอย่าง 1.1.2. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 2$

หมายเหตุ เรียกผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในตัวอย่าง B ว่า **ผลเฉลยเฉพาะ (particular solution)**
ต่อไปเราจะกล่าวถึงสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง 2 ประเภทคือ สมการแยกตัวแปรได้ และสมการเชิงเส้น

สมการแยกตัวแปรได้ (Separable Equations)
สมการแยกตัวแปรได้ คือ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่เขียนได้ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = g(y)f(x) \tag{1.1}$$

ถ้า $g(y) \neq 0$ เราสามารถเขียนสมการ (1.1) ในรูปของค่าเชิงอนุพันธ์ได้เป็น

$$h(y)dy = f(x)dx \tag{1.2}$$

โดยที่ $h(y) = \frac{1}{g(y)}$
เราสามารถหาผลเฉลยของสมการ โดยการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ (1.2)

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

ตัวอย่าง 1.1.3. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

(1) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 \sin x$

(2) $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx} = xy$

(3) $(1+\tan y)y' = x^2+1$

ตัวอย่าง 1.1.4. จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\cos x}{1+y^2}$ เมื่อกำหนดให้ $y(0) = 1$

(2) $y' \tan x = a + y$ เมื่อกำหนดให้ $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = a, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

ต่อไปเราจะกล่าวถึงการประยุกต์ของสมการแยกตัวแปรได้

กฎการเย็นตัวของนิวตัน (Newton's law of cooling)

ให้ $T(t)$ เป็นอุณหภูมิของวัตถุที่เวลา t, T_S เป็นอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม เช่น อุณหภูมิห้อง กฎการเย็นตัวของนิวตันกล่าวว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิของวัตถุเทียบกับเวลาจะเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของวัตถุกับอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม นั่นคือ

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_S) \tag{1.3}$$

เมื่อ k เป็นค่าคงที่ จะเห็นว่าสมการ (1.3) เป็นสมการแยกตัวแปรได้ โดยวิธีการแก้สมการที่เราได้ศึกษามาก่อนข้างต้น ได้ว่าผลเฉลยของสมการจะอยู่ในรูป

$$\ln |T - T_s| = kt + c \tag{1.4}$$

หรือ

$$T - T_s = Ce^{kt} \tag{1.5}$$

ตัวอย่าง 1.1.5. นำขวดโซดาที่มีอุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิห้อง 72 องศาฟาเรนไฮ ไปวางไว้ในตู้เย็นที่มีอุณหภูมิ 44 องศาฟาเรนไฮต์ หลังจากเวลาผ่านไปครึ่งชั่วโมงพบว่าขวดโซดามีอุณหภูมิเย็นลงเป็น 61 องศาฟาเรนไฮต์

(a) จงหาอุณหภูมิของขวดโซดาหลังจากเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมง

(b) จะใช้เวลานานเท่าใดที่ขวดโซดาจะมีอุณหภูมิลดลงเป็น 50 องศาฟาเรนไฮต์

ตัวอย่าง 1.1.6. พี่หนึ่งจักรวาลนำไก่งวงอบที่มีอุณหภูมิ $185°$F ออกจากเตาอบมาวางบนโต๊ะอาหารที่ตั้งอยู่ภายในห้องซึ่งมีอุณหภูมิ $75°$F

(a) ถ้าอุณหภูมิของไก่งวงอบลดลงเหลือ $150°$F หลังจากเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมง จงหาว่าไก่งวงอบจะมีอุณหภูมิเท่าใดหลังจากที่พี่หนึ่งจักรวาล นำออกมาจากเตาอบ 45 นาที

(b) จะใช้เวลานานเท่าใดที่ไก่งวงอบจะมีอุณหภูมิลดลงเหลือ 100°F

1.2 สมการเชิงเส้น (Linear equations)

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเชิงเส้น มีรูปทั่วไปคือ

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

เมื่อ P และ Q เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของตัวแปร x ตัวอย่างเช่น $xy' + y = 2x$ จะเห็นว่าถ้า $x \neq 0$ แล้วสมการดังกล่าวจะสามารถเขียนได้ในรูป

$$y' + \frac{1}{x}y = 2$$

ซึ่งไม่เป็นสมการแยกตัวแปรได้เนื่องจากไม่สามารถเขียน y' ในรูปผลคูณของฟังก์ชันของ x และ y ได้ แต่จากกฎการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผลคูณ เราจะได้ว่า

$$xy' + y = (xy)'$$

ดังนั้น

$$(xy)' = 2x$$

โดยการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$xy = x^2 + C \quad \text{หรือ} \quad y = x + \frac{C}{x}$$

จากตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นได้ว่าการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเชิงเส้นสามารถทำได้โดยการเปลี่ยนสมการด้านซ้ายมือให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ของผลคูณ $\mu(x)y$ โดยที่ $\mu(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x แล้วจึงทำการอินทิเกรตเพื่อหาผลเฉลย เราสามารถสรุปขั้นตอนการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นได้ดังนี้

1. สมมติว่ามีฟังก์ชัน $\mu(x)$ ที่ซึ่ง

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)[y' + P(x)y] = \mu(x)Q(x) \tag{1.6}$$

2. จากสมการ (1.6) จะได้ว่า

$$\mu(x)[y' + P(x)y] = [\mu(x)y]' = \mu(x)y' + y\mu'(x)$$

นั่นคือ

$$\mu(x)P(x) = \mu'(x) \tag{1.7}$$

จากสมการ (1.7) และการหาผลเฉลยของสมการแยกตัวแปรได้ จะได้ว่า

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

เรียก $\mu(x)$ ว่า **ตัวประกอบปริพันธ์ (Integrating factor)**

3. โดยการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ (1.6) จะได้

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)Q(x)dx\right)$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่เราต้องการ

ตัวอย่าง 1.2.1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

(1) $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$

(2) $x\dfrac{dy}{dx} = x^2 + 3y$

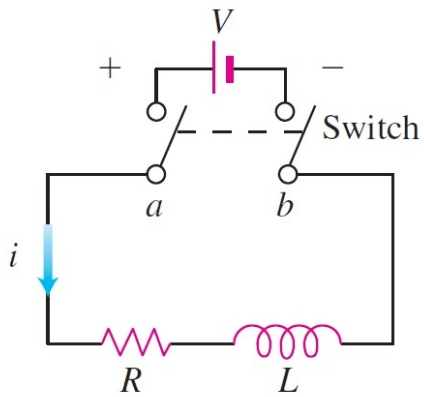
(3) $3xy' - y = \ln x + 1, \qquad x > 0$

ตัวอย่าง 1.2.2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$x^2y' + xy = 1; \qquad x > 0, \qquad y(1) = 2$$

ต่อไปเราจะศึกษาถึงการประยุกต์สมการอนุพันธ์เชิงเส้นกับแบบจำลองของวงจรไฟฟ้า (Electric circuits) โดยจะพิจารณาวงจรไฟฟ้า 2 แบบคือ วงจร RL และ วงจร RC

พิจารณาวงจรไฟฟ้าอย่างง่ายดังรูป



รูปที่ 1.1: RL-Circuit

โดยที่ R เป็นความต้านทาน มีหน่วยเป็นโอห์ม (Ω) L เป็นความเหนี่ยวนำ มีหน่วยเป็นเฮนรี และ $E(t)$ เป็นความต่างศักย์ มีหน่วยเป็นโวล์ต เรียกวงจรนี้ว่า **วงจร RL**

เราพบว่าความต่างศักย์ที่ตัวต้านทาน แทนด้วย E_R เป็นสัดส่วนกับกระแส $I(t)$ (มีหน่วยเป็นแอมแปร์) ในขณะนั้น นั่นคือ

$$E_R = RI(t)$$

ในขณะเดียวกัน ความต่างศักย์ที่ตัวเหนี่ยวนำ แทนด้วย E_L จะเป็นสัดส่วนกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของกระแสในขณะนั้น

$$E_L = L\frac{dI}{dt}$$

โดยกฎความต่างศักย์ของ Kirchhoff ที่กล่าวว่า **ผลบวกทางพีชคณิตของความต่างศักย์ขณะเวลาหนึ่งรอบวงจรปิดใดๆมีค่าเป็นศูนย์** หรือ **ความต่างศักย์ที่ใส่เข้าไปในวงจรปิด เท่ากับผลบวกของความต่างศักย์ที่ส่วนประกอบที่เหลือในวงจร** จะได้ว่า

$$E_R + E_L = E(t)$$

หรือ

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t) \tag{1.8}$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเชิงเส้น ดังนั้นเราสามารถหาผลเฉลยของสมการตามวิธีการที่ได้กล่าวมาก่อนหน้านี้

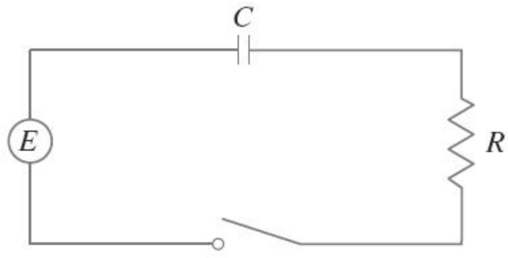
ตัวอย่าง 1.2.3. วงจร RL วงหนึ่ง มีความต้านทานเป็น 12 Ω และ ความเหนี่ยวนำเป็น 4 เฮนรี สมมติว่าความต้านทานรวมในวงจรเป็น 60 โวล์ต จงหา

(a) กระแสในวงจร ถ้าที่เวลาเริ่มต้นไม่มีกระแสในวงจรเลย

(b) กระแสในวงจรเมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที

(c) กระแสในวงจรเมื่อเวลาผ่านไปนานๆ

พิจารณาวงจรไฟฟ้าที่มีการใช้ตัวเก็บประจุแทนตัวเหนี่ยวนำ ซึ่งเรียกว่า วงจร RC ดังรูป



C เป็นความจุ (ฟารัด) เราพบว่าความต่างศักย์ที่ตัวเก็บประจุ แทนด้วย E_C เป็นสัดส่วนกับประจุไฟฟ้า $Q(t)$ (มีหน่วยเป็นคูลอมบ์) ในขณะนั้น เขียนได้เป็น

$$E_C = \frac{1}{C}Q(t)$$

แต่เนื่องจาก $I(t) = \dfrac{dQ}{dt}$ ดังนั้นโดยกฎความต่างศักย์ของ Kirchhoff จะได้ว่า

$$RI + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

หรือ

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

ตัวอย่าง 1.2.4. วงจร RC วงหนึ่ง มีความต้านทานเป็น 5 Ω และ ความความจุเป็น 0.05 ฟารัด สมมติว่าความต้านทานรวมในวงจรเป็น 60 โวล์ต และที่เวลาเริ่มต้นไม่มีประจุไฟฟ้าในวงจรเลย จงหาประจุไฟฟ้าในวงจรที่เวลาใดๆ