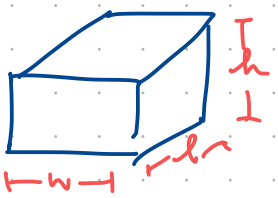
CH 2 Function of several Variables

• function $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid \sim\sim\sim\}$

$y = f(x)$ ← independent variable

→ พ.ท.ของรูปสามเหลี่ยม $A = \frac{1}{2} \times b \times h$

→ ปริมาตรของกล่องทรงสี่เหลี่ยม $V = w \times l \times h$



→ $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

ฟังก์ชันหลายตัวแปร $z = f(x,y)$

- z: ตัวแปรตาม (dependent variable)
- x, y: ตัวแปรต้น (independent variable)

$w = f(x,y,z)$

- w: ตัวแปรตาม
- x, y, z: ตัวแปรต้น

$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Domain of function

$f(x) = \sqrt{x+1}$ บน $[2,5]$

Domain: $x + 1 \geq 0$

$x \geq -1$

Restricted domain $[2,5]$

Natural domain $[-1, \infty)$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Ex $f(x,y) = x^2 + y^2$ $D_f = \mathbb{R}^2$

Domain ของฟังก์ชันหลายตัวแปร: เซตของคู่อันดับที่ทำให้เกิดผลของฟังก์ชัน

$f(1,1) = (1)^2 + (1)^2 = 2$

$f(\sqrt{2}, 3) = (\sqrt{2})^2 + 3^2 = 2 + 9 = 11$

Functions of several variables

1. Functions of several variables

There are many familiar formulas in which a given variable depends on two or more other variables. For example, the area A of a triangle depends on the base length b and height h by the formula $A=\frac{1}{2}bh$; the volume V of a rectangular box depends on the length l, the width w, and the height h by the formula $V=lwh$; and the arithmetic average $\bar{x}$ of n real numbers, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, depends on those numbers by the formula

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots x_n)$$

Thus, we say that

A is a function of the two variables b and h;

V is a function of the three variables l, w, and h;

$\bar{x}$ is a function of the n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

The terminology and notation for functions of two or more variables is similar to that for functions of one variable. For example, the expression

$$z=f(x,y)$$

means that z is a function of x and y in the sense that a unique value of the depentdent variable z is determined by specifying values for the independent variables x and y. Similarly

$$w=f(x,y,z)$$

expresses w as a function of x, y and z, and

$$u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

expresses u as a function of $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Definition 1 A function f of two variables, x and y, is a rule that assigns a unique real number $f(x,y)$ to each point (x,y) in some set D in the xy-plane.

Definition 2 A function f of three variables, x, y and z, is a rule that assigns a unique real number $f(x,y,z)$ to each point (x,y,z) in some set D in three-dimensional space.

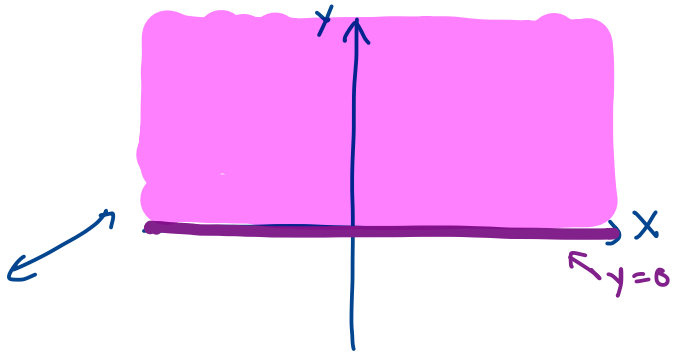
Example 1 Let $f(x,y)=5x^2\sqrt{y}-1$. Find $f(1,4)$ and sketch the natural domain of f.

$f(1,4) = 5(1^2)\sqrt{4} - 1$

$= 5 \cdot 2 - 1$

$= 9$

D_f : เงื่อนไขคือ $\sqrt{y} \Leftrightarrow y \geq 0$



$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

Example 2 Let $f(x,y)=\sqrt{y+1}+\ln(x^2-y)$. Find $f(e,0)$ and sketch the natural domain of f.

$f(e,0) = \sqrt{0+1} + \ln(e^2 - 0)$

$= \sqrt{1} + \ln e^2$

$= 1 + 2$

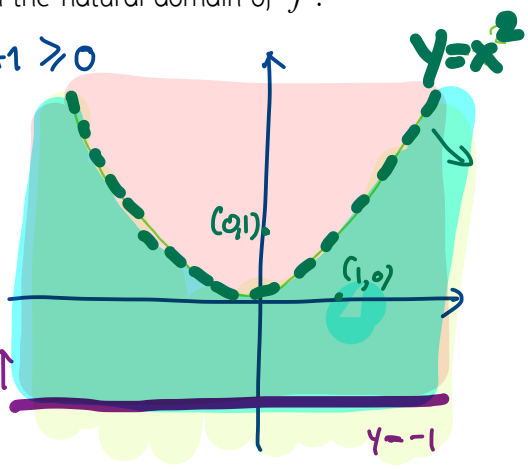
$= 3$

D_f : ① $\sqrt{y+1}$: $y+1 \geq 0$

② $\ln(x^2-y)$

$x^2 - y > 0$

$y < x^2$



① ∩ ②

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y+1 \geq 0\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y < x^2\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y+1 \geq 0 \wedge y < x^2\}$

Example 3 Let $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$. Find $f(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ and the natural domain of f.

$f(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = \sqrt{1-0^2-(\frac{1}{2})^2-(-\frac{1}{2})^2}$

$= \sqrt{1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}}$

natural domain : $1-x^2-y^2-z^2 \geq 0$

$x^2+y^2+z^2 \leq 1$

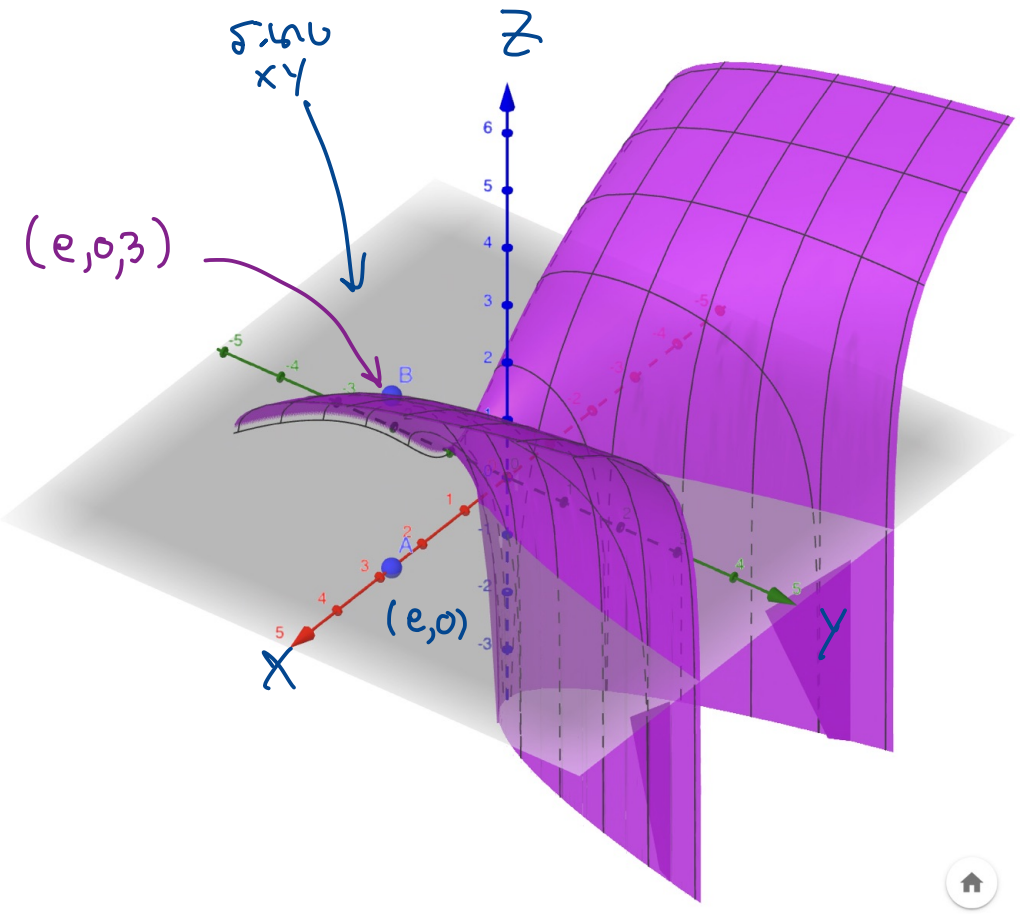
$a(x, y) = \sqrt{y+1} + \ln(x^2 - y)$

$b(x, y) = 5x^2\sqrt{y} - 1$

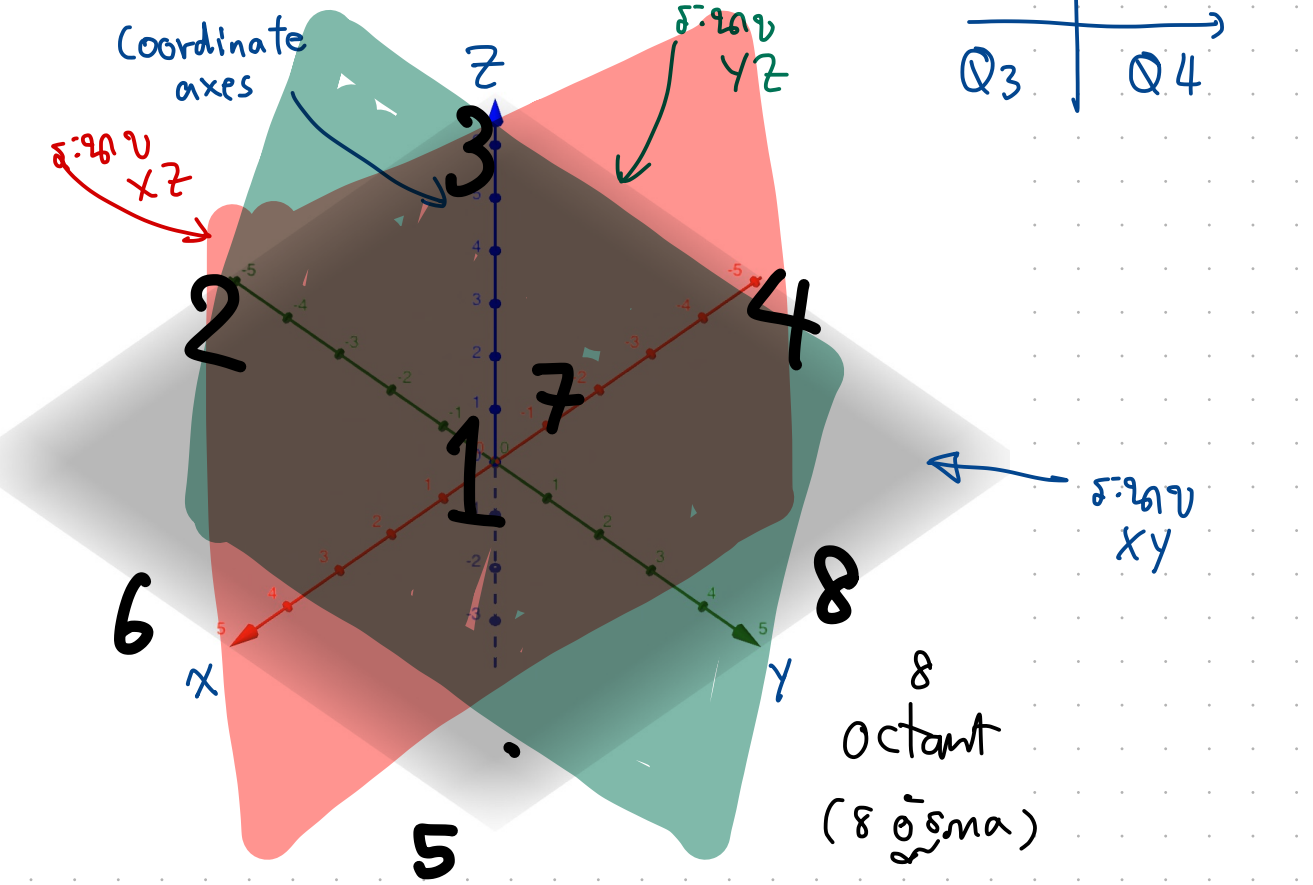
$A = (e, 0)$
$\rightarrow (2.72, 0)$

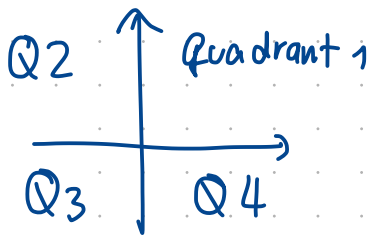
$B = (e, 0, 3)$
$\rightarrow (2.72, 0, 3)$

Input...

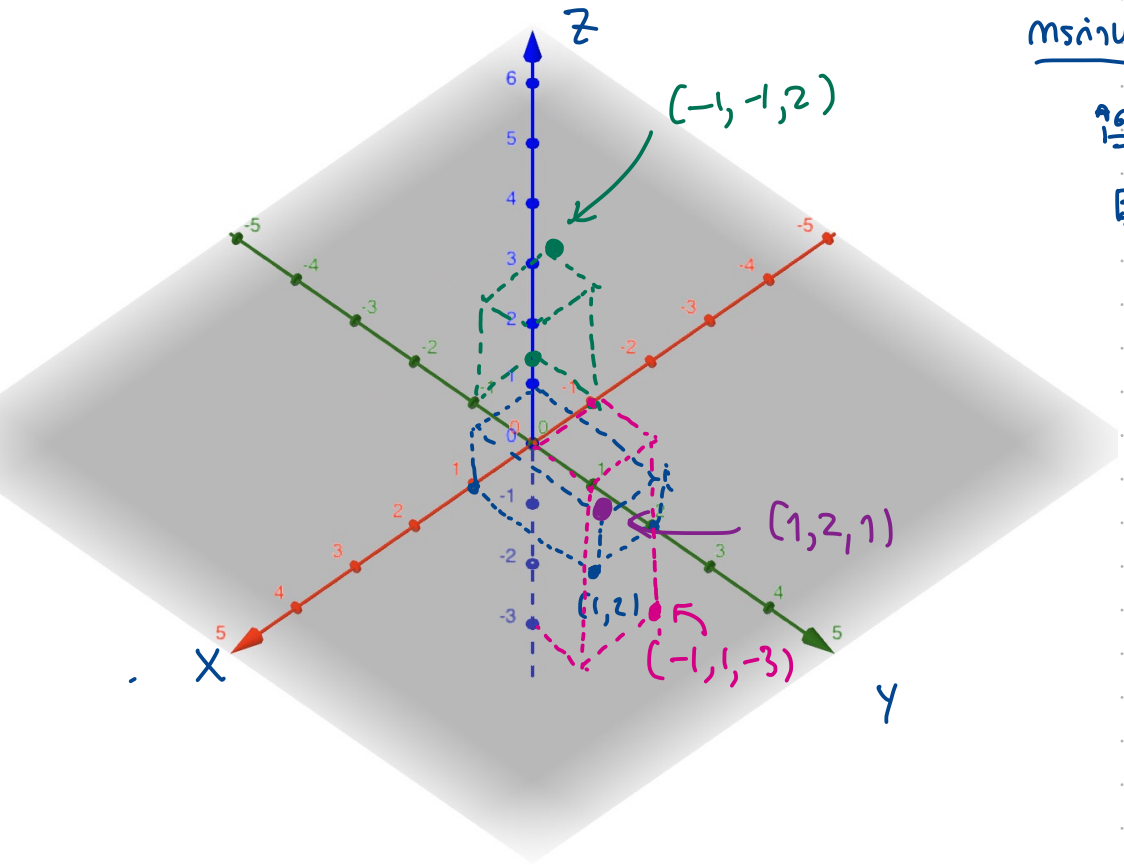


ระบบพิกัดฉากมิติ





8 octant (8 อัฐมา)



การกำหนดจุดในสามมิติ : triple

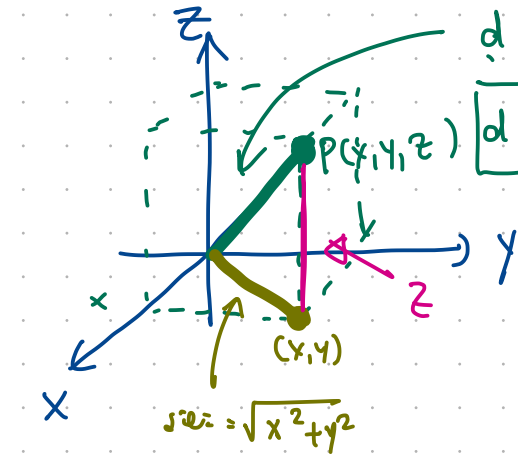
จุด (x,y,z)

Ex $(1,2,1)$

$(-1,-1,2)$

$(-1,1,-3)$

ระยะทางระหว่างจุดกำเนิดไปยังจุด $P(x,y,z)$



$$d = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2}$$

$$\boxed{d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

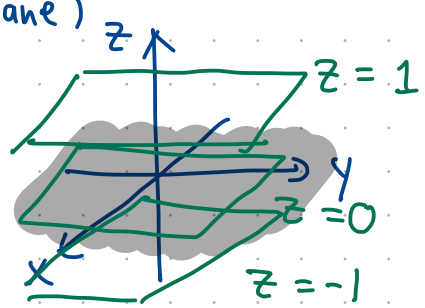
↓

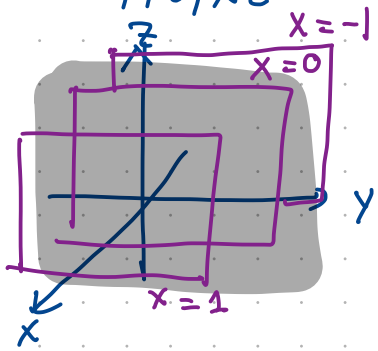
จุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$, จุด $P_2(x_2,y_2,z_2)$

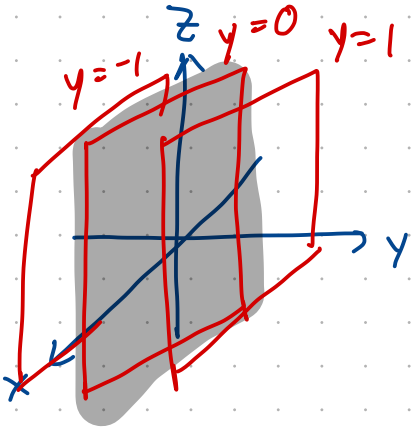
ระยะระหว่างจุด P_1, P_2 คือ $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

อัตถุพื้นฐานใน 3 มิติ

① ระนาบ (plane) ⓘ ระนาบที่ขนานกับระนาบ XY, YZ, XZ

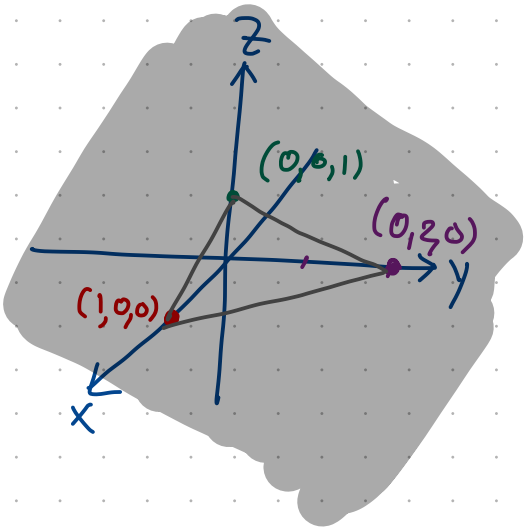






[2] Plane ที่ไม่ขนานกับระนาบ xy, yz, xz

สมการมาตรฐาน: $\boxed{ax+by+cz=d}$



Ex $z = 1 - x - \frac{1}{2}y$

ในการ plot ระนาบด้วยมือ เลือกจุดตัดแกน x, y, z

- จุดตัดแกน x : Set $y, z = 0$ แล้วหา x อยู่ที่ไหน

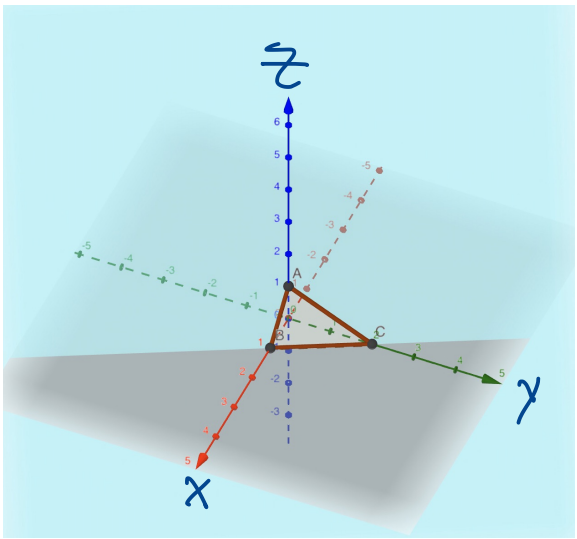
$$0 = 1 - x - 0 \iff x = 1$$

- จุดตัดแกน y : Set $x, z = 0$

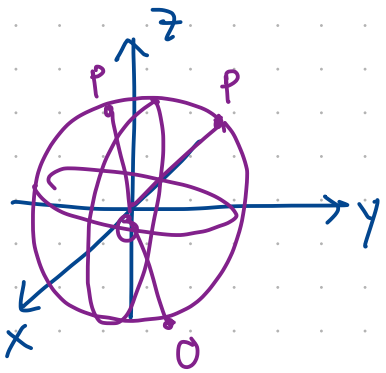
$$0 = 1 - \frac{1}{2}y \iff y = 2$$

- จุดตัดแกน z : Set $x, y = 0$

$$z = 1 - 0 - 0 \iff z = 1$$



② ทรงกลม (sphere)



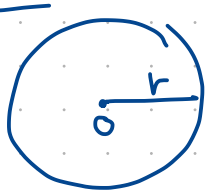
สมมติ $P(x,y,z)$ เป็นจุดที่ห่างจาก O เป็นระยะ r

$$r = d(O,P) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\therefore \boxed{x^2+y^2+z^2=r^2}$$

สมการทรงกลมที่มีรัศมี r จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0,0)$

ทรงกลม



∴ เซตของจุดที่มีระยะห่างจากจุดคงที่เป็นระยะเท่ากัน

จุดคงที่เรียกว่า จุดศูนย์กลาง ระยะเท่ากันเรียกว่า รัศมี

กราฟของฟังก์ชันหลายตัวแปร $z = f(x,y)$

Ex 4 (a) $f(x,y) = 1 - x - \frac{1}{2}y$

$$\downarrow$$

$$z = 1 - x - \frac{1}{2}y$$